Definitionen und Sätze der diskreten Optimierung

Dr. F. Göring

24. September 2009

Zusammenfassung

Die wesentlichen Definitionen und Sätze zusammengestellt.

Definition 0.1
Eine durch endlich viele lineare Ungleichungen beschriebene Menge

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

heißt Polyeder*.*

Ist P zusätzlich beschränkt, so heißt P auch Polytop*.*

Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ heißt Formulierung *einer Menge*

$$X \subseteq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p,$$

falls

$$X = P \cap (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p).$$

Definition 0.2
Seien P_1 und P_2 Formulierungen für $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist P_1 eine bessere Formulierung *als P_2, falls $P_1 \subsetneq P_2$.*

Kapitel 1

Grundlegende Begriffe und Sätze zu Polyedern

Definition 1.1 *Eine konvexe Menge* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *heißt* erzeugt von Punkten $P \in \mathbb{R}^n$ und Richtungen $R \subseteq \mathbb{R}^n$, *falls*

$$C = \mathrm{conv}(P) + \mathrm{cone}(R)$$

Dabei wird $\mathrm{cone}(R)$ *als Rezessionskegel von* C *bezeichnet.*

C *heißt* endlich erzeugt, *falls es durch endliche Mengen* P *und* R *erzeugt werden kann.*

Satz 1.2 (Farkas - Lemma Variante) *Für* $A \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ *hat entweder*

$$Ax = b, x \geq 0$$

oder

$$A^\top y \leq 0, b^\top y = 1$$

mit $a_i^\top y = 0$ *für mindestens* $\mathrm{Rang}\,[Ab] - 1$ *Spalten* a_i *von* A *eine Lösung.*

Satz 1.3 (Farkas - Minkowski - Weyl) *Ein konvexer Kegel ist genau dann polyedrisch (ist ein Polyeder), wenn er endlich erzeugt ist.*

Satz 1.4 (Motzkin; Minkowski, Steinitz, Weyl) *Eine Menge* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann ein Polyeder, wenn* $P = Q + C$ *für ein geeignetes Polytop* Q *und einen geeigneten polyedrischen Kegel* C *gilt.*

Eine Menge ist genau dann polyedrisch, wenn sie endlich erzeugt ist.

Korollar 1.5 *Eine Menge* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann die konvexe Hülle endlich vieler Punkte, wenn* P *ein Polytop ist.*

Definition 1.6 *Sei F eine Seite eines Polyeders P. Dann wird F bezeichnet als*

- Ecke*, falls* $\dim(F) = 0$
- Kante*, falls* $\dim(F) = 1$
- Facette*, falls* $\dim(F) = dim(P) - 1$
- minimale Seite*, falls $F \neq \emptyset$ und* $\dim(F) \leq \dim(F')$ *für alle Seiten $F' \neq \emptyset$ of P.*

Korollar 1.7 *Ein Polytop ist die konvexe Hülle seiner Ecken.*

Definition 1.8 *Sei $P = \{x : Ax \leq b\}$. Wir nennen $P_I :=$* $\mathrm{conv}(\{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b\})$ *die* ganzzahlige Hülle *von P.*

Definition 1.9 *Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ wird* rational *genannt, falls es $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ derart gibt, dass $P = \{x : Ax \leq b\}$ gilt.*
Ein polyedrischer Kegel C wird rationaler Kegel *genannt, falls es $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ mit $C = \{x : Ax \leq 0\}$ gibt.*

Beobachtung 1.10 *Die Ecken eines rationalen Polytops sind rational.*

Beobachtung 1.11 *Jeder rationale Kegel kann durch ganzzahlige Vektoren erzeugt werden.*

Satz 1.12 *Sei P ein rationales Polyeder. Dann ist P_I auch ein Polyeder. Darüberhinaus sind die Rezessionskegel von P und P_I identisch.*

Definition 1.13 *Ein rationales Polyeder P heißt* ganzzahlig, *sofern $P = P_I$.*

Kapitel 2

Optimalität, Relaxierung und Schranken

Definition 2.1 *Seien* $X, T \subseteq \mathbb{R}^n$, $c : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *und* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. *Das Problem*

$$z^{relaxiert} = \max\{f(x) : x \in T\} \tag{2.1}$$

ist eine Relaxierung *von*

$$z = \max\{c(x) : x \in X\} \tag{2.2}$$

sofern für jedes $x \in X$ *gilt*

- $x \in T$
- *und* $f(x) \geq c(x)$.

Beobachtung 2.2 *Ist Problem (2.1) eine Relaxierung von Problem (2.2), dann gilt* $z^{relaxiert} \geq z$.

Beobachtung 2.3 *Ist* x *für Relaxation (2.1) unzulässig, dann auch für Problem (2.2).*

Beobachtung 2.4 *Sei* x^* *eine Optimallösung von (2.1). Sofern* $x^* \in X$ *und* $f(x^*) = c(x^*)$ *gilt, dann ist* x^* *auch eine Optimallösung von(2.2).*

Definition 2.5 *Die* lineare Relaxation *des ganzzahligen Programmes* $\max\{c^\top x : x \in P \cap \mathbb{Z}^n\}$ *mit der Formulierung* $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$ *ist das LP*

$$z^{LP} = \max\{c^\top x : x \in P\} \tag{2.3}$$

Beobachtung 2.6 *Sind* P_1 *und* P_2 *Formulierungen der zulässigen Menge* $X = P_i \subset \mathbb{Z}^n$, *wobei* P_1 *eine bessere Formulierung ist, als* P_2, *dann liefert* P_1 *für beliebigen Kostenvektor* c *eine bessere Schranke; d.h.*

$$z_1^{LP} := \max\{c^\top x : x \in P_1\} \leq \max\{c^\top x : x \in P_2\} =: z_2^{LP}.$$

