Übung 1

1. Geben Sie zu folgenden Schlüssen die Umkehrung an und überprüfen Sie wenn möglich ob die Schlüsse bzw. Umkehrungen korrekt sind.
   (a) Wenn der Mond aus grünem Käse besteht, ist $3 + 4 = 7$.
   (b) Wenn der Mond aus grünem Käse besteht, ist $3 + 4 = 8$.
   (c) Wer nicht will, der hat.
   (d) Wer anderen eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.
2. Drücken Sie formal aus:
   (a) In jeder nichtleeren Teilmenge der natürlichen Zahlen gibt es eine kleinste natürliche Zahl.
   (b) Die Menge aller natürlichen Zahlen mit genau zwei Teilern heiße $\mathbb{P}$.
   (c) Die Summe der ersten 100 positiven ganzen Zahlen ist 5050.
   (d) Das Produkt der ersten 20 ungeraden natürlichen Zahlen.
3. Was bedeuten folgende formalen Ausdrücke?
   (a)
   $$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{n\} : nm = n + m$$
   (b)
   $$S_n := \sum_{i=1}^{n} n^2$$
   (c)
   $$\mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=2}^{p} \{k \in \mathbb{N} | \frac{k}{i} \in \mathbb{N}\}$$
4. Bringen Sie folgende Ausdrücke in eine geschlossene Form:
   (a)
   $$\frac{1}{4} \sum_{i \in \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}} g(i)$$
   (b)
   $$\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+2}$$
   (c)
   $$\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i}$$
   (d)
   $$\bigcap_{i=1}^{5} \{n \in \mathbb{N} | \frac{n}{7i} \in \mathbb{N}\}$$
5. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme und interpretieren Sie die Lösungen geometrisch:
   (a)
   $$\begin{aligned} 5a + 2b - 3c &= 5 \\ 4a - c &= 2 \\ 3a - b + 5c &= 10 \end{aligned}$$
   (b)
   $$\begin{aligned} 2x + 4y &= 2 \\ 3x - y &= 10 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} r+s+t &= 3 \\ r-s+2t &= 2 \\ 3r+s+4t &= 8 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} r+s+t &= 3 \\ r-s+2t &= 2 \\ 3r+s+4t &= 1 \end{aligned}$$

6. Bringen Sie die vorangegangenen Gleichungssysteme in die Form $Ax = b$, wobei A eine gegebene Matrix, und b ein gegebener Vektor ist.

7. Erinnern Sie sich an das Pascalsche Dreieck der Binomialkoeffizienten!

   (a) Wie kann man $\binom{n}{k}$ aus den Binomialkoeffizienten aus der vorhergehenden Zeile ermitteln?

   (b) Nutzen Sie diese Beziehung, um durch vollständige Induktion zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n-k)} = (a+b)^n$$

   (c) Wie sieht entsprechend ein indirekter Beweis mit Extremalprinzip aus?

8. Berechnen Sie:

   (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   (c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   (d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   (e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   (f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Bringen Sie auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 12 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & -9 \\ 2 & 6 & -8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 1

Abgabe: Freitag, 19.10.2012

1. Vereinfachen Sie

$$\frac{(a-1)\sum_{k=1}^{n} a^k}{a-1}$$

   (a) durch Kürzen und
   (b) durch Ausmultiplizieren und
   (c) beweisen Sie die dadurch entstehende Gleichung durch vollständige Induktion nach n.

2. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ 4x - y &= 1 \\ x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

   Lösen Sie dieses Gleichungssystem und interpretieren Sie es geometrisch als

   (a) Suche nach geeigneten Linearkombinationen von Vektoren und
   (b) Suche nach dem Schnittpunkt von Geraden.

   Machen Sie zu jeder dieser Interpretationen eine Skizze.

3. Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Bringen Sie folgende Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

Übung 2

10. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

    (a) Die Anzahl der Dreiecke in jeder Triangulation eines n-Eckes ist stets $n-2$.

