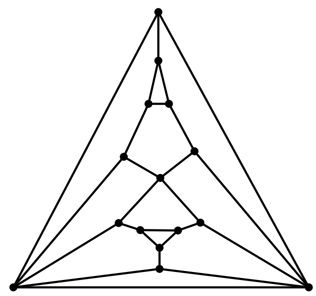
Graphentheorie

1. Beweisen Sie, dass man auch bei der Fächerversion von Mengers Theorem die Endknoten eines bekannten Wegesystems für ein maximales Wegesystem vorschreiben kann!

2. Beweisen Sie mittels der Zweipunktversion und der Fächerversion von Mengers Theorem:
   Sei G ein dreifach zusammenhängender Graph, und $A \subseteq V(G)$ mit $|A| = 3$. Dann gibt es entweder eine dreielementige Menge $B \subseteq V(G)$ und 9 kreuzungsfreie Wege in G derart, dass jeder Knoten von A mit jedem Knoten von B durch einen dieser Wege verbunden ist,
   oder es gibt in $V(G)$ einen Knoten v und in G 6 kreuzungsfreie Wege derart, dass je zwei Knoten von $A \cup \{v\}$ miteinander verbunden sind.

3. Beweisen sie, dass der folgende Graph keinen aufspannenden Kreis (Hamiltonkreis, Kreis als aufspannenden Untergraphen) besitzt.

   Hinweise: Wieviele kreuzungsfreie H-Wege hat ein Graph mindestens, wenn er einen H enthaltenden Kreis als Untergraphen hat? Wenden Sie Mader's Theorem an, um dies für den gegebenen Graphen mit geeignetem H zu wiederlegen!

4. Wandeln sie den letzten Beweis für Mengers Theorem in einen verbalen Algortihmus um, der ein maximales AB-Wegesystem und einen minimalen AB-Trenner findet.

5. Beweisen Sie mit Mengers Theorem den Satz von König:

   Die maximale Mächtigkeit eines Matchings im bipartiten Graphen ist gleich der minimalen Mächtigkeit eines Trägers.

   Hinweis: Ein Träger ist eine Menge von Knoten, nach deren Löschung der Graph keine Kanten mehr hat. Ein Matching ist eine Menge von Kanten, von denen keine zwei einen Endknoten gemeinsam haben.

6. Beweisen Sie mittels Maders Theorem den 1-Faktorsatz von Tutte: Ein Graph G hat genau dann einen 1 Faktor, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die Zahl der Komponenten von $G - X$ mit ungerade vielen Knoten höchstens $|X|$ ist.

7. Leiten Sie den Satz von Menger aus dem Satz von Mader ab!