Übung 1

1. Geben Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme die jeweilige Lösungsmenge an.

(a) $\begin{array}{rrl} 2x & +3y & = 0 \\ 4x & +5y & = 10 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rrl} x & +3y & = 5 \\ -2x & -5y & = 10 \end{array}$ (c) $\begin{array}{rrl} x & +3y & = 5 \\ -2x & -5y & = -10 \end{array}$ (d) $x \quad -y \quad = 5$

2. (a) $\begin{array}{rrrl} 6x & -y & -7z & = 3 \\ 3x & & -6z & = 7 \\ & 2y & -z & = 2 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rrrl} 2x & +3y & -4z & = 9 \\ -6x & -9y & +10z & = 2 \\ -8x & -12y & +14z & = 11 \end{array}$ (c) $\begin{array}{rrrl} 2x & +3y & -4z & = 9 \\ -6x & -9y & +10z & = 2 \\ -8x & -12y & +14z & = -7 \end{array}$

3. Erinnern Sie sich zurück: Wie ist das Skalarprodukt $\vec{a} \star \vec{b}$ von zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definiert, wie für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$? Wie kann man damit die Norm (Länge) $\|\vec{a}\|$ ausrechnen und wie den Winkel zwischen den Vektoren? Wann stehen zwei Vektoren senkrecht zueinander? Wie kann man aus dem Skalarprodukt ablesen ob der Winkel spitz oder stumpf ist? Ferner ist für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ das Kreuzprodukt $\vec{c}$ durch $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$ definiert. Was ist dann $\vec{c} \star \vec{a}$, was $\vec{c} \star \vec{b}$? Was ist $\vec{b} \times \vec{a}$? Wann ist $\vec{c}$ der Nullvektor?

4. (a) Gegeben seien ein Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und eine Zahl d. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung

$$\vec{n} \star \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = n_x x + n_y y = d$$

die Gestalt

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

hat, mit geeigneten Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Drücken Sie $\vec{a}, \vec{b}$ mittels n_x, n_y und d aus. Die Lösungsmenge ist also eine Gerade und die angegebene Gestalt deren Parameterform mit Stützvektor (=Aufpunkt) $\vec{a}$ und Richtungsvektor (=Spannvektor) $\vec{a}$. Was ist $\vec{n} \star \vec{a}$ und was $\vec{n} \star \vec{b}$?

(b) Sei nun umgekehrt eine Gerade G in Parameterform gegeben mit Richtungsvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ und Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie eine lineare Gleichung wie oben an, deren Lösungsmenge gleich G ist. Welche Wahlmöglichkeiten für $\vec{n}$ und d hat man?

5. **Als freiwillige Zusatzaufgabe!** Sei nun eine Gerade (bzw. Ebene) als Menge aller Punkte $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) gegeben, die eine Gleichung $\vec{n} \star \vec{p} = d$ erfüllen, wobei $\|\vec{n}\| = 1$ and $d \geq 0$ ist. Man spricht dann von der **Hesse'schen Normalenform** der Geraden (Ebene). Begründen Sie, dass für einen beliebigen Punkt $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) die Zahl $|\vec{n} \star \vec{q} - d|$ den Abstand des Punktes $\vec{q}$ zur Geraden (Ebenen) darstellt. Hierbei bezeichnet $|x|$ den Betrag der *Zahl* x, z.B. $|-2| = 2$, $|1| = 1$.

6. Zeigen Sie folgende Tautologien

(a) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$ (So beweist man üblicherweise Äquivalenzen)
(b) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ (Umkehrschluss)
(c) $(\neg A \to F) \leftrightarrow A$ (Indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis)
(d) $((A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to A)) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \wedge (A \leftrightarrow C))$ (Ringschluss) (**HA**)
(e) $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$
(f) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
(g) $\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ (**HA**)
(h) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
(i) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$ (**HA**)
(j) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \leftrightarrow (\neg B))$
(k) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg((\neg A) \vee (\neg B))$ (**HA**)
(l) $(A \wedge (A \to B)) \to B$ (**HA**)
(m) $((A \to B) \wedge (\neg B)) \to (\neg A)$

7. Für zwei Aussagen A und B erklären wir die logische Verknüpfung A xor B durch die folgende Wahrheitstafel.

A	B	A xor B
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Sie steht für die umgangssprachliche Formulierung “Entweder A oder B (aber nicht beide)”, also das ausschließende Oder (eXklusives OdeR). Vergleichen Sie die xor-Tafel mit den in der Vorlesung angegebenen Wahrheitstafeln, insbesondere der von $A \vee B$. Welche andere Tafel sticht noch besonders ins Auge?

8. Verstehe einer die Frauen: Alice sagt: Beate lügt. Beate sagt: Claudia lügt. Claudia sagt: Beate und Alice lügen beide. Wer lügt denn nun und wer sagt die Wahrheit?

9. Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe der Quantoren $\forall$ und $\exists$. Bilden Sie dann die Verneinung der jeweiligen Aussage (natürlich auch mit Quantoren) und achten Sie dabei darauf, dass das “nicht” möglichst weit hinten auftritt.

   (a) Jede Currywurst ist ungesund.

   (b) Es gibt keine ungesunde Currywurst. (**HA**)

   (c) Zu jeder Currywurst existiert eine Portion Pommes Frites, die mehr Fett enthält als die Currywurst.

   (d) Es gibt ein Land, in dem jeder Einwohner Käsebrote lieber isst als Currywurst. (**HA**)

   (e) Es gibt einen Schnellimbiss, in dem zu jeder Portion Pommes Frites entweder Salat oder Currywurst serviert wird. (Beachte: ”entweder... oder” und nicht etwa nur “oder”)

   (f) In jedem Schnellimbiss wird zu allen Gerichten eine Currywurst gereicht, wenn der Salat welk ist. (**HA**)

Hausaufgabe 1

Abgabe: Freitag, 24. Oktober 2014

1. Setzen Sie bitte nun ihre 3D-Brillen auf!

   (a) Gegeben seien ein Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und eine Zahl d. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung

   $$\vec{n} \star \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n_x x + n_y y + n_z z = d$$

   die Gestalt

   $$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

   hat, mit geeigneten Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Drücken Sie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mittels n_x, n_y, n_z und d aus. Die Lösungsmenge ist also eine Ebene und die angegebene Gestalt deren Parameterform mit Stützvektor $\vec{a}$ und Richtungsvektoren $\vec{b}, \vec{c}$. Was ist $\vec{n} \star \vec{a}$, $\vec{n} \star \vec{b}$ und $\vec{n} \star \vec{c}$?

   (b) Sei nun umgekehrt eine Ebene E in Parameterform gegeben mit Richtungsvektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ und Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie eine lineare Gleichung wie oben an, deren Lösungsmenge gleich E ist. Welche Wahlmöglichkeiten für $\vec{n}$ und d hat man? (Hinweis: Kreuzprodukt ist hilfreich.)