Definition 2.7 *Sei $G = (N, E)$ ein Graph. Ein 1-Baum ist ein Untergraph bestehend aus zwei Kanten adjazent zu Knoten 1 sowie den Kanten eines Baumes auf den Knoten $\{2, \ldots, n\}$.*

Definition 2.8 *Für eine Funktion $L : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ ist $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ ein* Sattelpunkt, *sofern für beliebige $x \in X$ und $y \in Y$ gilt:*

$$L(\bar{x}, y) \leq L(\bar{x}, \bar{y}) \leq L(x, \bar{y}) \tag{2.4}$$

Satz 2.9 *Sei $L : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$. Wenn*

1. *X und Y abgeschlossen und konvex sind,*
2. *$L(x, y)$ für festes y konvex in x und für festes x konkav in y ist,*
3. *X beschränkt (damit kompakt) ist, oder ein $\hat{y} \in Y$ existiert mit $\inf\limits_{\|x\| \to \infty} L(x, \hat{y}) = \infty$,*
4. *Y beschränkt (damit kompakt) ist, oder ein $\hat{x} \in X$ existiert mit $\sup\limits_{\|y\| \to \infty} L(\hat{x}, y) = -\infty$,*

dann gibt es einen Sattelpunkt und die Menge der Sattelpunkte ist von der Form $\bar{X} \times \bar{Y})$ wobei $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ konvex und kompakt sind.

Satz 2.10 *Sei X endlich. Dann ist*

$$\inf_y \max_{x \in X} [d^\top y + < c - D^\top y, x >: x \in X] \geq$$
$$\geq \max\{c^\top x : x \in \text{conv} X \cap \{x : Dx = d\}\}$$

Beobachtung 2.11 *Für das Optimierungsproblem*

$$z = \sup\{c^\top x : Dx \leq d, x \in X\} \text{ mit } X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \tag{2.5}$$

ist das Problem

$$z(u) := \max\{c^\top x + u^\top(d - Dx) : x \in X\} \tag{2.6}$$

für beliebiges $u \geq 0$ eine Relaxierung.

Definition 2.12 *In Beobachtung (2.11) wird u als* Kostenvariable, Dualvariable *oder* Dualer Lagrangemultiplikator assoziiert mit $Dx \leq d$ *bezeichnet.*
Das Problem (2.6) wird als Lagrange-Relaxation (Unterproblem) *von (2.5) mit Parameter u bezeichnet.*

Beobachtung 2.13 *Wenn die Aussagen*

1. $u \geq 0$.
2. $x(u) \in X$ *ist Opimallösung von Problem (2.6).*
3. $Dx(u) \leq d$.
4. $(Dx(u))_i = d_i$ *sofern* $u_i > 0$.

gelten, dann ist $x(u)$ optimal für Problem(2.5).

Definition 2.14 *Die Probleme*

$$z = \max\{c(x) : x \in X\} \tag{2.7}$$

und

$$w = \min\{w(u) : u \in U\} \tag{2.8}$$

bilden ein (schwach) duales Paar*, sofern* $c(x) \leq w(u)$ *für jedes* x *aus* X *und jedes* u *aus* U *gilt.*
Falls $z = w$ *gilt, formen sie ein* stark duales Paar*.*

Definition 2.15 *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph.*
Ein Matching *von* G *ist eine Menge paarweise (knoten-) disjunkter Kanten.*
Eine Menge $R \subseteq V$ *ist eine* Knotenüberdeckung *von* G*, sofern jede Kante aus* E *einen Endknoten in* R *hat.*

Beobachtung 2.16 *Die beiden Probleme, ein maximales Matching bzw. eine minimale Knotenüberdeckung zu finden, bilden ein schwach duales Paar.*

Kapitel 3

Lineare Diophantische Gleichungen

Definition 3.1 *$\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine* (additive) Gruppe, *sofern*

1. *$0 \in \mathcal{G}$ und*
2. *für $x, y \in \mathcal{G}$ auch $x + y \in \mathcal{G}$ und $-x \in \mathcal{G}$ gilt.*

Eine Gruppe $\mathcal{G}$ wird von $a_1, \ldots, a_m$ erzeugt, sofern $\mathcal{G} = \{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m : \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Z}\}$ gilt. Kann $\mathcal{G}$ durch linear unabhängige Vektoren erzeugt werden, bezeichnet man $\mathcal{G}$ als Gitter *und diese Vektoren bilden eine* Basis *von $\mathcal{G}$.*

Definition 3.2 Elementare *bzw.* unimodulare *Spaltenoperationen auf einer Matrix sind:*

1. *Austausch zweier Spalten,*
2. *Multiplikation einer Spalte mit -1 und*
3. *Addition eines ganzzahligen Vielfachen einer Spalte zu einer anderen.*

Beobachtung 3.3 *Elementare Operationen ändern nicht das Gitter, welches von den Spalten einer Matrix generiert wird.*

Definition 3.4 *Eine Matrix mit vollem Zeilenrang ist in* Hermitescher Normalform (HNF) *sofern $A = [B0]$ gilt, wobei B eine nichtnegative untere Dreiecksmatrix ist, deren Diagonalelemente die einzigen maximalen Elemente der jeweiligen Zeile sind.*

Satz 3.5 *Jede rationale Matrix mit vollem Zeilenrang kann durch elementare Operationen in die HNF überführt werden.*

Beobachtung 3.6 *Eine Gruppe, die von endlich vielen rationlen Vektoren erzeugt wird, hat eine Basis und ist daher ein Gitter.*

Satz 3.7 (Eindeutigkeit der HNF) *Seien A und A' rationale Matrizen mit vollem Zeilenrang, sowie HNF $[B0]$ bzw. $[B'0]$. Die Spalten von A erzeugen genau dann das gleiche Gitter, wie die Spalten von A', wenn $B = B'$.*

Definition 3.8 *Eine Matrix $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ ist unimodular, sofern* $\det(U) \in \{1, -1\}$.

