U. Schwerdtfeger 19 November 2018

# Übungen zur Konvexen Analysis
## Blatt 4

**Aufgabe 1:**
Zeigen Sie: $f^* = f$ gilt genau dann, wenn $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle$ ist.

**Aufgabe 2:**
Sei $Q$ eine symmetrische Matrix und $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx$. Bestimmen Sie $f^*$ und $\operatorname{dom} f^*$ in allen möglichen Fällen.

**Aufgabe 3:**

a) Zeigen Sie: $\operatorname{epi}_s(f_1 \square f_2) = \operatorname{epi}_s(f_1) + \operatorname{epi}_s(f_2)$

b) Stellen Sie die Infimalwertfunktion $h$ von $\Phi \in \operatorname{Conv} X \times Y$ als Bild unter einer linearen Abbildung $A$ dar.

**Aufgabe 4:**
Es seien $f, c_1, \ldots, c_n \in \operatorname{Conv} X$ mit $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} c_1 \cap \ldots \cap \operatorname{dom} c_n \neq \emptyset$. Ferner sei $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ gegeben durch

$$v(y) := \inf\{f(x)\colon x \in X \text{ und } c_i(x) \leq y_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

und $v(y) > -\infty$ für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ angenommen.
Zeigen Sie, dass $v \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$ ist.

**Aufgabe 5:**
Zeigen Sie, dass die Supportfunktion des Epigraphen einer Funktion $f$ gegeben ist durch

$$\sigma_{\operatorname{epi} f}(s, -u) = \begin{cases} uf^*\left(\frac{s}{u}\right), & \text{wenn } u > 0, \\ \sigma_{\operatorname{dom} f}, & \text{wenn } u = 0, \\ +\infty, & \text{wenn } u < 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 6:**
Vervollständigen Sie den Beweis von Proposition 3.

---

Abgabe am 26. November in der Vorlesung