2. (**Optional**) Lösen Sie Aufgabe 5, d.h. begründen Sie, dass man den Abstand eines Punktes zu einer Ebenen auf die angegebene Weise mit Hilfe Ihrer Hesse'schen Normalenform ausrechnen kann.

3. Erledigen Sie die mit **HA** markierten Teile von Aufgabe 6.

4. Erledigen Sie die mit **HA** markierten Teile von Aufgabe 9.

5. Verstehe einer die Männer: Arthur sagt: Wenn Bernd lügt, dann sagt Christian die Wahrheit. Bernd sagt: Christian lügt. Christian sagt: Arthur lügt. Wer lügt denn nun und wer sagt die Wahrheit?

6. Formulieren Sie eine zu A xor B äquivalente Verknüpfung, die

   (a) nur $\neg$, $\wedge$ und $\vee$

   (b) nur $\neg$ und $\wedge$

   verwendet.

Übung 2

10. Was bedeuten die folgenden Ausdrücke? Was ist ihre Negation? Welche der Aussagen sind wahr und welche falsch (ohne formalen Beweis aber mit solider Begründung)?

    (a) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : x < y$
    (b) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : x \geq y$ (**HA**)
    (c) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : x + y = x$
    (d) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} : x + y = z$
    (e) $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\, \exists z \in \mathbb{N}\colon y = x + z$ (**HA**)
    (f) $\forall A \subseteq \mathbb{N}\, \exists B \subseteq \mathbb{N}\colon A \cup B = \mathbb{N}$
    (g) $\exists y \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$
    (h) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Bilden Sie nur die Negation folgender Aussage: $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\, \exists M \in \mathbb{N}\, \forall n \geq M\colon |a_n - a| < \varepsilon$ (**HA**)

11. Zeigen Sie folgende Rechengesetze für die Mengenoperationen:

    (a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
    (b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (**HA**)
    (c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    (d) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
    (e) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ (**HA**)
    (f) Für $A \subseteq C$ und $B \subseteq C : A \backslash B = A \cap (C \backslash B)$

12. Wiederholen Sie die Begriffe Abbildung, Bildmenge, Urbildmenge. Bestimmen Sie das Bild der Menge A und die Urbildmenge der Menge B unter der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei f, A und B jeweils gegeben sind durch

    (a) $f(x) = x^2$, $A = \{1, 3, 5\}, B = \{-1, 0, 1, 2\}$
    (b) $f(x) = x^2$, $A = [-2, -1] \cup [-1/2, 1], B = [1, \infty[$
    (c) $f(x) = 3x + 1$, $A = [3, 4] \cup [-1/3, 1], B = [-11, 22]$ (**HA**)
    (d) Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. $f(x) = x^2 + a$, $A = \mathbb{R}, B = [0, \infty[$
    (e) Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. $f(x) = a$, $A = [3, 4] \cup [-1/3, 1], B = \{a\}$ (**HA**)
    (f) $f(x) = \sin(x)$, $A = [-\pi/2, \pi/2]$, $B = \{0, 1/\sqrt{2}, 1\}$ (x im Bogenmaß)

13. Sei $f\colon V \to W$ eine Abbildung und $A_i \subseteq V, i \in \mathcal{I}$ eine Familie von Teilmengen von V und $A, B \subseteq V$. Welche der Beziehungen $\subseteq, \supseteq, =$ bestehen zwischen

    (a) $f(A \cap B)$ und $f(A) \cap f(B)$?
    (b) $f\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i\right)$ und $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} f(A_i)$?

    Beweisen Sie Ihre Behauptungen und geben Sie im Falle von $\not\subseteq$ oder $\not\supseteq$ ein Gegenbeispiel dafür an.

14. Sei $f\colon V \to W$ eine Abbildung und $A_i \subseteq W, i \in \mathcal{I}$ eine Familie von Teilmengen von W und $A, B \subseteq W$. Welche der Beziehungen $\subseteq, \supseteq, =$ bestehen zwischen

    (a) $f^{-1}(A \cap B)$ und $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$?
    (b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i\right)$ und $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} f^{-1}(A_i)$?

    Beweisen Sie Ihre Behauptungen und geben Sie im Falle von $\not\subseteq$ oder $\not\supseteq$ ein Gegenbeispiel dafür an.

15. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

    (a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto f(x) = x^2$
    (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$
    (c) $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $x \mapsto f(x) = x^2$
    (d) $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$
    (e) $f\colon [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto f(x) = x^2$
    (f) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1+(-1)^{x+1}}{2}\right)$ (Ist f "wohldefiniert", d.h. ist $f(x)$ immer eine natürliche Zahl?)
    (g) $f\colon \{\text{Menschen}\} \to \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 1\colon & x \text{ ist männlich} \\ 42\colon & x \text{ ist weiblich} \end{cases}$

(h) $f\colon 2^{\{0,1,\dots,n\}} \to \{0,1,\dots,n+1\}$, $A \mapsto |A|$

(i) $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $(m,n) \mapsto n-m$

16. Geben Sie Abbildungen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, so dass f injektiv aber nicht surjektiv und g surjektiv aber nicht injektiv ist.

17. Kann man Abbildungen f und g wie in Aufgabe 16 konstruieren, so dass

    (a) $f \circ g$ bijektiv oder gar $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$,

    (b) $g \circ f$ bijektiv oder gar $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$

    ist? Falls ja, geben Sie ein entsprechendes Beispiel an. Falls das immer schiefgehen muss, begründen Sie, warum.

Hausaufgabe 2

Abgabe: Montag, 3. November

7. Bearbeiten Sie alle in Übung 2 mit (**HA**) markierten Aufgabenteile. Bei den unerledigten Aufgabenteilen von Aufgabe 11 dürfen Sie die in der Zusatzaufgabe 11 unten angegebenen Formeln (a) bis (e) verwenden.

8. Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine Abbildung und $A_i \subseteq V, i \in \mathcal{I}$ eine Familie von Teilmengen von V und $A, B \subseteq V$. Welche der Beziehungen $\subseteq, \supseteq, =$ besteht zwischen

   (a) $f(A \cup B)$ und $f(A) \cup f(B)$?

   (b) $f\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right)$ und $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} f(A_i)$?

   Beweisen Sie Ihre Behauptungen und geben Sie im Falle von $\not\subseteq$ oder $\not\supseteq$ ein Gegenbeispiel dafür an.

9. Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine Abbildung und $A_i \subseteq W, i \in \mathcal{I}$ eine Familie von Teilmengen von W und $A, B \subseteq W$. Welche der Beziehungen $\subseteq, \supseteq, =$ bestehen zwischen

   (a) $f^{-1}(A \cup B)$ und $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$?