    (b) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : ggT(a,b) = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z} : \alpha a + \beta b = 1$

    (c) Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist gleich n^2.

11. Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen, also:

$$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \mid \forall t \in \mathbb{N} : (t|p \Rightarrow t \in \{1, p\})\}$$

    Sei weiter:

$$\begin{aligned} A(p) &= p \in \mathbb{P} && (1) \\ B(p) &= p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} && (2) \\ C(p) &= \forall a, b \in \mathbb{N} : (p = ab \Leftrightarrow (a = 1 \vee b = 1)) && (3) \\ D(p) &= \forall a, b \in \mathbb{Z} : (p|ab \Leftrightarrow (p|a \vee p|b)) && (4) \end{aligned}$$

    (a) Was bedeutet dann folgender Ausdruck?

$$A(p) \Leftrightarrow B(p) \wedge C(p) \Leftrightarrow B(p) \wedge D(p)$$

    (b) Beweisen Sie ihn!

12. Finden Sie ein lineares Gleichungssystem, welches die folgende Gerade g als Lösungsmenge hat!

$$g := \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right) + t \left(\begin{array}{c} 4 \\ -6 \\ 3 \end{array} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

13. In einem Schiebefix sind in einem 4×4 - Rahmen 15 mit 1 bis 15 durchnumerierte Einheitsquadrate sowie eine ebensogroße Lücke überschneidungsfrei angeordnet. Ein Zug besteht jeweils darin, ein zur Lücke über eine Kante benachbartes Einheitsquadrat genau auf diese Lücke zu schieben, wodurch an seinem ursprünglichen Platze natürlich diese Lücke wieder entsteht. Ziel des Spieles ist, die 15 Einheitsquadrate und die Lücke mittels dieser Züge in vier Zeilen so anzuordnen, dass die Lücke unten rechts liegt, und die Nummern der Einheitsquadrate in üblicher Lesereihenfolge die Nummern 1 bis 15 in ihrer natürlichen Reihenfolge sind.

    (a) Was hat das mit Permutationen zu tun?

    (b) Gibt es Startanordnungen, bei denen dieses Ziel nicht erreichbar ist?

14. Seien A, B Mengen und $R \subseteq A \times B$. Für $X \subseteq A$ setzen wir $B(X) := \{b \in B | (X, b) \subseteq R\} \subseteq B$, wobei natürlich $(X, b) = \{(x, b) | x \in X\}$. Analog sei $A(Y) := \{a \in A | (a, Y) \subseteq R\}$ für $Y \subseteq B$. Im folgenden sei immer $X, X' \subseteq A$. Zeigen Sie:

    (a) $X \subseteq X' \Rightarrow B(X) \supseteq B(X')$,

    (b) $X \subseteq A(B(X))$,

    (c) $B(X) = B(A(B(X)))$.

    Seien nun $\mathcal{A} := \{X \subseteq A \mid \exists\, Y \subseteq B : X = A(Y)\}$ und analog $\mathcal{B} := \{Y \subseteq B \mid \exists\, X \subseteq A : Y = B(X)\}$.

    (d) Zeigen Sie, daß dann die Abbildungen $A(-) : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ und $B(-) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zueinander inverse Bijektionen sind.

Hausaufgabe 2

Abgabe: Freitag, 2.November 2012

5. Seien M, N Mengen und $\iota : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß ι genau dann injektiv ist, wenn für jede Menge L und zwei beliebige Abbildungen $f, g : L \to M$ aus $\iota f = \iota g$ schon $f = g$ folgt. Dual dazu ist eine Abbildung $\pi : M \to N$ genau dann surjektiv, wenn für jede Menge O und zwei beliebige Abbildungen $f, g : N \to O$ aus $f\pi = g\pi$ schon $f = g$ folgt.

6. Wenn F_n die Fibonacci-Zahlen sind (definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$) so gilt die folgende Gleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

7. (a) Was bedeutet "Die Matrixmultiplikation ist bilinear."?
   (b) Beweisen Sie, dass dies zutrifft!

