Einführung in die Diskrete Mathematik

Aufgabenblatt 1: Beweis- und Zählprinzipien

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Wie viele Wörter kann man durch Permutation der anschließenden Buchstabenfolgen erzeugen?

(a) ORANGE

(b) ANANAS

Aufgabe 2 (Schubfachprinzip, 4 Punkte).

Der ungarische Mathematiker Paul Erdős soll seinen Studenten zum Einstieg in ein Gespräch über Mathematik häufig die folgende Aufgabe gestellt haben. Gegeben sei eine Menge $A \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $|A| = n + 1$.

(a) Beweisen Sie, dass es immer zwei Zahlen in A gibt, sodass eine die andere teilt.

(b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass diese Behauptung für $|A| = n$ nicht gilt.

Aufgabe 3 (Kleiner Satz von Fermat, 5 Punkte).

Es sei $a \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und p eine Primzahl. Beweisen Sie den *kleinen Satz von Ferman*, dass heißt, zeigen Sie, dass

$$a^p - a$$

durch p teilbar ist. Betrachten Sie hierzu die Menge W der *nicht-konstanten* Wörter der Länge p die Sie mit einem Alphabet aus a Buchstaben bilden können.

(a) Wie viele Elemente hat W?

(b) Sei nun $s : W \to W$ der "shift"-Operator, welcher die Buchstaben eines Wortes zyklisch nach rechts verschiebt:

$$s(x_1 x_2 \cdots x_p) = x_p x_1 x_2 \cdots x_{p-1}.$$

Betrachten Sie die Relation $w \sim w' :\Longleftrightarrow s^n(w) = w'$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (hierbei bezeichnet s^n die n-fache hintereinander-Ausfürhung von s). Zeigen Sie dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Wie groß sind die Äquivalenzklassen von $\sim$?

(d) Beweisen Sie damit den kleinen Satz von Fermat.

Abgabetermin ist am 19.10.2020