Satz 3.9 *Für jede nichtsinguläre Matrix $U \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *U ist unimodular.*
2. *U^{-1} ist unimodular.*
3. *Das von den Spalten von U generierte Gitter ist $\mathbb{Z}^n$.*
4. *Die HNF von U ist I.*
5. *I kann durch elementare Spaltenoperationen in U überführt werden.*

Korollar 3.10 *Für rationale Matrizen A und A' mit vollem Zeilenrang sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Spalten von A und A' generieren das gleiche Gitter.*
2. *A kann durch elementare Spaltenoperationen in A' überführt werden.*
3. *$A' = AU$ für eine geeignete unimodulare Matrix U.*

Korollar 3.11 *Für jede rationale Matrix A mit vollem Zeilenrang gibt es eine unimodulare Matrix U derart, dass $A \cdot U$ die HNF von A ist. Ist A regulär, so ist U eindeutig bestimmt.*

Satz 3.12 *Für $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ hat $Ax = b$ genau dann eine ganzzahlige Lösung x, wenn $y^\top b \in \mathbb{Z}$ für jedes $y \in \mathbb{Q}^m$ gilt, für welches $y^\top A$ ganzzahlig ist.*

Satz 3.13 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ mit vollem Zeilenrang:*

- *$Ax = b$ besitzt eine ganzzahlige Lösung für jedes $b \in \mathbb{Z}^m$*
- *Für jedes $y \in \mathbb{Q}^m$ gilt: Sofern $y^\top A$ ganzzahlig ist, ist auch y ganzzahlig.*
- *Der ggT aller Unterdeterminanten der Ordnung m von A ist 1.*
- *Die HNF von A ist $[\mathbf{I}\ 0]$.*

Kapitel 4

Ganzzahlige Kegel

Definition 4.1 *Zu einem rationalen Kegel C nennen wir eine endliche Teilmenge $H = \{h_1, \ldots, h_k\} \subseteq C \cap \mathbb{Z}^n$ eine* Hilbertbasis, *sofern die Menge der ganzzahligen Elemente von C gleich der Menge der nichtnegativen ganzzahligen Linearkombinationen von Vektoren aus H ist:*

$$C \cap \mathbb{Z}^n = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i : \lambda \in \mathbb{N}_0\}$$

Satz 4.2 *Jeder rationale Kegel C besitzt eine Hilbertbasis. Wenn der Kegel spitz ist ($C \cap -C = \{0\}$), gibt es eine eindeutig bestimmte minimale Hilbertbasis.*

Satz 4.3 *Für einen spitzen rationalen Kegel ist es NP-vollständig, zu entscheiden ob v nicht zur minimalen Hilbert Basis gehört.*

Definition 4.4 *Eine endliche Menge $T \subseteq \mathbb{Z}^n$ ist eine* Testmenge *für das ganzzahlige Programm*

$$\min\{c^\top x : Ax = b, x \geq 0\} \tag{4.1}$$

sofern eine zulässige Lösung $\bar{x}$ genau dann optimal ist, wenn für jedes $t \in T$, für welches $\bar{x} + t$ zulässig ist, $c^\top(\bar{x} + t) \geq c^\top \bar{x}$ gilt.

Kapitel 5

Ganzzahlige Polyeder

Beobachtung 5.1 *Ein rationales Polyeder ist genau dann ganzzahlig, wenn jede nichtleere Seitenfläche einen ganzzahligen Punkt enthält.*

Satz 5.2 *Ein rationales Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ganzzahlig, wenn für beliebige Kostenvektoren $c \in \mathbb{Z}^n$ der Wert $\sup\limits_{x \in P} c^\top x$ ganzzahlig ist, sofern er endlich ist.*

Definition 5.3 *Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mit vollem Zeilenrang ist* unimodular, *sofern die Determinante jeder Untermatrix bestehend aus m linear unabhängigen Spalten den Wert 1 oder -1 hat.*

Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist total unimodular, sofern alle quadratischen Untermatrizen Determinante 0, 1 oder -1 haben.

Beobachtung 5.4

1. *$A \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ sei nichtsingulär. Dann ist A unimodular genau dann, wenn $A^{-1}b \in \mathbb{Z}^n$ für beliebiges ganzzahliges b gilt.*

2. *$A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ habe vollen Zeilenrang. Dann ist A unimodular genau dann, wenn $\{x \geq 0 : Ax = b\}$ für beliebiges ganzzahliges b ganzzahlig ist.*

3. *A ist total unimodular*

   genau dann, wenn $[AI]$ unimodular ist,

   genau dann, wenn $A^\top$ total unimodular ist,

   genau dann, wenn $\begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{bmatrix}$ *total unimodular ist.*

Satz 5.5 (Hoffmann & Kruskal, 1956) *$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ ist total unimodular genau dann, wenn $\{x \geq 0 : Ax \leq b\}$ für beliebiges $b \in \mathbb{Z}^m$ ganzzahlig ist.*

Korollar 5.6 *$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ ist genau dann total unimodular, wenn $\forall b, c \in \mathbb{Z}^m$ bei endlichem*

$$\max\{c^\top x : Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^\top y : A^\top y \geq c, y \geq 0\}$$

die Optima für ganzzahlige Vektoren erreicht werden.

Satz 5.7 (Heller & Tompkins, 1956) *Sei $A \in \{0, 1, -1\}^{m\times n}$ mit höchstens zwei von Null verschiedenen Einträgen pro Spalte. Dann ist A genau dann total unimodular, wenn die Zeilen von A so in zwei Klassen aufgeteilt werden können, dass*

1. *Zeilen mit $+1$ und -1 in gleicher Spalte zur gleichen Klasse und*

2. *Zeilen mit von Null verschiedenen Einträgen gleichen Vorzeichens in der gleichen Spalte zu unterschiedlichen Klassen*

gehören.