8. Eine Matrix ist
   - voll besetzt, wenn Null als Eintrag nirgendwo vorkommt und
   - nilpotent, wenn eine Potenz von ihr die Nullmatrix ist.

   Geben Sie eine voll besetzte nilpotente Matrix an und beweisen Sie, dass diese nilpotent ist.

9. Eine Äquivalenzrelation auf Mengen ganzer Zahlen $M \subseteq \mathbb{Z}$ ist die Kongruenz modulo 3:
$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ 3) :\Leftrightarrow \frac{a-b}{3} \in \mathbb{Z}$$
   Beweisen Sie dies und bestimmen Sie die zugehörigen Äquivalenzklassen der folgenden Menge!
   $M = \{-7, 6, 13, 23, 44, 21, 12, -13, -15, -2022, 23456789\}$

10. Programmieren Sie Algorithmus 1.2 aus der Vorlesung in "matlab" und wenden Sie ihn für folgende Eingabe an:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$
$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \tag{6}$$
    Hinweis: Abzugeben ist der Quelltext des matlab-Programmes und das Ergebnis der Berechnung als E-Mail-Anhang an folgende Adresse.

    `frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de`

Übung 3

15. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $N_n := \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$ sowie $P_n := \binom{N_n}{2}$ die Menge aller zweielementigen Teilmengen der Menge N_n. Beweisen Sie:

    (a) $\sigma \in S_n \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in P_n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$

    (b) $\tau \in S_n \Rightarrow \{i,j\} \mapsto \{\tau(i), \tau(j)\}$ ist Bijektion $P_n \to P_n$

    (c) $\operatorname{sgn}(\sigma \cdot \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$

16. Beweisen Sie:

    (a) $a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

    (b) $a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

    (c) $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$

    (d) $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$

    (e) $a \to b \Leftrightarrow b \vee \neg a \Leftrightarrow \neg b \to \neg a \Leftrightarrow \neg(a \wedge \neg b)$

17. Berechnen Sie die folgenden Produkte von Permutationen und geben Sie die inversen Permutationen der Ergebnisse an! (Beachten Sie dabei, daß wir Permutationen wie alle Abbildungen von rechts nach links ausführen.)

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

    (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

    (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

    Schreiben Sie die Ergebnisse aus c) und d) als Produkte von Transpositionen!

18. Weisen Sie nach, dass in jeder kommutativen Gruppe die Linksnebenklassen und die Rechtsnebenklassen die gleiche Klasseneinteilung darstellen.

19. Geben Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen an, die aus 2, 3 bzw. 4 Elementen bestehen.

20. Für $Z := \mathbb{N}^2$ sei R_z die Äquivalenzrelation

    $$(n_1, m_1) \sim_Z (n_2, m_2) :\Leftrightarrow n_1 + m_1 = n_2 + m_2$$

    Zeigen Sie: Die Funktion $\bar{f} : \mathbb{N}^2 / \sim_Z \to \mathbb{Z}, [(n,m)] \mapsto n - m$ ist wohldefiniert und bijektiv.

    Hinweis: Skizze!

Hausaufgabe 3

Abgabe: 16. November 2012

11. Seien $a = 1201$ und $b = 1011$.
    (a) Bestimmen Sie ganze Zahlen α und β derart, dass $\alpha a + \beta b = 1$, sofern es solche Zahlen gibt.
    (b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 3603 und 3033.
    (c) Gibt es ganze Zahlen γ und δ mit $3603\gamma + 3033\delta = \mathrm{ggT}(3033, 3603)$?

12. Finden Sie ein lineares Gleichungssystem, welches die folgende Gerade h als Lösungsmenge hat!

$$h := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \middle| w \in \mathbb{R} \right\}$$

13. Sei U die durch $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte zyklische Untergruppe von S_3.
    (a) Bestimmen Sie die Linksnebenklassen von S bezüglich U.
    (b) Bestimmen Sie die Rechtsnebenklassen von S bezüglich U.