   (b) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right)$ und $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} f^{-1}(A_i)$?

   Beweisen Sie Ihre Behauptungen und geben Sie im Falle von $\not\subseteq$ oder $\not\supseteq$ ein Gegenbeispiel dafür an.

10. Seien A, B endliche Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Welche der Beziehungen $\geq, >, =, <, \leq$ muss zwischen $|A|$ und $|B|$ bestehen, wenn f

    (a) injektiv,

    (b) surjektiv,

    (c) bijektiv,

    (d) surjektiv, aber nicht injektiv,

    (e) injektiv, aber nicht surjektiv ist?

    Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

11. **Zusatzaufgabe (optional, die Formeln sollten Sie sich aber merken!)** Zeigen Sie: Für Aussagen A, B, C gelten folgende Tautologien

    (a) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

    (b) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

    (c) $A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

    (d) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

    (e) $A \wedge (B \text{ xor } C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \text{ xor } (A \wedge C)$

    Ist auch $A \text{ xor } (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \text{ xor } B) \wedge (A \text{ xor } C)$ eine Tautologie (Begründen)? Lösen Sie damit erneut Aufgabe 11.

Übung 3

Eine wichtige Beweistechnik - vielleicht die wichtigste - in der Mathematik ist das

Prinzip der vollständigen Induktion. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben und es gelten*

(IA) $A(1)$ *ist wahr und*

(IS) *für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Implikation $(A(1) \wedge A(2) \wedge \ldots \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1)$ stets wahr.*

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Man kann also versuchen, eine Behauptung der Form

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon A(n)$$

zu beweisen, indem man erst $A(1)$ zeigt (Induktionsanfang **(IA)**), und dann aus der **Induktionsvoraussetzung (IV)** "$A(1) \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A(n)$ ist wahr" schlussfolgert, dass auch $A(n+1)$ wahr sein muss.

Als Beispiel definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ durch

$$A(n) :\Leftrightarrow 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} \colon A(n)$. **Beweis: (IA)** $A(1) \Leftrightarrow 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ ist wahr. **(IV)** $A(1), \ldots, A(n)$ sind wahr.
(IS) $A(1) \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$\underbrace{1+2+\ldots+n}_{\text{Hierauf ist } A(n) \text{ anwendbar!}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Aus der Richtigkeit von $A(n)$ folgt also die Richtigkeit von $A(n+1)$ und die Behauptung ist bewiesen!

Im Beispiel konnte man direkt "von n auf $n+1$" schließen, man brauchte also nur $A(n)$ im Induktionsschritt zu benutzen. Aufgabe 18 ist ein Beispiel, wo man wirklich "von $\leq n$ auf $n+1$" schließen muss.

Eine Behauptung der Form $\forall n \geq k \colon A(n)$ kann man entsprechend versuchen zu beweisen, indem man zuerst $A(k)$ zeigt und dann für $n \geq k \colon (A(k) \wedge \ldots \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1)$. (Formal: Wende das Induktionsprinzip auf $B(n) :\Leftrightarrow A(n+k-1)$ an.)

18. Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $p \geq 2$, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Sei $P \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen, in Zeichen
$$P = \{p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon n|p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p)\}$$
Zeigen sie mit vollständiger Induktion:
    (a) Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ hat einen Primteiler.
    (b) Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ kann als Produkt von Primzahlen dargestellt werden.

    Zeigen Sie außerdem: P ist unendlich.

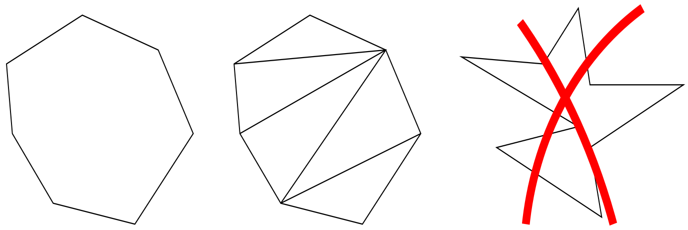
19. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:
    (a) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dabei ist $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (Geometrische Summenformel, vgl. Analysis)
    (b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
    (c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

    Zur obigen Notation: Für $m, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist $\sum_{k=l}^{m} a(k) = a(l) + a(l+1) + \ldots + a(m-1) + a(m)$. Den Fall $m < l$ interpretiert man als leere Summe und setzt $\sum_{k=l}^{m} a(k) = 0$.

20. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar.

21. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$?

22. Für $n \geq 3$ betrachten wir *konvexe* n-Ecke ("nach außen gewölbte"), d.h. solche, bei denen mit je zwei beliebigen Punkten immer auch die Verbindungsstrecke ganz im n-Eck liegt (bei der durchgestrichenen Figur unten ist das nicht der Fall). Eine Triangulierung eines n-Ecks ist eine Zerlegung des n-Ecks in Dreiecke, so dass die Eckpunkte der Dreiecke Ecken des n-Ecks sind und sich die Dreiecke nicht überlappen, vgl. die Abbildung unten. Als Diagonale eines n-Ecks bezeichnen wir eine Strecke zwischen zwei nicht benachbarten Ecken. Eine Triangulierung des n-Ecks kann man also erhalten, indem man sukzessive Diagonalen einfügt, ohne bereits bestehende Diagonalen zu kreuzen, bis das n-Eck vollständig in Dreiecke zerlegt ist. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:



(a) Jedes konvexe n-Eck ist triangulierbar.

(b) Eine Triangulierung besteht immer aus genau $n-2$ Dreiecken.

Was ist die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks?

23. Für $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (lies: "n über k") definiert durch

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = 0 \\ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}, & \text{wenn } k \geq 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = 0$, falls $k > n$,

(b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ (Pascal'sches Dreieck), und damit

(c) den **Binomischen Lehrsatz:** Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

(d) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(e) Eine n-elementige Menge hat 2^n Teilmengen.

Beachten Sie: Unsere Definition von $\binom{n}{k}$ ist auch sinnvoll, wenn n keine natürliche Zahl ist, etwa $n = 1/2$, siehe später Analysis. Die Formeln unter 23a und 23d sind dann hingegen nicht mehr sinnvoll.

