U. Schwerdtfeger 18. Dezember 2018

Übungen zur Konvexen Analysis
Blatt 6

Aufgabe 1:
Beweisen Sie den Klappstullensatz (**Sandwich Theorem**):

Seien $f \in \operatorname{Conv} X$, $g \in \operatorname{Conv} Y$, $A\colon X \to Y$ linear und es gebe $x \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} f$ mit $Ax \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} g$. Ferner gelte für $x \in X$ stets $f(x) \geq -g(Ax)$. Dann existiert eine affine Funktion h mit $f(x) \geq h(x) \geq -g(Ax)$ für alle $x \in X$.

Wie lässt sich das geometrisch im Fall $A = Id_X$ interpretieren?

Aufgabe 2:
Sei $C \subseteq X$ konvex und $f \in \operatorname{Conv} X$ mit $\operatorname{ri}\operatorname{dom} f \cap \operatorname{ri} C \neq \emptyset$ und f nach unten beschränkt auf C. Zeigen Sie: $\overline{x}$ löst $\inf_{x \in C} f(x)$ genau dann, wenn $0 \in \partial f(\overline{x}) + N(C, \overline{x})$. Dabei bezeichnet für $x \in C$

$$N(C,x) = \{x^* \in X \colon \langle x^*, y - x\rangle \leq 0 \ \forall y \in C\}$$

den Normalenkegel an C in x.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie:

a) Für $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $A\colon X \to Y$ linear stets gilt

$$\inf\{f(x) \mid x \in X,\ Ax = b\} \geq \sup\{\langle y^*, b\rangle - f^*(A^* y^*) \mid y^* \in Y\}$$

b) Ist $f \in \operatorname{Conv} X$ und $b \in \operatorname{ri} A(\operatorname{dom} f)$, dann gilt Gleichheit und das Supremum wird angenommen (falls es endlich ist).

Aufgabe 4:
Zeigen Sie die **Kettenregel**:

Sei $A\colon X \to Y$ linear und $g \in \operatorname{Conv} X$, so dass $A^{-1}(\operatorname{ri}\operatorname{dom} g) \neq \emptyset$. Ist $\partial(g \circ A)(x) \neq \emptyset$, dann gilt

$$\partial(g \circ A)(x) = A^* \partial g(Ax).$$

Aufgabe 5:

a) Essen und trinken Sie reichlich und verbringen Sie besinnliche Weihnachtstage.

b) Rutschen Sie gut ins neue Jahr.

Abgabe am 7. Januar in der Vorlesung