Aufgabe 92

„$\Leftarrow$" Siehe HA 12, A.61. Alternativ wie in der Übung:

Sei $A = XY$, $X \in K^{m \times r}$, $Y \in K^{r \times n}$, $\operatorname{Rang} X = \operatorname{Rang} Y = r$

<u>Z.z.:</u> $\operatorname{Rang} A = r$. X lässt sich durch Multiplikation von links mit $S \in GL(m, K)$ auf Zeilenstufenform bringen:

$$SX = \begin{bmatrix} a_1 & & * \\ 0 & a_2 & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots\; 0 & a_r \\ 0 & \cdots\; 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\; 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Wegen $\operatorname{Rang} X = r$ ist $a_i \neq 0 \; \forall i \in \{1, \dots, r\}$

Man kann sogar durch weitere Zeilenumformungen (Mult. von links mit Elementarmatrizen)

$$\tilde{S}X = \left.\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{r} \\ \hline 0 \end{bmatrix}\right\}r$$

erreichen mit $\tilde{S} \in GL(m, K)$

Mit der analogen Argumentation für Spaltenumformungen (Mult. mit Elementarmatrizen von rechts) erhalten wir

$$Y\tilde{T} = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}_{r} & \underbrace{0}_{n-r} \end{array}\right] \quad \text{für } \tilde{T} \in GL(n, K)$$

und so $$\tilde{S}A\tilde{T} = \tilde{S}XY\tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline & 0 & \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] =: B$$

also $\operatorname{Rang} A = r$ nach Lemma 5.17

"$\Rightarrow$" Sei Rang $A = r$. Gesucht: Zerlegung $A = X \cdot Y$ mit $X \in K^{m \times r}$, $Y \in K^{r \times n}$, Rang X = Rang $Y = r$.

Beobachtung: Wenn so eine Zerlegung ex., dann gilt $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} X$ und aus Dimensionsgründen sogar "$=$".

Wähle also als Spalten von X r l.u. Spalten von A (die wegen Rang $A = r$ eine Basis von $\operatorname{Im} A$ bilden). Schreibe $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, a_i Spalten v. A.

1) Wir nehmen zunächst an, dass $a_1, \ldots, a_r$ l.u. sind. Für $j \geq r+1$ ist dann $\boxed{a_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ij} a_i}$ ← Darstellung eindeutig

:

Wenn wir $X = (a_1, \ldots, a_r)$ wählen, wie ist dann Y zu wählen?

Für $j = 1, \ldots, n$ soll $X Y e_j = A e_j = a_j$ gelten, also

$$X Y e_j = [a_1, \ldots, a_r] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \end{bmatrix}}_{j\text{-te Spalte v. } Y} = y_{1j} \cdot a_1 + \ldots + y_{rj} a_r = a_j.$$

Diese Gleichungen sind lösbar:

Für $j \leq r$: $y_{ij} = 0$, $i \neq j$ und $y_{jj} = 1$

Für $j \geq r+1$: $y_{ij} = \lambda_{ij}$, siehe $\boxed{\ldots}$ oben!

$$X = (a_1, \ldots, a_r) \text{ und } Y = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}_{r} \;\middle|\; \begin{matrix} \lambda_{1r+1} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{rr+1} & \cdots & \lambda_{rm} \end{matrix} \right]$$

erfüllen $A = X Y$.

(2) Wenn $a_1, \ldots, a_r$ l.a. sind, dann gibt es wegen Rang $A = r$ l.u. Spalten $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$. Durch Multiplikation von rechts mit einer geeigneten Permutationsmatrix P können wir diese auf die ersten r Spalten tauschen und mit AP wie unter (1) verfahren. Dann ist $AP = X Y$ und $A = X \tilde{Y}$ mit $\tilde{Y} = Y P^{-1}$ $\square$