Hausaufgabe 3

Abgabe: Freitag, 14. November

12. Was ist von folgendem Induktions-ähem-beweis zu halten? **Behauptung:** $\forall n \in \mathbb{N}$: In jeder Menge von $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ von n Personen haben alle dieselbe Frisur. **Beweis** durch vollständige Induktion: **(IA)** Für einelementige Mengen $\{P_1\}$ stimmt das trivialerweise, denn jede Person hat die dieselbe Frisur wie sie selbst. **(IV)** In jeder beliebigen Menge von k Personen $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$, $k \leq n$ haben alle dieselbe Frisur. **(IS)** Zu einer $n+1$-elementigen Menge $Q = \{P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}\}$ betrachten wir die n-elementigen Teilmengen $R = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ und $S = \{P_2, \ldots, P_{n+1}\}$. Wenden wir **(IV)** auf S an, so erhalten wir: $P_2, \ldots, P_{n+1}$ haben dieselbe Frisur. **(IV)** auf R angewandt liefert insbesondere, dass P_1 und P_2 dieselbe Frisur haben und daher $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ dieselbe Frisur haben. $\square$

    Finger in die Wunde, wo genau ist der Fehler?

13. Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie Ihre Formel mit vollständiger Induktion.

14. Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

15. Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie Ihre Formel mit vollständiger Induktion.

16. In einem konvexen n-Eck gibt es $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen (vgl. Aufgabe 22 aus den Übungen).

Übung 4

24. Es seien $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$ und $R \subseteq A \times B$ eine Relation gegeben durch

$$R = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 2), (\beta, 3), (\gamma, 2), (\gamma, 3), (\gamma, 4), (\delta, 4)\}.$$

Für $X_1 = \{\gamma\}, X_2 = \{\alpha, \gamma\}, X_3 = \{\alpha, \delta\} \subseteq A$ berechnen sie für $i = 1, 2, 3$. $B_R(X_i)$, $A_R(B_R(X_i))$ sowie $B_R(A_R(B_R(X_i)))$. (Vgl. Definitionen in der nächsten Aufgabe)

25. Beweisen Sie das Dualitätslemma für Relationen (Lemma 1.6 der Vorlesung): Seien A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Wir schreiben aRb an Stelle von $(a, b) \in R$. Für $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ definieren wir $B_R(X) \subseteq B$ und $A_R(Y) \subseteq A$ durch

$$B_R(X) = \{b \in B \colon \forall x \in X \; xRb\} \quad A_R(Y) = \{a \in A \colon \forall y \in Y \; aRy\}.$$

Seien $X, X' \subseteq A$ und $Y, Y' \subseteq B$ Teilmengen von A bzw. B. Zeigen Sie:

(a) $X \subseteq X' \Rightarrow B_R(X) \supseteq B_R(X')$ und **(HA)** $Y \subseteq Y' \Rightarrow A_R(Y) \supseteq A_R(Y')$.

(b) $X \subseteq A_R(B_R(X))$ und **(HA)** $Y \subseteq B_R(A_R(Y))$.

(c) $B_R(X) = B_R(A_R(B_R(X)))$ und **(HA)** $A_R(Y) = A_R(B_R(A_R(Y)))$.

26. **Kongruenz modulo m:** Es sei $m \in \mathbb{N}$. Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist eine durch

$$a \equiv b \bmod m :\Leftrightarrow m \mid a - b$$

eine Äquivalenzrelation definiert, die Kongruenz modulo m. Die Äquivalenzklassen heißen Restklassen oder Kongruenzklassen, werden für $a \in \mathbb{Z}$ mit $[a]$ bezeichnet und sind von folgender Gestalt:

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} \colon x = k \cdot m + a, \; k \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) In der Vorlesung wurde behauptet, dass es genau m Restklassen gibt, nämlich $[0], [1], \ldots, [m-1]$. Zeigen Sie dies, indem Sie folgendes beweisen: Zu jeder ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gibt es ein *eindeutig bestimmtes* Paar $(k, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1, \ldots, m-1\}$ mit der Eigenschaft $n = m \cdot k + r$.

(b) Seien $a = 65444447899335$, $b = 789568556777866673$, $c = 5655689097862437$. Was sind die Restklassen modulo 10 von $a, b, c, a+b, a+c, a \cdot b$? (Natürlich ooooohne Taschenrechner!)

(c) Wie lassen sich die Addition und Multiplikation von $\mathbb{Z}$ sinnvoll auf die Menge der Restklassen $\mathbb{Z}_{/\equiv \bmod m}$ übertragen?

27. **Summen- und Produktnotation** Machen Sie sich klar, dass die folgenden Ausdrücke alle dasselbe bedeuten (Indexverschiebung)

(a) $\sum_{i=3}^{7} a(i)$, $\sum_{i=2}^{6} a(i+1)$, $\sum_{i=3+k}^{7+k} a(i-k), k \in \mathbb{Z}$, und $\sum\limits_{i \in \{3,4,5,6,7\}} a(i)$

(b) $\sum_{i=m}^{n} a(i)$, $\sum_{i=m+k}^{n+k} a(i-k)$.

(c) $\prod_{i=3}^{7} a(i)$, $\prod_{i=2}^{6} a(i+1)$, $\prod_{i=3+k}^{7+k} a(i-k), k \in \mathbb{Z}$,

(d) $\prod_{i=m}^{n} a(i)$, $\prod_{i=m+k}^{n+k} a(i-k), k \in \mathbb{Z}$

Schreiben Sie folgende Summe aus (also ohne Summenzeichen): $\frac{1}{4} \sum\limits_{i \in \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}} g(i)$.

Hausaufgabe 4

Abgabe: Freitag, 21.11.2014

17. Zu der Relation aus Aufgabe 24 aus den Übungen seien zusätzlich $Y_1 = \{2\}, Y_2 = \{2,3\} \subseteq B$ gegeben. Berechnen Sie für $i = 1,2$ die Mengen $A_R(Y_i)$, $B_R(A_R(Y_i))$ und $A_R(B_R(A_R(Y_i)))$.

18. Beweisen Sie die mit **(HA)** markierten Teile der Aufgabe 25 zum Dualitätslemma.

19. (Prinzip vom doppelten Abzählen) Es seien A, B endliche Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Zeigen Sie:

$$\sum_{a \in A} |B_R(\{a\})| = \sum_{b \in B} |A_R(\{b\})|$$

    Was zählen diese beiden Summen ab?

20. Es sei A die Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^3$, die den Nullpunkt enthalten und B die Menge aller Ebenen in $\mathbb{R}^3$, die den Nullpunkt enthalten. Wir definieren eine Relation in $A \times B$ durch $gRe :\Leftrightarrow g \subseteq e$. Zu Teilmengen $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ beschreiben Sie $B_R(X)$ und $A_R(Y)$ (Es müssen ein paar wenige Fallunterscheidungen gemacht werden).

21. Schreiben die den Induktionsbeweis für den binomischen Lehrsatz aus der Übung mit Hilfe der Indexverschiebung (vgl. Aufgabe 27) auf, d.h. ohne die Summen ganz auszuschreiben.