14. Es seien G eine Gruppe und $\varphi : G \to G, x \mapsto x^2$. Beweisen Sie, dass φ genau dann ein Homomorphismus ist, wenn G eine kommutative Gruppe ist.

15. Erstellen Sie ein Matlab-Programm `function [P] = erstellePM(v)`, das zu gegebenem reellem Vektor v eine Permutationsmatrix P derart zurückgibt, dass Pv die gleichen Einträge wie v aufweist, allerdings der Größe nach geordnet, und testen Sie das Programm an zufälligen Vektoren!

    Hinweise: Die `sort` Funktion kann dazu verwendet werden. Abzugeben ist der Quelltext des matlab-Programmes als E-Mail-Anhang an folgende Adresse. `frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de`

Übung 4

21. Was bedeutet die Multiplikation mit einer komplexen Zahl z geometrisch, wenn
    (a) $z = \bar{z}$;
    (b) $\frac{1}{z} = \bar{z}$; bzw.
    (c) $|z| = r$ und $arg(z) = \varphi$?

22. Das Polynom $p(z) = z^5 - 10z^4 + 64z^3 - 176z^2 + 228z - 136$ hat Nullstellen $z_1 = 2$ und $z_2 = 3 + 5\mathbf{i}$. Zerlegen Sie $p(z)$ in Linearfaktoren!

23. Wir betrachten S_3.
    (a) Welche Untergruppen hat S_3?
    (b) Bei welchen dieser Untergruppen handelt es sich um einen Normalteiler von S_3?
    (c) Welche dieser Untergruppen ist die alternierende Gruppe A_3?
    (d) In welche Isomorphieklassen zerfallen die Untergruppen von S_3?
    (e) Wie sieht die Automorphismengruppe zu S_3 aus?

24. Geben Sie je ein Beispiel für φ an, wenn φ
    (a) ein Gruppenhomomorphismus, der weder ein Gruppenmonomorphismus noch ein Gruppenepimorphismus ist;
    (b) ein Gruppenmonomorphismus, der kein Gruppenepimorphismus ist;
    (c) ein Gruppenepimorphismus, der kein Gruppenisomorphismus ist;
    (d) ein Gruppenisomorphismus, der kein Gruppenautomorphismus ist; bzw.
    (e) ein Gruppenautomorphismus, der nicht die Identität ist,

    sein soll. Wie sehen die jeweiligen Kerne aus?

25. Jedes Element von S_n hat keinen, einen oder mehrere Fixpunkte. Wie groß ist die Summe aller Fixpunktzahlen von Elementen von S_n?

26. Definieren Sie folgende Begriffe und geben Sie je ein Beispiel:
    (a) Integritätsbereich
    (b) Körper
    (c) Polynomring
    (d) Teiler
    (e) assoziiert
    (f) Primfaktorzerlegung
    (g) Linearfaktor
    (h) Nullstelle
    (i) Vielfachheit

Hausaufgabe 4

Abgabe: 30. November 2012

16. Zeigen Sie: A_4 ist isomorph zur Gruppe der Permutationen der Ecken eines regelmäßigen Tetraeders bei Drehung um
    - eine der vier Drehachsen durch eine Ecke und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite
    - eine der drei Drehachsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten.
17. Es sei $z = x + \mathbf{i}y = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ mit $x, y \in \mathbb{R},\ \varphi \in [-\pi, \pi),\ r > 0$ eine beliebige komplexe Zahl. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen: $\overline{z}$, $\frac{1}{\overline{z}}$, z^2, $\mathbf{i}z$, $z\overline{z}$, $\left|\frac{z}{\overline{z}}\right|$.
18. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist.
19. Sei M die Menge reeller Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß M mit den üblichen Operationen zu einem Ring wird. Betrachten Sie dann die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \to M;\ (a + b\mathbf{i}) \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß φ ein Ring-Isomorphismus ist. Was folgt daraus für die Struktur von M?
20. Erstellen Sie ein Matlab-Programm `function[R] = Polynomdivision(P,Q)`, das zu in Vektorform gegebenen reellen Polynomen P und Q ein Polynom R kleineren Grades als Q in Vektorform derart zurückgibt, dass Q ein Teiler von $P - R$ ist.

