

## Einführung in die Diskrete Mathematik Übung 5

1. Beweise die folgenden Gleichungen:
  - (a)  $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$ ,
  - (b) Falls  $f(n) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , dann  $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$ ,
  - (c)  $O(f(n)) + O(g(n)) = O(|f(n)| + |g(n)|)$ .
2. Sei  $f(n) = n^2$  ( $n$  gerade) und  $f(n) = 2n$  ( $n$  ungerade). Zeige, dass
  - $f(n) = O(n^2)$  gilt,
  - $f(n) = o(n^2)$  nicht gilt und
  - $n^2 = O(f(n))$  auch nicht gilt.
3. Sei  $T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \lg n$ . Zeige (für geeignete Zweierpotenzen)  $T(n) = O(\lg n \lg \lg n)$ .
4. Angenommen, wir haben einen Algorithmus, der für eine Eingabe der Länge  $n$ ,  $n$  Schritte aufweist, wobei der  $i$ -te Schritt  $i^2$  Operationen benötigt. Zeige, dass die Laufzeit des Algorithmus  $O(n^3)$  ist.
5. Die übliche Multiplikation zweier  $n \times n$ -Matrizen  $A$  und  $B$  erfordert  $\Theta(n^3)$  Flops (Fließkommaoperationen ‘\*’ und ‘+’), insbesondere 8 Multiplikationen für  $n = 2$ . Die folgende Methode von Strassen benötigt nur 7 Multiplikationen.  
Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ . Zeige, dass die Elemente von  $AB$  eine Summe von Termen  $\pm m_i$  ist, wobei  $m_1 = (a + d)(\alpha + \delta)$ ,  $m_2 = (c + d)\alpha$ ,  $m_3 = a(\beta - \delta)$ ,  $m_4 = d(\gamma - \alpha)$ ,  $m_5 = (a + b)\delta$ ,  $m_6 = (a - c)(\alpha + \beta)$ ,  $m_7 = (b - d)(\gamma + \delta)$ . Wieviele Additionen/Subtraktionen benötigt die normale Berechnung, wieviele Strassens Methode? Finde eine Methode, die  $\Theta(n^{\log_2 7})$  Flops für das Produkt zweier  $n \times n$ -Matrizen benötigt.  
Hinweis: Vierteile die Matrizen und verwende Rekursion mit  $n = 2$  als Start.