22. Es sei $b \in \mathbb{N}$ und $b \geq 2$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ lässt sich schreiben als

$$n = s_l b^l + s_{l-1} b^{l-1} + \ldots + s_1 b^1 + s_0 b^0,$$

    wobei $l \in \mathbb{N}_0$ und $s_i \in \{0, 1 \ldots, b-1\}$ für $i = 0, \ldots, l$. Z.B. für $b = 10$ hat man $342 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$, die s_i sind die Ziffern der Dezimaldarstellung. Oder für $b = 2$ hat man z.B. $12 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ und $(s_3, s_2, s_1, s_0) = (1, 1, 0, 0)$ ist die Binärdarstellung von 12. Tipp: Sie dürfen die Ergebnisse aus Aufgabe 26 verwenden!
    Zusatz (optional): Beweisen Sie die Quersummenregel: Eine Zahl ist genau dann durch drei teilbar, wenn die Summe ihrer (Dezimal-)Ziffern durch drei teilbar ist. Welche Regeln gelten für 9 und 11?

Übung 5

28. Es sei B eine Menge und $S(B) := \{f : B \to B : f \text{ bijektiv}\}$ die Menge der bijektiven Abbildungen von B nach B (im Fall $B = \{1, \ldots, n\}$ schreiben wir $S(B) =: S_n$). Zeigen Sie, dass $(S(B), \circ)$ eine Gruppe ist, wobei $\circ$ die Komposition von Abbildungen bezeichnet.

29. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $P_n := \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$ die Menge aller zweielementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$. Beweisen Sie:

    (a) $\sigma \in S_n \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in P_n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$

    (b) $\tau \in S_n \Rightarrow \{i, j\} \mapsto \{\tau(i), \tau(j)\}$ ist Bijektion $P_n \to P_n$

    (c) $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$

    (d) Die Permutationen $\sigma \in S_n$ mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ bilden eine Untergruppe. (Diese wird als alternierende Gruppe A_n bezeichnet.)

30. Wir numerieren die Ecken eines Quadrats Q gegen den Uhrzeigersinn mit 1,2,3,4 und bezeichnen mit $\mathcal{D}_4$ die Menge aller Drehungen und Spiegelungen, die Q mit sich selbst zur Deckung bringen. Wir bezeichnen mit r_1 die Drehung um den Mittelpunkt um 90° mit r_2 die um 180° und mit r_3 die Drehung um 270°, jeweils gegen den Uhrzeigersinn. Mit e bezeichen wir die Identität (Drehung um 0°). Mit s_1 bezeichnen wir die Spiegelung an der Diagonalen durch 1 und 3, mit s_3 diejenige an der Diagonalen durch $2, 4$. Mit s_2 bezeichnen wir die Spiegelung an der Geraden durch die Mittelpunkte der Seiten $\overline{12}$ und $\overline{34}$ und mit s_4 die Spiegelung an der Geraden durch die Mittelpunkte der Seiten $\overline{23}$ und $\overline{14}$.

    (a) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel auf. Dabei wollen wir z.B. $r_1 \circ s_1$ als Komposition von Abbildungen interpretieren, d.h. erst s_1 und dann r_1 anwenden. Ist $\mathcal{D}_4$ kommutativ?

    (b) Sei $U = \langle r_1 \rangle$ die von r_1 erzeugte zyklische Untergruppe. Schreiben Sie alle Links- und Rechtsnebenklassen auf. Ist U ein Normalteiler?

    (c) Lösen Sie Aufgabe 30b mit $U = \langle s_1 \rangle$.

    (d) Lösen die folgende Gleichungen nach x auf: $r_1 x s_1 = s_3$, $s_1 r_1 x r_2 s_3 = s_4 s_3 s_4$.

    (e) Stellen Sie $\mathcal{D}_4$ als Untergruppe von S_4 dar.

31. Zeigen Sie, dass eine Untergruppe vom Index 2 immer normal ist.

32. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ nicht leer. Zeigen Sie: U ist genau dann eine Untergruppe, wenn gilt: $\forall x, y \in U : x * y^{-1} \in U$.

Hausaufgabe 5

Abgabe: 5.12.2014

23. Sei A eine Menge mit $|A| = n$. Zeigen Sie, dass $S(A)$ isomorph zu S_n ist. Hinweis: Ein Isomorphismus ist schon in der Vorlesung vorgeschlagen worden, Sie müssen nur noch den Nachweis führen.

24. Die Restklasse einer Zahl $a \in \{1, \dots, m-1\}$ modulo m heißt prime Restklasse, wenn $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$ ist. Berechnen Sie alle primen Restklassen für $m = 2, 3, 4, 5, 8$. Zeigen Sie außerdem für diese Werte von m, dass die primen Restklassen zusammen mit der Multiplikation von Restklassen (vgl. Aufgabe 26) eine Gruppe bilden.

25. Erstellen Sie Verknüpfungstafeln der Addition und Multiplikation der Restklassen modulo 2 und stellen Sie einen Zusammenhang zur Aussagenlogik her.

26. Wiederholen Sie Satz 2.6 aus der Vorlesung und den zugehörigen Beweis und formulieren und beweisen Sie analoge Aussagen über Rechtsnebenklassen.

27. Zeigen Sie, dass die in Aufgabe 30e gefundene Zuordnungsvorschrift ein injektiver Homomorphismus von $\mathcal{D}_4$ nach S_4 ist.

28. Wir haben gesehen, dass die Restklassen modulo m mit der Addition von Restklassen (vgl. Aufgabe 26) eine zyklische Gruppe der Ordnung m bilden, nämlich genau die Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}$. Sei $(A, *)$ eine weitere zyklische Gruppe der Ordnung m. Geben Sie einen Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}} \to A$ an. Achten Sie dabei auf die Wohldefiniertheit von φ, d.h. die Unabhängigkeit Ihrer Definition von $\varphi([a])$ vom Vertreter a der Restklasse.

29. Als Ordnung eines Elementes x einer Gruppe G bezeichnen wir die Mächtigkeit der von x erzeugten zyklischen Untergruppe $\langle x \rangle$. Sei nun $(G, *)$ eine Gruppe der Ordnung 4.
    (a) Welche Ordnung können die Elemente von G haben?
    (b) Klassifizieren Sie die Gruppen der Ordnung 4, indem sie die zwei Fälle unterscheiden
        i. G hat ein Element der Ordnung 4.
        ii. Die Ordnung jedes Elementes von G ist kleiner als 4.

    Erstellen Sie Verknüpfungstafeln!

Übung 6

33. Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition. Zeigen Sie: $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

34. Berechnen Sie die folgenden Produkte von Permutationen und geben Sie die inversen Permutationen der Ergebnisse an! (Beachten Sie dabei, daß wir Permutationen wie alle Abbildungen von rechts nach links ausführen.)

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Schreiben Sie die Ergebnisse aus c) und d) als Produkte von Transpositionen!

