Einführung in die Diskrete Mathematik

Aufgabenblatt 9: Bäume

Aufgabe 1 (Bäume und Grade, 3 Punkte).

Zeigen Sie, dass ein Baum mit maximalem Knotengrad Δ mindestens Δ Knoten vom Grad 1 hat. Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 2 (Exzentrizität, Radius und Zentrum, 3 Punkte).

Es sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ gegeben. Für einen Knoten $u \in V$ ist dessen Exzentrizität definiert über

$$e(u) := \max\{d(u, v) \mid v \in V\},$$

wobei $d(u, v)$ den Abstand von u und v bezeichnet. Des Weiteren sind der Radius $r(G)$ und das Zentrum $Z(G)$ eines Graphen G definiert über

$$r(G) := \min\{e(v) \mid v \in V\}, \quad Z(G) := \{v \in V \mid e(v) = r(G)\}.$$

Zeigen Sie, dass das Zentrum eines Baumes entweder aus einem Knoten oder zwei benachbarten Knoten besteht.

Aufgabe 3 (Automorphismen von Bäumen, 2 Punkte).

Zeigen Sie, dass jeder Automorphismus eines Baumes mindestens einen Knoten oder eine Kante festhält.

Aufgabe 4 (Minimale Spannbäume, 3 Punkte).

Gegeben sei ein vollständiger Graph auf den Knoten $\{1, \ldots, n\}$ mit Kantengewichten $\omega(\{i, j\}) = i + j$. Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum und berechnen Sie dessen Gewicht. Ist der Baum eindeutig bestimmt?

Abgabetermin ist am 04.01.2021.