Satz 5.8 (Poincaré, 1900) *Sei $A \in \{0, 1, -1\}^{m\times n}$ mit höchstens einer $+1$ und höchstens einer -1 pro Spalte. Dann ist A total unimodular.*

Definition 5.9 *Sei $D = (V, E)$ ein gerichteter Graph und sei $T = (V, E')$ ein Spannbaum von V mit gerichteten Kanten (E und E' unabhängig voneinander). Sei $M \in \{0, +1, -1\}^{E' \times E}$ mit*

$$M_{e',e} = \begin{cases} +1, & \text{sofern der } e = (u,v)\text{-Weg in } T \text{ die Kante } e' \\ & \text{vorwärts nutzt,} \\ -1, & \text{sofern der } e = (u,v)\text{-Weg in } T \text{ die Kante } e' \\ & \text{rückwärts nutzt und} \\ 0, & \text{sofern der } e = (u,v)\text{-Weg in } T \text{ die Kante } e' \\ & \text{gar nicht nutzt.} \end{cases}$$

Dann wird M als Netzwerkmatrix bezeichnet.

Satz 5.10 (Tutte, 1965) *Netzwerkmatrizen sind total unimodular.*

Satz 5.11 (König, Egervary) *In jedem bipartiten Graphen sind die Größen einer maximalen Paarung und einer minimalen Knotenüberdeckung gleich.*

Definition 5.12 *Ein rationales System $Ax \leq b$ ist* total dual ganzzahlig *(total dual integral,* TDI*), sofern das duale Problem* $\min\{b^\top y : A^\top y = c, y \geq 0\}$ *für jeden ganzzahligen Vektor c für welchen das Minimum endlich ist, eine ganzzahlige Lösung hat.*

Satz 5.13 *Wenn $Ax \leq b$ TDI und b ganzzahlig ist, dann ist das Polyeder $P = \{x : Ax \leq b\}$ ganzzahlig.*

Satz 5.14 *Ein rationales System ist genau dann TDI, wenn für jede Seitenfläche F von $P = \{x : Ax \leq b\}$ die aktiven Zeilen von A in F eine Hilbertbasis des von diesen Zeilen generierten Kegels ist.*

Satz 5.15 *Für jedes rationale Polyeder gibt es ein TDI-System* $Ax \leq b$ *mit* $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ *und* $P = \{x : Ax \leq b\}$. P *ist genau dann ganzzahlig, wenn* b *ganzzahlig gewählt werden kann.*

Lemma 5.16 *Sei* $Ax \leq b, a^\top x \leq \beta$ *ein TDI-System. Dann ist* $Ax \leq b, a^\top x = \beta$ *auch ein TDI-System.*

Kapitel 6

Allgemeine Schnittebenen

Definition 6.1 *Zu einem Polyeder P sei P' der Durchschnitt aller H_I zu Halbräumen H, welche P enthalten.*

Satz 6.2 *Sei $P = \{x : Ax \leq b\}$ ein Polyeder mit $Ax \leq b$ TDI und A ganzzahlig. Dann gilt $P' = \{x : Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$. Insbesondere ist mit P auch P' rational.*

Lemma 6.3 *Sei F eine Seitenfläche eines rationalen Polyeders P. Dann gilt $F' = F \cap P'$.*

Satz 6.4 *Zu jedem rationalen Polyeder P gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $P^k = P_I$.*

Beobachtung 6.5 *P_i und L_i entstehen aus $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq B\}$ durch das Lift and Project Verfahren für die Variable x_i. Dann gilt*

1. *$P_I \subseteq P_i \subseteq P$*
2. *Ist $a^\top x \leq \beta$ zulässig für P, dann sind $a^\top x \cdot x_i \leq \beta x_i$ und $a^\top x \cdot (1 - x_i) \leq \beta(1 - x_i)$ zulässig für L_i.*

Satz 6.6

$$P_i = \operatorname{conv}(P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in \{0, 1\})$$

Satz 6.7

$$P_{i_1,\ldots,i_k} = \operatorname{conv}(P \cap \{x \in R^n : x_j \in \{0, 1\}, j = i_1, \ldots, i_k\})$$

Beobachtung 6.8 *Sofern für $i = 1$ und $i = 2$ $P^i = \{x \in \mathbb{R}^n : A^i x \leq b^i\}$ nichtleere Polyeder sind, ist $a^\top x \leq b$ genau dann eine gültige Ungleichung für $\operatorname{conv}(P^1 \cup P^2)$, wenn es nichtnegative λ^1 und λ^2 derart gibt, dass $a = (A^i)^\top \lambda^i$ und $b \geq (b^i)^\top \lambda^i$ für $i = 1$ und $i = 2$ gelten.*

Beobachtung 6.9 *Seien* $\mathcal{X} := \{(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} : s + x \geq b\}$ *und* $\beta := b - \lfloor b \rfloor > 0$. *Dann ist die Ungleichung* $s \geq \beta(\lceil b \rceil - x)$ *bzw.* $\frac{s}{\beta} + x \geq \lceil b \rceil$ *für* $\mathcal{X}$ *gültig.*

Korollar 6.10 *Seien* $\mathcal{X} := \{(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z} : x \leq b + s\}$ *und* $\beta := b - \lfloor b \rfloor > 0$. *Dann ist* $x \leq \lfloor b \rfloor + \frac{s}{1-\beta}$ *gültig für* $\mathcal{X}$.