35. Numerieren Sie die Ecken eines Tetraeders mit den Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$. Wir betrachten die Drehgruppe, d.h. alle Drehungen, die das Tetraeder in sich überführen.

    (a) Welche und wieviele sind das?

    (b) Stellen Sie die möglichen Drehungen als Permutationen der Eckenmenge dar, d.h. durch Elemente von S_4.

    (c) Zerlegen Sie jede dieser Permutationen in disjunkte Zyklen.

    (d) Schreiben Sie jede dieser Zykelzerlegungen als Produkt von Transpositionen.

    (e) Zeigen, dass diese Menge von Permutationen gleich A_4 ist.

36. Zeigen Sie, dass die Abbildung γ aus dem Schiebespiel ein Homomorphismus ist. Zeigen Sie weiter, dass

$$\operatorname{Im}\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Ker}\gamma = \{ \circlearrowleft^{3n} : n \in \mathbb{Z} \}$$

37. Sei $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich. Zeigen Sie, dass die Menge A mit der punktweisen Addition und Multiplikation einen Ring bildet. Besitzt dieser Ring Nullteiler?

Hausaufgabe 6

Abgabe: 19.12.2014

30. Zeigen Sie: Ein Unterring ist ein Ring.

31. Schreiben Sie die folgenden Permutationen als Produkte von *elementfremden* Zyklen und geben Sie jeweils das Signum an. Wie immer lesen wir Abbildungen von rechts nach links und Zyklen der Länge 1 werden nicht notiert.

    (a) $\binom{1\,2\,3\,4\,5}{2\,3\,5\,4\,1}$ (c) $(1\,2)(2\,3)(4\,6\,5)$ (e) $(2\,3\,7)(1\,6\,8\,3)$

    (b) $\binom{1\,2\,3\,4\,5}{2\,4\,3\,5\,1}$ (d) $(1\,6\,8\,3)(2\,3\,7)$ (f) $(2\,3\,7)(2\,4)(1\,6\,8\,3)$

32. Sei $(A, *)$ eine Gruppe und $a \in A$. Wir definieren die Abbildung φ_a durch

$$\varphi_a \colon A \to A,\ x \mapsto \varphi_a(x) := a * x * a^{-1}.$$

    (a) Zeigen Sie, dass φ_a ein Automorphismus von A ist.
    (b) Zeigen Sie, dass die Menge $I(A) = \{\varphi_a \colon a \in A\}$ eine Untergruppe von $(\mathrm{Aut}(A), \circ)$ ist ($\circ$ bezeichnet wie üblich die Komposition von Abbildungen).
    (c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi \colon A \to \mathrm{Aut}(A),\ a \mapsto \Phi(a) := \varphi_a$ ein Homomorphismus ist.
    (d) Welche Eigenschaft kennzeichnet die Elemente von $\mathrm{Ker}\,\Phi$?

33. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

    (a) $\dfrac{1}{1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}$, (b) $\dfrac{(1 - \mathbf{i})^5 - 1}{(1 + \mathbf{i})^5 + 1}$.

34. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

    (a) -1, (b) $2 - 2\mathbf{i}$, (c) $(1 + \mathbf{i})^3$, (d) $\dfrac{1 - \mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$, (e) $\dfrac{2\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$, (f) $\dfrac{(1 + \mathbf{i}\sqrt{3})^5}{(1 - \mathbf{i}\sqrt{3})^3}$,

    (g) $\dfrac{\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi}{\cos\varphi - \mathbf{i}\sin\varphi}$ ($\varphi \in \mathbb{R}$).

    Berechnen Sie die vierten Potenzen dieser Zahlen sowohl unter Verwendung der binomischen Formel und als auch unter Verwendung der Formel von Moivre.

35. **Zusatzaufgabe:** Zeigen Sie: Die Restklasse $[a] \in \mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}$ ist ein zyklischer Erzeuger genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$ ist. Welche Elemente erzeugen demnach eine allgemeine zyklische Gruppe der Ordnung m?

Übung 7

38. Zeigen Sie für $z = a + b\mathbf{i}, w = c + d\mathbf{i} : \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ und $\frac{1}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{i}$. Drücken Sie $\frac{1}{z}$ mit Hilfe z und $\overline{z}$ aus. Berechnen Sie $z - \overline{z}$ und $z + \overline{z}$.

39. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

    (a) $(2 + 3\mathbf{i})(3 - 2\mathbf{i})$, (b) $(1 + \mathbf{i})^3$, (c) $(1 + 2\mathbf{i})^6$, (d) $\dfrac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$, (e) $\mathbf{i}^k (k \in \mathbb{Z})$,

    (f) $\dfrac{a + b\mathbf{i}}{a - b\mathbf{i}}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ (a, b) \neq (0, 0))$, (g) $\dfrac{(1 + \mathbf{i})^{10}}{(1 - \mathbf{i})^8}$, (h) $(a + b\mathbf{i})^n$ $(a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

40. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

    (a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$, (b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathbf{i}$, (c) $\sin\alpha + \mathbf{i}(1 - \cos\alpha)$ $(\alpha \in [-\pi, \pi))$,

    (d) $1 + \cos\dfrac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$.

41. Es sei $z = x + \mathbf{i}y = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ mit $x, y \in \mathbb{R},\ \varphi \in [-\pi, \pi), r > 0$ eine beliebige komplexe Zahl. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen:

    (a) $\overline{z}$, (b) $\dfrac{1}{\overline{z}}$, (c) z^2, (d) $\mathbf{i}z$, (e) $z\overline{z}$, (f) $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right|$,

    (Z) $\dfrac{1}{1 - z}$ für $z \neq 1$.

42. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre

    (a) $(1 + \mathbf{i})^{10}$, (b) $(1 - \mathbf{i}\sqrt{3})^6$, (c) $(-1 + \mathbf{i})^5$, (d) $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^3$, (e) $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^9$.

Hausaufgabe 7

Abgabe: 9.1.2014

36. Berechnen Sie folgende Matrizenprodukte:

(a)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(e)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(f)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(g)
$$\begin{pmatrix} 1+\mathbf{i} & 2+3\mathbf{i} & 1 \\ 3\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2\mathbf{i} & 0 & 7 \\ 4\mathbf{i} & 1 & 1 \\ 1 & 5+4\mathbf{i} & 3+2\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

(h)
$$\begin{pmatrix} x^{10}+12x^5+3x^3+1 & x^3+6x^2+2 & 3x+2 & x^{12}+112 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10x+2 \\ 4x^3+2x^2 \\ 5x^2+10x+5 \end{pmatrix}$$

37. Sei R ein beliebiger Ring (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$). Wir betrachten Matrizen mit Einträgen aus R. Zeigen Sie:

(a) Für $A, B \in R^{k\times m}$, $C \in R^{m\times n}$ gilt: $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

(b) Für $A \in R^{k\times m}$, $B, C \in R^{m\times n}$ gilt: $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$.

