U. Schwerdtfeger 5. November 2018

Übungen zur Konvexen Analysis
Blatt 3

Aufgabe 1:
Sei $f \in \operatorname{Conv}(X)$ mit $\operatorname{dom} f = X$ und sei $C \subseteq X$, $C \neq \emptyset$ und C kompakt und konvex.

a) Zeigen Sie dass $\max_{x \in C} f(x)$ auf $\operatorname{rbd} C$ angenommen wird.

b) Sei nun $f \in \operatorname{Conv}(X)$ mit $C = \operatorname{dom} f$ kompakt. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\max_{x \in C} f(x)$ auf $\operatorname{rbd} C$ angenommen wird.

Aufgabe 2:
Seien $f, g \in \operatorname{Conv}(X)$ mit $\operatorname{dom} f = X = \operatorname{dom} g$ und der Eigenschaft, dass die Funktion $h = f + g$ affin ist. Zeigen Sie, dass dann auch f und g affin sind.

Aufgabe 3:
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Zeigen Sie: ist die Hesse Matrix $H_f(x)$ positiv semidefinit für jedes $x \in C$, dann ist f konvex auf C.

Aufgabe 4:
Sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch $C = \{(x, y)\colon y \geq x^2\}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ durch $f(0, 0) = 1$, $f(x, y) = x^2/y$ wenn $(x, y) \in C$ und $f(x, y) = +\infty$ sonst. Zeigen Sie, dass f konvex ist und bestimmen Sie $\operatorname{cl} f$. Sind f bzw. $\operatorname{cl} f$ stetig auf C?

Aufgabe 5:
Zeigen Sie: Jede nichtleere, kompakte und konvexe Menge C ist die konvexe Hülle ihrer

a) (relativen) Randpunkte,

b) Extrempunkte.

Dabei heisst $x \in C$ Extrempunkt, wenn x nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte darstellbar ist,

$$\forall\, y, z \in C\colon x \in [y, z] \Rightarrow x = y \text{ oder } x = z.$$

Hinweis: Induktion über $\dim C$.

Abgabe am 12. November in der Vorlesung