Beobachtung 6.11 *Seien*

$$\mathcal{X}^{MIR} := \{(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+^n : a^\top x \leq b + s\}$$

sowie $(a)^+ := \max\{0, a\}$, $\alpha_i := a_i - \lfloor a_i \rfloor$ *und* $\beta = b - \lfloor b \rfloor$ *Die gemischtganzzahlige Rundungsungleichung (MIR, mixed integer rounding inequality)*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\lfloor a_i \rfloor + \frac{(\alpha_i - \beta)^+}{1-\beta} \right) x_i \leq \lfloor b \rfloor + \frac{s}{1-\beta}$$

ist für $\mathcal{X}^{MIR}$ *gültig.*

Beobachtung 6.12 *Seien*

$$\mathcal{X}^G := \left\{ (\bar{x}, x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^{N_1} \times R_+^{N_2} : \bar{x} + \sum_{i \in N_1} a_i x_i + \sum_{i \in N_2} a_i y_i = b \right\},$$

$\alpha_i := a_i - \lfloor a_i \rfloor (i \in N_i)$ *und* $\beta := b - \lfloor b \rfloor$. *Falls* b *nicht ganzzahlig ist, so ist der gemischt ganzzahlige Gomory-Schnitt*

$$\sum_{i \in N_1 : \alpha_i \leq \beta} \frac{\alpha_i}{\beta} x_i + \sum_{i \in N_1 : \alpha_i > \beta} \frac{(1-\alpha_i)}{1-\beta} x_i + \sum_{i \in N_2 : a_i > 0} \frac{a_i}{\beta} y_i + \sum_{i \in N_2 : a_i < 0} \frac{a_i}{1-\beta} y_i \geq 1$$

für $\mathcal{X}^G$ *gültig.*

Kapitel 7

Facettenungleichungen

Definition 7.1 *Seien* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und* $b \in \mathbb{R}^m$.

- *Eine Ungleichung* $A_{i,\cdot}^\top x \leq b_i$ *einer Beschreibung* $Ax \leq b$ *ist* redundant, *sofern jeder Punkt, welcher die übrigen Ungleichungen erfüllt, automatisch auch diese erfüllt.*

- *Enthält ein Ungleichungssystem keine redundanten Ungleichungen, bezeichnen wir es als* irredundant.

- *Eine Beschreibung eines Polyeders* $P = \{x : Ax \leq b\}$ *heißt* minimal, *sofern die Anzahl ihrer Ungleichungen minimal ist.*

- $Ax \leq b$ *ist eine* eindeutige minimale Beschreibung *von* $P := \{x : Ax \leq b\}$, *sofern jede andere minimale Beschreibung von* P *aus ihr durch Skalierung ihrer Ungleichungen mit positiven Faktoren hervorgeht.*

Satz 7.2 *Wenn* $P = \{x : Ax \leq b\}$ *volldimensional und* $Ax \leq b$ *irredundant ist, dann ist* $Ax \leq b$ *eine eindeutige minimale Beschreibung von* P *und die Ungleichungen entsprechen den Facetten von* P.

Definition 7.3 *Sei* $N = \{1, \ldots, n\}$ *eine endliche Menge und* $\mathcal{I} \subseteq 2^N$.

- $(N, \mathcal{I})$ *wird* Unabhängigkeitssystem *genannt, sofern gilt:*
  (M1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
  (M2) $\forall S \in \mathcal{I}\ \forall T \subseteq S : T \in \mathcal{I}$
- *Teilmengen von* N *heißen* unabhängig, *wenn sie zu* $\mathcal{I}$ *gehören, und ansonsten* abhängig *(jeweils bzgl.* $(N, \mathcal{I})$*).*
- *Eine inklusionsmaximale unabhängige Teilmenge (von* $S \subseteq N$*) ist eine* Basis *(von* S*).*
- *Eine inklusionsminimale abhängige Menge ist ein* Kreis.
- *Der* Rang *von* $S \subseteq N$ *ist* $r(S) = \max\{|B| : B \subseteq S, B \in \mathcal{I}\}$.
- *Eine Menge* $S \subseteq N$ *heißt* abgeschlossen, *sofern für jedes* $e \in N \setminus S$ *gilt* $r(S \cup \{e\}) \geq r(S) + 1$.
- *Ein Unabhängigkeitssystem* $(N, \mathcal{I})$ *heißt* Matroid, *sofern gilt:*
  (M3) $\forall S, T \in \mathcal{I} : |S| > |T| \Rightarrow \exists e \in S \setminus T : T \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

Beobachtung 7.4 *Ist* $a^\top x \leq \beta$ *eine Facetten definierende Ungleichung von* $P_{\mathcal{I}} := \operatorname{conv}(\chi(S) : S \in \mathcal{I}\}$, *aber kein positives Vielfaches einer Nichtnegativitätsbedingung* $-x_i \leq 0$, *so ist* a *ein nichtnegativer Vektor und* $\beta > 0$.

Beobachtung 7.5 *Ist* C *Kreis eines Unabhängigkeitssystems* $(N, \mathcal{I})$, *dann ist die Ungleichung*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1 \tag{7.1}$$

gültig für $P_{\mathcal{I}}$.

Definition 7.6 *Für ein Unabhängigkeitssysten $(N, \mathcal{I})$ mit Rangfunktion r und $T \subseteq N$ wird*

$$\sum_{i \in T} x_i \leq r(T) \tag{7.2}$$

Rangungleichung *genannt.*

T heißt nicht separierbar, *sofern für jede nichtleere echte Teilmenge S von T gilt: $r(T) < r(S) + r(T \setminus S)$.*

Beobachtung 7.7 *Für ein Unabhängigkeitssysten $(N, \mathcal{I})$ mit Rangfunktion r und $T \subseteq N$ gilt: Sofern $x(T) \leq r(T)$ eine Facette von $P_{\mathcal{I}}$ definiert, ist T nicht separierbar und abgeschlossen,*

Lemma 7.8 (Edmonds, 1971) *Gilt $\binom{N}{1} \subseteq \mathcal{I}$ und ist $(N, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Rangfunktion r und $T \subseteq N$, dann gilt: Genau dann, wenn T abgeschlossen und nicht separierbar ist, definiert $x(T) \leq r(T)$ eine Facette von $P_{\mathcal{I}}$.*

Satz 7.9 (Edmonds, 1971) *Ist $(N, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, so wird $P_{\mathcal{I}}$ durch das System*

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0 \ \forall i \in N \\ x(T) &\leq r(T) \ \forall T \subseteq N \end{aligned}$$

vollständig beschrieben.