(c) Für $A \in R^{k\times m}$, $B \in R^{m\times n}$, $C \in R^{n\times p}$ gilt: $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$.

Anmerkung: Damit ist insbesondere der Beweis erbracht, dass $(R^{n\times n}, +, \cdot)$ einen Ring bildet.

38. Bringen Sie das Gleichungssystem $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, **mittels Algorithmus 2.24** aus der Vorlesung auf Zeilenstufenform und geben Sie dann eine Lösung **mit Hilfe von Algorithmus 2.23** an. Hierbei ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} b_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Klar, Sie haben schon in der Schule gelernt, wie man *irgendwie* hier eine Lösung ausrechnet. Hier geht es darum, die beiden o.g. Algorithmen nachzuvollziehen, der Weg ist also das Ziel!

39. Lösen Sie über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

40. Es seien 4 Lampen L_1, L_2, L_3, L_4 mit 3 Schaltern S_1, S_2, S_3 schaltbar. Die Betätigung von S_1 ändert simultan den Zustand von L_1 und L_2, S_2 den von L_2 und L_3 und S_3 den von L_1 und L_4. Kann man die Schalter so betätigen, dass

    (a) genau L_1 und L_3 sich ändern,

    (b) nur L_4 sich ändert,

    (c) genau L_1, L_2 und L_3 sich ändern?

    Formulieren Sie die Fragestellung als lineares Gleichungssystem über einem geeigneten Körper!

Übung 8

43. Erklären Sie die Begriffe Vektorraum und Untervektorraum!

44. Seien a, b, c, d beliebig gegebene reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass die Menge aller Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ bildet.

45. Sei V_o die Menge aller Ortsvektoren $\overrightarrow{OP}$ in der Ebene. Welche der folgenden Teilmengen von V_o bilden Vektorräume über $\mathbb{R}$?

    (a) $\{\overrightarrow{OP} \in V_o : P$ liegt auf einer gegebenen Geraden$\}$,

    (b) $\{\overrightarrow{OP} \in V_o : P$ liegt im ersten Quadranten$\}$,

    (c) $\{\overrightarrow{OP} \in V_o : P$ liegt im ersten oder dritten Quadranten$\}$.

46. In der Menge $V = \mathbb{R}_+$ der positiven reellen Zahlen wird eine Verknüpfung $\oplus$ definiert durch $x \oplus y := x \cdot y$. Ferner definieren wir eine äußere Verknüpfung $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$ durch $(\lambda, x) \mapsto x^\lambda$. Zeigen Sie dass V mit diesen Verknüpfungen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

47. Im Vektorraum $\mathbb{C}[x]$ der Polynome mit komplexen Koeffizienten betrachten wir Teilmengen U. Welche davon bilden Untervektorräume?

    (a) $U = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] \colon p(0) = 0\}$

    (b) $U = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] \colon p(0) = 1\}$

    (c) $U = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] \colon p(0) = 0 \wedge p(1) = 0\}$

    (d) $U = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] \colon 2p(2) + p(3) = 0\}$

    (e) $U = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] \colon \deg p(x) = 2\}$

    (f) Für $g(x) \in \mathbb{C}[x] : U = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] \colon g(x) | p(x)\}$

Übung 9

48. Erklären Sie folgende Begriffe:
    (a) Erzeugendensystem
    (b) Basis
    (c) lineare Hülle
    (d) span
    (e) lineare Unabhängigkeit

49. Es seien $a = (1, 2, 0)^T$ und $b = (2, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$.
    (a) Zeigen Sie, dass a, b linear unabhängig sind.
    (b) Ergänzen Sie a, b zu einer Basis.
    (c) Beschreiben Sie die Menge aller Vektoren c, so dass a, b, c eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

50. Für folgenden Teilmengen $S \subseteq \mathbb{R}^3$ gebe man die lineare Hülle von S sowie deren Dimension an:

    (a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

    (b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

    (c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

    (d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, x + y = 1 \right\}$,

    (e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

51. Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b$ mit dem Gauß'schen Algorithmus wobei

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -4 \\ -6 & -6 & 6 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}, b \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

52. Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix $A = [a_1, \ldots, a_n]$ mit Spaltenvektoren a_j. Ferner seien $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$ die Stufenindizes einer Zeilenstufenform $\widetilde{A} = [\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n]$ von A, die man aus dem Gauß'schen Algorithmus erhalten hat. Zeigen Sie:
    (a) Die Menge der Spaltenektoren $M = \{a_{j_1}, a_{j_2} \ldots, a_{j_k}\}$ ist linear unabhängig.
    (b) M ist inklusionsmaximal mit dieser Eigenschaft, d.h., falls $a_j \notin M$ eine weitere Spalte von A ist, so ist $M \cup \{a_j\}$ linear abhängig.

Übung 10

53. Folgern Sie aus dem der Ergebnis aus Aufgabe 52, dass für jede Matrix $A \in M(n \times m, K)$ gilt

$$\text{Spaltenrang von } A = \text{Zeilenrang von } A,$$

wobei der Spaltenrang die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A ist und analog der Zeilenrang von A die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren.

54. $S \subseteq V$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \forall v \in S \colon v \notin \operatorname{span}_K(S \setminus \{v\})$.

55. Zeigen Sie Beobachtung 3.24:

    (a) $W_1 + \ldots + W_k = \operatorname{span}(W_1 \cup \ldots \cup W_k)$,

    (b) $W_1 + \ldots + W_k$ ist ein Untervektorraum,

    (c) $\dim(W_1 + \ldots + W_k) \leq \dim(W_1) + \ldots + \dim(W_k)$.

56. Ergänzend zum Beweis von Beobachtung 3.32: Seien $v \in V$ und $(N_i)_{i \in \mathcal{J}}$ eine Familie von Untervektorräumen. Dann ist

$$v + \bigcap_{i \in \mathcal{J}} N_i = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} (v + N_i).$$

57. Wir betrachten den Vektorraum $K[x]$ der Polynome. Finden Sie zwei Unterräume U, V mit $\dim U = \infty = \dim V$ und $\dim(U \cap V) = 3$.

58. Zeigen Sie: Eine Familie $(v_i)_{i \in \mathcal{J}}$ ist genau dann affin unabhängig, wenn für jeden Vektor v_a, $a \in \mathcal{J}$) gilt: $(v_i - v_a)_{i \in \mathcal{J} \setminus \{a\}}$ linear unabhängig.

59. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$U = \operatorname{span}\left(u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad V = \operatorname{span}\left(v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

    Sei ferner $W = U \cap V$.