    Hinweis: Abzugeben ist der Quelltext des matlab-Programmes als E-Mail-Anhang an folgende Adresse.

    `frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de`

Übung 5

27. Erklären Sie folgende Begriffe:

    (a) Vektorraum und Untervektorraum
    (b) Erzeugendensystem
    (c) Basis
    (d) lineare Hülle
    (e) span
    (f) lineare Unabhängigkeit
    (g) Polynom

28. Sei V_o die Menge aller Ortsvektoren $\overrightarrow{OP}$ in der Ebene. Welche der folgenden Teilmengen von V_o bilden Vektorräume über $\mathbb{R}$?

    (a) $\{\overrightarrow{OP} \in V_o : P \text{ liegt auf einer gegebenen Geraden}\}$,
    (b) $\{\overrightarrow{OP} \in V_o : P \text{ liegt im ersten Quadranten}\}$,
    (c) $\{\overrightarrow{OP} \in V_o : P \text{ liegt im ersten oder dritten Quadranten}\}$.

29. $\mathbb{C}$ kann unter anderem als Vektorraum $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ oder als Vektorraum $\mathbb{C}_\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$ aufgefasst werden. Zeigen Sie, daß die komplexe Konjugation ($a + b\mathbf{i} \mapsto a - b\mathbf{i}$) ein Vektorraum-Isomorphismus von $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ ist. Ist sie dies auch als Abbildung von $\mathbb{C}_\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}_\mathbb{C}$? Oder von $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}_\mathbb{C}$? Ist sie ein Ringisomorphismus?

30. Entscheiden Sie, ob die angegebenen Gruppen als Vektorräume über dem jeweiligen Körper aufgefaßt werden können:

    (a) $(\mathbb{C}, +)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
    (b) $(\mathbb{Z}, +)$ über $\mathbb{F}_3$
    (c) Die Potenzmenge einer Menge M mit der Operation Δ (symmetrische Differenz) über $\mathbb{F}_2$.

31. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Unterräume der jeweiligen Vektorräume sind! (Dabei heißt M_K, daß M als Vektorraum über K aufgefaßt wird.)

    (a) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\} \subset \mathbb{C}_\mathbb{R}$
    (b) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 0\} \subset \mathbb{C}_\mathbb{R}$
    (c) $\{a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C} \ : \ a - b = 2\} \subset \mathbb{C}_\mathbb{R}$
    (d) $\{a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C} \ : \ 2a = 5b\} \subset \mathbb{C}_\mathbb{C}$

32. Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller Polynome mit komplexen Koeffizienten über $\mathbb{C}$. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathcal{P}$?

    (a) $\{p \in \mathcal{P} : p(0) = 0\}$,
    (b) $\{p \in \mathcal{P} : p(0) = 1\}$,
    (c) $\{p \in \mathcal{P} : 2p(0) - 3p(1) = 0\}$,

33. Sei $G = (N, E)$ ein Graph mit endlicher Knotenmenge N und Kantenmenge E.

    Eine Kantenmenge $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\} \subseteq E$ heißt *Kreis* in G, falls die Knoten $v_i, i = 1, \ldots, n$ paarweise verschieden sind. Setze $\mathcal{C} = \{C \subseteq E : C \text{ ist Kreis in } G\} \subseteq 2^E$.