Satz 7.10 (Edmonds, 1970) *Sind $(N, \mathcal{I}_1)$ und $(N, \mathcal{I}_2)$ Matroide mit Rangfunktion r_1 und r_2, dann wird $P_{\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} := \mathrm{conv}(\{\chi(S) : S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\})$ durch das System*

$$\begin{aligned} x_i &\geq 0 \ \forall i \in N \\ x(T) &\leq \min\{r_1(T), r_2(T)\} \ \forall T \subseteq N \end{aligned}$$

vollständig beschrieben.

Korollar 7.11 *Für einen Graphen G ist das Polyeder $P = \{x \in [0,1]^n : x_i + x_j \leq 1 \forall ij \in E\}$ genau dann ganzzahlig, wenn G bipartit ist.*

Satz 7.12 *Sei C ein ungerader Kreis (odd cycle) eines Graphen G. Die "odd cycle inequality"*

$$\sum_{i \in V(C)} x_i \leq \frac{|V(C)| - 1}{2} \tag{7.3}$$

ist für $P_{S(G)} := \mathrm{conv}\{\chi(S) \mid S \text{ ist unabhängig in } G\}$ gültig. Sie ist höchstens dann Facetten definierend, wenn C keine Diagonalen hat (C wird dann auch als "odd hole" bezeichnet).

Satz 7.13 *Sei Q eine Clique in G. Die Ungleichung $\sum_{i \in Q} x_i \leq 1$ ("Cliquenungleichung") ist gültig für $P_{S(G)}$. Sie ist definiert genau dann eine Facette, wenn Q in G eine maximale Clique bzgl. Mengeninklusion ist.*

Beobachtung 7.14 *Falls X zulässig für SIS ist, dann erfüllt X alle Cliquenungleichungen.*

Definition 7.15 *Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist*

- $\alpha(G)$ *die maximale Mächtigkeit einer unabhängigen Menge,*
- $\omega(G)$ *die minimale Mächtigkeit einer Clique,*
- $\chi(G)$ *die chromatische Zahl, d.h. die kleinste Anzahl unabhängiger, V überdeckender Mengen in G,*
- $\bar{\chi}(G)$ *die kleinste Zahl von Cliquen, in die sich V zerlegen läßt.*

Beobachtung 7.16 *Sei $G = (V, E)$ und $\bar{G} := \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$ der Komplementärgraph zu G.*

Dann gilt $\alpha(G) = \omega(\bar{G}) \leq \chi(\bar{G}) = \bar{\chi}(G)$.

Definition 7.17 (Berge, 1961) *Ein Graph G ist* perfekt, *sofern $\omega(G') = \chi(G')$ für alle induzierten Untergraphen G' von G gilt.*

Satz 7.18 (weak perfect graph theorem, Lovász,1972) *Ein Graph ist genau dann perfekt, wenn auch sein Komplement perfekt ist.*

Satz 7.19 strong perfect graph theorem; Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2002 *Ein Graph ist genau dann perfekt, wenn er weder ein odd hole aus mindestens fünf Knoten oder dessen Komplement als induzierten Untergraphen enthält.*

Satz 7.20 *$G = (V, E)$ ist genau dann perfekt, wenn*

$$P_{S(G)} = \{x \geq 0 : x(Q) \leq 1 \text{ für alle Cliquen } Q \text{ von } G\} \quad (7.4)$$

Definition 7.21 (0-1-Knapsack)
Zu gegebenem $P_K := \mathrm{conv}\{x \in \{0,1\}^n : a^\top x \le b\}$ *mit festem* $a \in \mathbb{N}^n, b \in \mathbb{N}$ *ist eine Menge* $C \subseteq N := \{1, \ldots, n\}$ *ist eine* Überdeckung, *sofern* $a(C) > b$. *Eine Überdeckung ist* minimal, *sofern* $C \setminus \{j\}$ *für kein* $j \in C$ *Überdeckung ist.*

Beobachtung 7.22 *Ist* $C \subseteq N$ *eine Überdeckung, so ist die* Überdeckungsungleichung *("cover inequality")*

$$\sum_{i \in C} x_i \le |C| - 1$$

gültig für P_K.

Algorithmus 7.23
Eingabe: $N, a^\top x \le b$, $U \subseteq N$, *gültige Ungleichung* $\sum\limits_{i \in U} \alpha_i x_i \le \alpha_0$ *für* P_U
Ausgabe: Gültige Ungleichung $\sum\limits_{i \in N} \alpha_i \le \alpha_0$ *für* P_K.

- *Wähle* $\hat{i} \in N \setminus U$ *(wenn* $U = N$ *Ende).*
- *Setze* $w_{\hat{i}} := \max\{\sum\limits_{i \in U} \alpha_i x_i : \sum_{i \in U} a_i x_i \le b - a_{\hat{i}}, x_i \in \{0,1\} \forall i \in U\}$.
- *Setze* $\alpha_{\hat{i}} := \alpha_0 - w_{\hat{i}}$ *und* $U := U \cup \{\hat{i}\}$.

Beobachtung 7.24 *Sei* $U \subseteq N$ *und* $\sum_{i \in U} \alpha_i x_i \le \alpha_0$ *gültig für* P_U, *dann ist die Ungleichung* $\sum\limits_{i \in N} \alpha_i x_i \le \alpha_0$ *erzeugt durch Algorithmus 7.23 gültig für* P_K.

