U. Schwerdtfeger 3. Dezember 2018

Übungen zur Konvexen Analysis
Blatt 5

Aufgabe 1:
Wir betrachten eine stückweise affine Funktion f mit

$$f(x) = \max\{\langle s_i, x\rangle + b_i,\ i = 1, \dots n\}$$

wobei $s_i \in X$ und $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie:

$$\partial f(x) = \operatorname{co}\{s_i\colon i \in A(x)\} \text{ wobei } A(x) = \{i\colon f(x) = \langle s_i, x\rangle + b_i\}$$

Was ist $\operatorname{dom} f^*$?

Aufgabe 2:
Seien X, Y Mengen und $L\colon X \times Y \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie

a) $\sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} L(x, y) \leq \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} L(x, y)$

b) $(x_0, y_0) \in X \times Y$ heißt Sattelpunkt von L, wenn für alle $x \in X, y \in Y$ gilt $L(x_0, y) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x, y_0)$. Zeigen Sie: Existiert ein Sattelpunkt, dann gilt in a) Gleichheit.

c) Sind (x_0, y_0) und (x_1, y_1) Sattelpunkte, dann auch (x_0, y_1) und (x_1, y_0).

d) Ist L konvex-konkav, d.h. $L(\cdot, y)$ konvex für alle y und $L(x, \cdot)$ konkav für alle x, und L differenzierbar mit $\nabla L(x_0, y_0) = 0$ dann ist (x_0, y_0) Sattelpunkt.

Aufgabe 3:
Gegeben sei das Optimierungsproblem (P) $\inf_{x\in X} f(x) + g(x)$ und dazu die Perturbationsfunktion $\Phi(x, y) = f(x) + g(x + y)$ (der Raum Y der Perturbationsvariablen ist hier gleich X)

a) Bestimmen Sie Φ^* und das durch Φ erklärte duale Optimierungsproblem (D) im Fall $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Gilt schwache/starke Dualität, sind (P), (D) normal/stabil?

b) f^* und g^* hatten wir für obige f und g in der Vorlesung bestimmt. Wie hängen hier f^*, g^* und Φ^* zusammen?

c) Drücken Sie allgemein Φ^* in Termen von f^* und g^* aus.

Abgabe am 10. Dezember in der Vorlesung