    (a) Zeigen Sie $\operatorname{span}_{\mathbb{F}_2}(C)_{C \in \mathcal{C}} = \mathcal{Z}$ (der Zyklenraum)!
    (b) Finden Sie einen Zyklus Z im Gitter $(\mathbb{Z}^2, \{(x, y) : |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 1\})$ an Stelle von G mit $Z \notin \operatorname{span}_{\mathbb{F}_2}(C)_{C \in \mathcal{C}}$!

Hausaufgabe 5

Abgabe: 14. Dezember 2012

21. Das Polynom $p(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 36z^2 + 83z + 195$ hat Nullstellen $z_1 = -3$ und $z_2 = 2 - 3\mathbf{i}$. Zerlegen Sie $p(z)$ in Linearfaktoren!

22. Beweisen oder widerlegen Sie, daß die angegebenen Gruppen als Vektorräume über dem jeweiligen Körper aufgefaßt werden können:

    (a) $(\mathbb{C}, +)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

    (b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über $\mathbb{F}_2$

23. Gegeben sei der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit den üblichen Operationen $+$ und $\cdot$. Wir definieren in der Menge eine neue Addition
$$\oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \oplus b := \sqrt[3]{a^3 + b^3}$$
und eine Multiplikation mit Skalaren
$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad c \odot a := a \cdot \sqrt[3]{c}$$
Überprüfen Sie, ob $\mathbb{R}$ mit der Addition $\oplus$ und der Multiplikation mit Skalaren $\odot$ ein Vektorraum über dem Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist.

24. Sind die folgenden Elemente linear unabhängig im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$?

    - $(1, 2, 1),\ (2, 8, 6),\ (1, 3, 2),$
    - $(2, 0, 1),\ (1, 3, 0),\ (0, -1, 3),\ (0, -3, 0),$
    - $(1, 4, -2, 3),\ (5, 0, 1, -2),\ (-2, 3, 0, 1),$
    - $(1, 2, 3, 4),\ (1, 4, 9, 6),\ (4, 5, 8, 3),\ (4, 3, 2, 1)$

25. Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller Polynome mit komplexen Koeffizienten über $\mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ fest gegeben. Ist $\{p \in \mathcal{P} : p(1) + p(2) + \ldots + p(k) = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{P}$?

Übung 6

34. Erklären Sie folgende Begriffe

   (a) Dimension eines Vektorraumes,
   (b) Summe und direkte Summe von Vektorräumen,
   (c) affiner Unterraum und Hyperebene
   (d) affine Hülle und Affinkombination
   (e) lineare Abbildung
   (f) Dualraum
   (g) Schnitt

35. Man überprüfe, ob folgende Funktionensysteme aus der Menge $\mathcal{F}[0,1]$ aller Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ linear unabhängig sind:

   (a) $\{1, e^x, e^{2x}\}$,
   (b) $\{1, cos(x), cos(2x), (cos(x))^2\}$,
   (c) $\{1, sin(x), cos(x)\}$.

36. Seien a, b, c, d beliebig gegebene reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass die Menge aller Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

   einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet.

37. Untersuchen Sie, ob folgende Operatoren linear sind.

   (a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$,
   (b) $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$,
   (c) $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; (x_i)_{i=1}^n \mapsto (|x_i|)_{i=1^n})$,
   (d) $D : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]; f \mapsto xf$,
   (e) $E : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]; f \mapsto f \circ 2x + 4$,
   (f) $F : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{2n}[x]; f \mapsto f \circ x^2$,
   (g) $G : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]; f \mapsto f'$,
   (h) $H : \mathcal{F}[0,1] \to \mathcal{F}[0,1]; f \mapsto f(0)$.

   Welche der Operatoren sind ein Vektorraum-Isomorphismus? Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{K}_n[x]$ die Menge aller Polynome vom Grade $\leq n$ über dem Körper $\mathbb{K}$.