Kapitel 8

Separieren und Optimieren

Definition 8.1 *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt.*

- *Das Starke Optimierungsproblem (Strong Optimization Problem, SOPT) ist:*
  Finde zu gegebenem Vektor $c \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $y \in K$ welches $c^\top x$ auf K maximiert, oder finde $K = \emptyset$.

- *Das Starke Ungültigkeitsproblem (Strong Violation Problem, SVIOL) ist:*
  Entscheide zu gegebenem $c \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, ob $\{c^\top x\} \leq \gamma$ für alle $x \in K$ gilt, und falls nicht, finde $y \in K$ mit $c^\top y > \gamma$.

- *Das Starke Separierungsproblem (Strong Separation Problem, SSEP) ist:*
  Entscheide zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^n$, ob $y \in K$ gilt, und finde - falls nicht - einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c^\top y > \max\{c^\top x \mid x \in K\}$.

- *Das Starke Zugehörigkeitsproblem (Strong Membership, SMEM) ist:*
  Entscheide zu gegebenem $y \in K$ ob $y \in \mathbb{R}^n$.

- *Das Starke Gültigkeitsproblem (Strong Validity) ist:*
  Entscheide zu gegebenem $c \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, ob $\{c^\top y\} \leq \gamma$ für alle $y \in K$ gilt.

Definition 8.2 *Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales Polyeder und $\phi, \nu \in \mathbb{N}$ mit $\phi \geq n+1, \nu \geq n$.*

1. *P hat eine* Facettenkomplexität *(facet complexity) von höchstens ϕ, sofern es $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Q}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ und jede Facette hat Kodelänge höchstens ϕ.*

2. *P hat eine* Eckenkomplexität *(vertex complexity) höchstens ν, sofern es endliche Mengen $V, E \in \mathbb{Q}^n$ derart gibt, dass $P = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(E)$ gilt und die Kodelänge jedes Elements von $V \cap E$ höchstens ν ist.*

3. *Ein* wohlkodiertes *(well described) Polyeder ist ein Tripel (P, n, ϕ) wobei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder mit Facettenkomplexität höchstens ϕ ist. Die Kodelänge $< P >$ eines wohlkodierten Polyeders ist als $\phi + n$ definiert.*

4. *Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $< n > := 1 + \lceil \log_2(|n| + 1) \rceil$.*

5. *Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, \mathrm{ggT}(p,q) = 1, q \geq 1$ sei $< r > := < p > + < q >$.*

6. *Für $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ sei $< A > = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} < a_{i,j} >$.*

Vektoren werden als einspaltige Matrizen betrachtet.

Lemma 8.3 *Für $r, s \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{Q}^n$, bzw. $D \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ gilt:*

1. $|r| + 1 \leq 2^{<r>-1}$,
2. $< |rs| > \leq < r > + < s >$,
3. $< ||x||_1 > \leq 2 < x >$,
4. $||x|| \leq ||x||_1 \leq 2^{<x>-n} - 1$,
5. $|detD| \leq 2^{<D>-n^2} - 1$ *und*
6. $< |detD| > \leq 2 < D > -n^2$

Lemma 8.4 *Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$*

1. *Hat P eine Facettenkomplexität von höchstens ϕ, so hat es eine Eckenkomplexität von höchstens $4n^2\phi$.*
2. *Hat P eine Eckenkomplexität von höchstens ν, so hat es eine Facettenkomplexität von höchstens $3n^2\nu$.*

Korollar 8.5 *Sei P ein Polyeder mit Knotenkomplexität höchstens ν. Dann liegen alle Knoten von P in einer Kugel um 0 mit Radius 2^ν.*

Lemma 8.6 *Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein volldimensionales Polyeder mit Facettenkomplexität höchstens ϕ. Dann gilt* $\mathrm{vol}(P) \geq 2^{-8n^4\phi}$.

Definition 8.7 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und $a \in \mathbb{R}^n$.*

Dann ist $E(A, a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - a)^\top A^{-1}(x - a) \leq 1\}$ ein Ellipsoid *mit* Mittelpunkt *a.*

Satz 8.8 *Zu jedem Ellipsoid $E(A,a)$ und jedem von 0 verschiedenen rationalen Vektor c läßt sich in Polynomialzeit das volumenkleinste Ellipsoid $E(\bar{A},\bar{a})$ mit*
$E(A,a) \cap \{x \mid c^\top x \le c^\top a\} \subseteq E(\bar{A},\bar{a})$ *finden und es gilt*

$$\frac{\mathrm{vol}(E(A,a))}{\mathrm{vol}(E(\bar{A},\bar{a}))} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < e^{-\frac{1}{2(n+1)}}.$$

Algorithmus 8.9 (Ellipsoidmethode, vereinfacht)
Eingabe: $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$, wohlkodiertes Polyeder (P,n,ϕ) durch Separationsorakel (SEP) gegeben.
Ausgabe: Entweder

1. *ein Vektor $y \in P$ oder*
2. *ein P enthaltendes Ellipsoid $E(A,a)$ mit $\mathrm{vol}(E(A,a)) < \varepsilon$.*

Ablauf:

1. *Initialisierung: Setze $R := 2^{4n^2\phi}$, $a_0 := 0$, $A_0 := R^2 I$, $k := 0$ und $N := \lceil (2n+1)(|\log\varepsilon| + n|\log(2R)|)\rceil$.*
2. *Solange $k \le N$ ist, tue*
   (a) *Rufe SEP für $y := a_k$ auf.*
   (b) *Falls Rückgabe $y \in P$ halte mit Antwort 1.*
   Sonst liefert SEP $c \in \mathbb{Q}^n$ mit $c^\top y > \max\{c^\top x \mid x \in P\}$.
   (c) *Berechne kleinstes Ellipsoid $E(A_{k+1}, a_{k+1})$ mit*
   $$E(A_k, a_k) \cap \{x \mid c^\top x \le c^\top a_k\} \subseteq E(A_{k+1}, a_{k+1})$$
   und setze $k := k+1$.
3. *Gib $E(A_N, a_n)$ als Antwort 2 aus und halte.*

