

Übungsblatt 2

Ungleichungen

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten folgende Ungleichungen?
 - $-3x + 2 < 4x - 12$,
 - $-4(3 - x) \geq 6x$,
 - $\frac{3x - 1}{2x + 2} > 1$,
 - $\frac{x - 1}{x + 2} \leq 4$.
2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{(x - a)(x - b)}{x - c} > 0$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > b > c$ sind?
3. Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen $x^2 < m$ und $x^2 > m$, wobei $m \in \mathbb{R}$ beliebig ist.
4. Bestimmen Sie unter Verwendung von Aufgabe 3 die Lösungsmenge der Ungleichungen $x^2 + px + q > 0$ und $x^2 + px + q < 0$ für beliebige $p, q \in \mathbb{R}$.

Beträge

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$ folgender Gleichungen:
 - $|x - 2| = 10$,
 - $|2x + 1| = |x + 1| + 2$,
 - $|x - 1||x - 2| = 2$.
6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$ folgender Ungleichungen:
 - $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$,
 - $||x - 1| + x| + |x| \leq 3$,
 - $3 < |x + 2| \leq 5$.
7. Stellen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ folgender Ungleichungen graphisch dar:
 - $|x| + |y| \leq 1$,
 - $|x + y| \leq 1$,
 - $1 \leq |x - y| \leq 2$,
 - $|x - y|^2 + |x + y|^2 \leq 1$.

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

8. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:
 - $\left(\frac{b^{-5} x^2}{a^{-6} y^{-4}} \right) \left(\frac{a^4 b^{-3}}{x^{-1} y^{-2}} \right)$,
 - $\left[\left(\frac{1}{a^{-3}} \right)^{-2} \right]^{-3}$,
 - $\left[\left(\frac{x^{-3} y^{-2}}{z^{-3}} \right)^4 \right]^{-2}$,
 - $\frac{x + y}{z} \cdot \sqrt[3]{\frac{z^4 - z^3 x}{x^2 + 2xy + y^2}}$,
 - $\sqrt[3]{a^2} \sqrt{a \sqrt[4]{a^3}}$,
 - $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} \sqrt{\sqrt[6]{x}} \sqrt[12]{x^7}$,
 - $\frac{\sqrt[3]{a^4 b} \sqrt[3]{a^2 b^7} \sqrt[3]{a^2 b}}{\sqrt[3]{a^2 b^5}}$,
 - $\frac{\sqrt{a + b}}{\sqrt{a^4 - b^4}} \sqrt{a^2 + b^2}$,
 - $\sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}}$.

9. Vereinfachen Sie folgende Logarithmenausdrücke bzw. bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$:

a) $\log_k \sqrt[k]{m}$, b) $\log_y y^{-n}$, c) $\ln e^{-3}$, d) $\log_x \frac{1}{u} = -1$, e) $\log_4 x = \frac{1}{2}$.

10. Fassen Sie zusammen:

a) $\log_a u - \log_a v + \log_a w$, b) $x \ln u + y \ln v$, c) $\frac{1}{3} \log_k a - \frac{1}{5} \log_k b + \frac{2}{3} \log_k c$.

Wurzel-, Exponential-, Logarithmengleichungen

11. Lösen Sie folgende biquadratische Gleichungen in \mathbb{R} :

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, b) $10x^4 - x^2 = 21$.

12. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen?

a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$, b) $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 5$,

c) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+3} = 0$, d) $4 \sqrt[3]{6x-1} = -8$,

e) $\sqrt{5x-4} = 1 + \sqrt{3x+1}$, f) $e^{x^2-2\sqrt{x^2}} - e^{-1} = 0$,

g) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$, h) $10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 100 = 0$,

i) $3^{4x^2-7x-14} \leq 9^{x^2-3x-4}$, j) $\frac{\ln(35-x^3)}{\ln(5-x)} = 3$,

k) $\lg \left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}} \right) - 2 = \frac{1}{4} \lg 16 - \sqrt{x + \frac{1}{4}} \lg 4$.

13. Lösen Sie folgende Formel nach n auf:

$$K q^n - \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0.$$

Partialbruchzerlegung

14. Führen Sie die Partialbruchzerlegung aus:

a) $\frac{2x+1}{(x+2)(x-5)}$, b) $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, c) $\frac{x^{10}}{x^2+x-2}$, d) $\frac{1}{x^4-1}$.