38. Für folgenden Teilmengen $S \subseteq \mathbb{R}^3$ gebe man die lineare Hülle von S sowie deren Dimension an:

   (a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
   (b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,
   (c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
   (d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, x + y = 1 \right\}$,
   (e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

39. Man finde zwei Untervektorräume $U, V \subseteq \mathbb{K}^\infty$ so, dass $\dim U = \infty$, $\dim V = \infty$ und $\dim U \cap V = 3$ gilt.

40. Sind folgende Operatoren A linear auf $\mathbb{R}^n$?

   (a) $Ax = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, 0, 0, \ldots, 0 \right), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$,
   (b) $Ax = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$,
   (c) $Ax = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$,
   (d) $Ax = \big((x_1 + 1)^2 - (x_1 - 1)^2, 0, 0, \ldots, 0 \big)$,
   (e) $Ax = (\alpha, 0, 0, \ldots, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

   wobei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist. Geben Sie die Matrixdarstellungen $[A]$ der linearen Operatoren A bzgl. der kanonischen Basis an!

Hausaufgabe 6

Abgabe: 11. Januar 2013

26. Seien a, b, c, d beliebig gegebene reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass die Menge aller Zahlenpaare (u, v), für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned}$$

eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat, einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet.

27. Untersuchen Sie, ob die Abbildung

$$f : \mathbb{C}_2[t] \to \mathbb{C}^3, at^2 + bt + c \mapsto (a - c, b - c, a + c)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist!

28. Geben Sie zwei verschiedene Basen in $\mathbb{R}^4$ an, die gleichzeitig $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthalten!

29. Untersuchen Sie, ob folgende Operatoren linear sind:

   (a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (x, y, z) \mapsto a \ (a \in \mathbb{R}^3$ konst.),

   (b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (x, y, z \mapsto (x, y, z) + a \ (a \in \mathbb{R}^3$ konst.),

   (c) $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + 2y$,

   (d) $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; (x_i)_{i=1}^n \mapsto \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i, 0, \ldots, 0 \right), (a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$.

30. *SET* ist ein bekanntes Kartenspiel. Falls Sie es nicht kennen, informieren Sie sich z.B. unter

    http://www.ravensburger.de/spielanleitungen/ecm/Spielanleitungen/Set.pdf

    oder

    http://de.wikipedia.org/wiki/Set!

    über die Spielregeln. Zeigen Sie, daß sich die Menge der Spielkarten als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_3$ auffassen läßt. Was entspricht den SETs in dieser geometrischen Deutung? (Tipp: Betrachten Sie zunächst das entsprechende Spiel mit nur zwei Eigenschaften und fertigen Sie eine Skizze an.) Geben Sie nun an, wie viele SETs eine gegebene Karte enthalten! **Zusatz:** Können Sie sich überlegen oder recherchieren, was die maximale Anzahl von Karten ist, die kein SET enthalten?

Übung 7

41. Erklären Sie die folgenden Begriffe und geben Sie jeweils Beispiele an:

    (a) affin unabhängig
    (b) duale Basis,
    (c) Annullator,
    (d) homogenes lineares Gleichungssystem

42. Seien U, V und W Vektorräume über K und $\circ : \mathrm{Hom}_K(V,W) \times \mathrm{Hom}_K(U,V), \circ(F,G) := F \circ G$ die Nacheinanderausführung zweier K-linearer Abbildungen.

    Weisen Sie nach, dass $\circ$ bilinear ist.

43. Sei
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$
    und $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$.

    (a) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}F$ und $\mathrm{Im}F$!
    (b) Überprüfen Sie die Dimensionsformel an diesem Beispiel.
    (c) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$, die eine Basis von $\mathrm{Ker}F$ enthält.

44. Sei $B := \left(x^2+1, x^2+x, x^2+2x+1\right)$ gegeben.

    (a) Zeigen Sie, dass B eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes aller reellen Polynome vom Grade ≤ 2 ist.

    Welche der Basisvektoren kann man gegen

    (b) x^2,
    (c) $3x^2+2x$,
    (d) $2x^2+2x$, bzw.
    (e) $x+1$

    austauschen?

45. Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V := \mathbb{C}[T]$, den Unterraum $U := (T^4-1) := \{f \in V : (T^4-1)|f\}$ und den Quotientenraum $W := V/U$ mit der kanonischen Projektion $\pi : V \to W$, $f \mapsto \overline{f}$.

    (a) Zeigen Sie, dass $\{\overline{T^k}|k = 0,\ldots,3\}$ eine Basis B von W bildet
    (Tipp: Polynomdivision).

    Sei nun $F : V \to \mathbb{C}^4$, $f \mapsto (f(1), f(\mathbf{i}), f(-1), f(-\mathbf{i}))^t$.

    (b) Zeigen Sie, dass F linear ist und $\ker F = U$ ($\supseteq$ ist leicht!).

    Wegen 45b ist $\overline{F} : W \to \mathbb{C}^4$, $\overline{f} \mapsto F(f)$ wohldefiniert.

    (c) Stellen Sie $\overline{F}$ bzgl. der Basis B von W und der kanonischen Basis von $\mathbb{C}^4$ dar.
    (d) Zeigen Sie (z.B. mittels 45c), dass $\overline{F}$ ein Isomorphismus ist.
    (e) Berechnen Sie das Inverse der Darstellungsmatrix von $\overline{F}$.

46. Bei den (evtl. bekannten) Formeln für $\sum_{k=1}^n k^d$, $d = 0,1,2$ kommt jeweils ein Polynom in n vom Grad $d+1$ heraus.

    (a) Versuchen Sie zunächst, dies für allgemeines $d \in \mathbb{N}$ zu beweisen.

    Sei nun die Abbildung $\Delta : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ definiert durch $f(T) \mapsto f(T) - f(T-1)$. Für $d \geq 0$ sei U_d die Menge der Polynome aus $\mathbb{R}[T]$ vom Grade höchstens d.

    (b) Zeigen Sie: Δ ist linear und $\Delta(U_{d+1}) \subseteq U_d$.
    (c) Bestimmen Sie $\ker\Delta$ und seine Dimension. Zeigen Sie damit $\Delta(U_{d+1}) = U_d$.
    (d) Sei nun $g \in U_d$. Zeigen Sie, dass es ein $f \in U_{d+1}$ gibt, so daß $\sum_{k=1}^n g(k) = f(n)$.

47. Beschreiben Sie die Menge aller linearen Abbildungen aus $(\mathbb{R}^3)^*$, die $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ annullieren.

Hausaufgabe 7

Abgabe: 25.1.2013

31. Wir betrachten $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass paarweise verschiedene komplexe Zahlen z_1, z_2 und z_3 genau dann affin abhängig sind, wenn $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \in \mathbb{R}$.

32. Sei $B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ gegeben.

    (a) Zeigen Sie, dass B eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

    Welche der Basisvektoren kann man gegen

    (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, bzw. (e) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

    austauschen?

33. Es seien $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    (a) Ergänzen Sie die Vektoren a und b zu einer Basis im $\mathbb{R}^3$.

    (b) Geben Sie alle Vektoren $c \in \mathbb{R}^3$ an, die zusammen mit a und b eine Basis bilden.

34. Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 und $F : V \to \mathbb{R}, v \mapsto v(7)$ eine Funktion.

    (a) Zeigen Sie, dass F linear ist.

    (b) Bestimmen Sie $N := \mathrm{Ker} F$.

    (c) Geben Sie je eine Basis für V, N und $V/_N$ an!

    (d) Überprüfen Sie an diesem Beispiel Satz 5.15 c).

35. Bestimmen Sie den Annullator zu $\{x^2 + 3x + 1, x^3 + 2x + 1, 32x + 1\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum V aller reellen Polynome vom Grade höchstens 3.

    Hinweis: Die Elemente des Dualraumes von V vermöge einer geeigneten Basis von V zunächst allgemein darzustellen, könnte hilfreich sein.