Satz 8.10 *Algorithmus 8.9 ist korrekt und hält nach einer Polynomialzahl von Schritten.*

Satz 8.11 (Grötschel, Lovász, Schrijver) *Es gibt einen Orakelpolynomialen Algorithmus, welcher folgendes Problem löst:*
Eingabe: Eine positive rationale Zahl ε *und eine umbeschriebene konvexe Menge* (K, n, R) *gegeben durch ein Orakel* SEP_K*, welches für beliebiges* $y \in \mathbb{Q}^n$ *und jede beliebige rationale Zahl* $\delta > 0$ *entweder feststellt, dass* $y \in S(K, \delta)$ *gilt, oder stattdessen einen Vektor* $c \in \mathbb{Q}^n$ *mit* $||c||_\infty = 1$ *derart liefert, dass* $\forall x \in K : c^\top x \leq c^\top y + \delta$.
Ausgabe: Entweder

- *Ein Vektor* $a \in S(K, \varepsilon)$ *oder*
- *eine positiv definite Matrix* $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ *und ein* $a \in \mathbb{Q}^n$ *mit* $K \subseteq E(A, a)$ *und* $\mathrm{vol}(E(A, a)) \leq \varepsilon$.

Dieser Algorithmus wird Zentralschnitt-Ellipsoidmethode *(central-cut ellipsoid method) genannt.*

Satz 8.12 *Zu gegebenem $a \in \mathbb{R}$ und $0 < \varepsilon < 1$ gibt es $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ und*

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}$$

Definition 8.13 *Zu gegebenem a sei $\alpha_0 = a$ und f_0 eine reellwertige Funktion mit $f_0(x) = x$. Weiter seien für $i = 1, 2, \ldots$ rekursiv definiert: $\alpha_i = \frac{1}{\alpha_{i-1} - \lfloor \alpha_{i-1} \rfloor}$ und $f_i(x) = f_{i-1}\left(\lfloor \alpha_{i-1} \rfloor + \frac{1}{x}\right)$.*

Beobachtung 8.14

1. $f_k(\alpha_k) = a$
2. $f_k(x) = \frac{g_k x + g_{k-1}}{h_k x + h_{k-1}}$, *wobei $h_{-1} = g_0 = 1$ und $h_0 = g_{-1} = 0$ gilt und sich die restlichen $g_.$ bzw. $h_.$ durch*

   $$g_{i+1} = g_i \alpha_i + g_{i-1}$$

   bzw.

   $$h_{i+1} = h_i \alpha_i + h_{i-1}$$

   ergeben.
3. $g_k h_{k-1} - g_{k-1} h_k = (-1)^k$.
4. *a liegt stets zwischen $f_k(0) = \frac{g_{k-1}}{h_{k-1}}$ und $f_{k+1}(0) = \frac{g_k}{h_k}$.*
5. $|f_{k+1}(0) - f_k(0)| = \frac{1}{h_k h_{k+1}}$ *und falls $h_{k+1} > \frac{1}{\varepsilon}$ mit $0 < \varepsilon < 1$ gilt, so gilt* $\max(\{|a - f_k(0)|, |a - f_{k+1}(0)|\}) < \frac{\varepsilon}{h_k}$.
6. $h_k \geq F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right)$

Algorithmus 8.15
Eingabe: $a \in R$, $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$
Ausgabe: Ganze Zahlen p, q *mit* $1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ *und* $|a - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}$

1. $\alpha_0 := a$, $g_{-1} := 0$, $g_0 := 1$,$h_{-1} := 1$, $h_0 := 0$, $i := 1$.

2. *Wiederhole:*

   (a) $g_i := g_{i-1}\lfloor\alpha_{i-1}\rfloor + g_{i-2}$
   $h_i := h_{i-1}\lfloor\alpha_{i-1}\rfloor + h_{i-2}$

   (b) *Falls* $\alpha_{i-1} \in \mathbb{Z}$, *halte mit* $p := g_i, q := h_i$

   (c) *Falls* $h_i > \frac{1}{\varepsilon}$, *halte mit* $p := g_i, q := h_i$.

   (d) $\alpha_i := \frac{1}{\alpha_{i-1} - \lfloor\alpha_{i-1}\rfloor}$

Satz 8.16 *Algorithmus 8.15 berechnet zu gegebenem* $a \in \mathbb{Q}$ *und* $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ *ganze Zahlen* p *und* q *mit* $0 < q < \frac{1}{\varepsilon}$ *und* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q}$ *in Polynomialzeit.*

Definition 8.17 *Ein* Orakelalgorithmus *ist eine Turingmaschine mit der Fähigkeit, Unterroutinen unbekannter Komplexität (*Orakel*) aufzurufen. Er wird* Orakel-polynomial *genannt, sofern es ein Polynom gibt, welches die Zahl der Schritte des Algorithmus in Abhängigkeit von der Eingabegröße beschränkt, und zwar ohne dass die Schritte innerhalb der Orakel gezählt werden, wobei die Schranke für alle möglichen Antworten der Orakel gelten soll.*

Satz 8.18 *Sei* (P, n, ϕ) *ein wohlkodiertes, beschänktes volldimensionales Polyeder, welches durch ein Orakel für SEP, VIOL oder OPT gegeben ist. Dann können die jeweils verbleibenden dieser drei Probleme in orakelpolynomialer Zeit gelöst werden.*