    (a) Bestimmen Sie eine Basis von W.

    (b) Ergänzen Sie diese jeweils zu einer Basis von U und V.

    (c) Bestimmen Sie einen Untervektorraum Z mit $\mathbb{R}^4 = W \oplus Z$.

Übung 11

60. (a) Geben Sie in Aufgabe 59 eine Basis von $\mathbb{R}^4_{/U\cap V}$ an.

    (b) Sei $V = W \oplus Z$ und seien $(w_1, \ldots, w_r)$ und $(z_1, \ldots, z_s)$ Basen von W bzw. Z. Geben Sie eine Basis von $V_{/W}$ an.

61. Untersuchen Sie, ob folgende Operatoren linear sind.

    (a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$,

    (b) $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$,

    (c) $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; (x_i)_{i=1}^n \mapsto (|x_i|)_{i=1^n})$,

    (d) $D : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]; f \mapsto xf$,

    (e) $E : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]; f \mapsto f \circ 2x + 4$,

    (f) $F : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{2n}[x]; f \mapsto f \circ x^2$,

    (g) $G : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]; f \mapsto f'$,

    (h) $H : 2^{\{1,2,3\}} \to 2^{\{2\}}; M \mapsto M \cap \{2\}$ über $\mathbb{F}_2$.

    Welche der Operatoren sind ein Vektorraum-Isomorphismus? Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{K}_n[x]$ die Menge aller Polynome vom Grade $\leq n$ über dem Körper $\mathbb{K}$.

62. Für $A = [a_1, \ldots, a_n] \in K^{m\times n}$ ist die Abbildung $K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$ bekanntlich eine lineare Abbildung. Sei nun umgekehrt $F\colon K^n \to K^m$ eine beliebige lineare Abbildung. Zeigen Sie: es gibt eine eindeutig bestimmte Matrix A mit der Eigenschaft: $\forall\, x \in K^n\colon F(x) = Ax$.

63. Sind folgende Abbildungen F linear auf $\mathbb{R}^n$?

    (a) $F(x) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, 0, 0, \ldots, 0\right), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$,

    (b) $F(x) = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$,

    (c) $F(x) = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$,

    (d) $F(x) = \left((x_1 + 1)^2 - (x_1 - 1)^2, 0, 0, \ldots, 0\right)$,

    (e) $F(x) = (\alpha, 0, 0, \ldots, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

    wobei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist. Geben Sie die zugehörige Matrixdarstellungen $[A]$ der linearen Abbildungen F gemäß Aufgabe 62 an!

64. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

    und $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$.

    (a) Bestimmen Sie Ker$F$ und ImF!

    (b) Überprüfen Sie die Dimensionsformel an diesem Beispiel.

    (c) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$, die eine Basis von Ker$F$ enthält.

Hausaufgabe 8

Abgabe: 30. Januar 2015

41. Seien a, b, c, d beliebig gegebene reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass die Menge aller Zahlenpaare (u, v), für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned}$$

eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat, einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet.

42. Sei $A = [a_1, \ldots, a_n] \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$ und es sei $\widehat{x} \in \text{Lös}(A, b)$. Zeigen Sie: $\text{Lös}(A, b) = \widehat{x} + \text{Lös}(A, 0)$.

43. Berechnen Sie $U \cap V$ für die beiden affinen Unterräume

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel für zwei Ebenen $U = u + \text{span}(u_1, u_2)$ $V = v + \text{span}(v_1, v_2)$ im $\mathbb{R}^5$ an mit $U \cap V = \emptyset$ und $(u_1.u_2, v_1, v_2)$ linear unabhängig. Gibt es so ein Beispiel auch in $\mathbb{R}^4$? (Bitte alles mit Begründung.)

44. Untersuchen Sie, ob die Abbildung

$$f : \mathbb{C}_2[t] \to \mathbb{C}^3, at^2 + bt + c \mapsto (a - c, b - c, a + c)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist!

45. Geben Sie zwei verschiedene Basen in $\mathbb{R}^4$ an, die gleichzeitig $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthalten!

46. Untersuchen Sie, ob folgende Operatoren linear sind:
    (a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (x, y, z) \mapsto a$ $(a \in \mathbb{R}^3$ konst.),
    (b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (x, y, z \mapsto (x, y, z) + a$ $(a \in \mathbb{R}^3$ konst.),
    (c) $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x^2 + 2y$,
    (d) $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; (x_i)_{i=1}^n \mapsto \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i, 0, \ldots, 0\right), (a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$.

Finden Sie, diese Aufgaben sind das Letzte? Stimmt! Endlich mal was richtig! Dies ist die letzte Hausaufgabe für dieses Semester.

Übung 12

65. In dieser Aufgabe sollen einige Sachverhalte über den Quotientenraum, den Fakorisierungssatz und den Homomorphiesatz illustriert werden (Sätze 4.13-4.15, Aufgabe 60b). Sei dazu $N = \operatorname{span}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \subseteq \mathbb{R}^3$

    (a) Geben Sie einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{R}^3 = U \oplus N$ an.

    (b) Welche der Nebenklassen $v_1+N, v_2+N, v_3+N \in \mathbb{R}^3_{/N}$ sind gleich, wobei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?
    Wie kann man allgemein die Gleichheit zweier Nebenklassen charakterisieren?

    (c) Wohldefiniertheit der Addition und skalaren Multiplikation von Nebenklassen: Zeigen Sie, dass die Additionen $(v_2 + N)\hat{+}(v_3 + N) = (v_2 + v_3) + N$ und $(v_2' + N)\hat{+}(v_3' + N) = (v_2' + v_3') + N$ tatsächlich dieselbe Nebenklasse liefern wobei $v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ebenso für $3 \hat{\cdot} (v_2 + N) = (3 \cdot v_2) + N$ und $3 \hat{\cdot} (v_2' + N) = (3 \cdot v_2') + N$.
    Zeigen Sie den allgemeinen Fall.

    (d) Geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3_{/N}$ an.

    (e) Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Av$ mit
    $$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
    Bestimmen Sie eine Basis von Ker A und eine von Im A. Berechnen Sie Av_3, Av_3' und die Bildmengen von $v_3 + N$, $v_3' + N$, $v_3 + \operatorname{Ker} A$, $v_3' + \operatorname{Ker} A$ unter A.

    (f) Zeigen Sie: Die Abbildung $\overline{A}\colon \mathbb{R}^3_{/N} \to \mathbb{R}^2$, $v + N \mapsto Av$ ist wohldefiniert und linear. Was ist Ker $\overline{A}$?

    (g) Wie kann man die Gleichheit von Nebenklassen aus $\mathbb{R}^3_{/\operatorname{Ker} A}$ charakterisieren?

    (h) Die Abbildung $\overline{A}\colon \mathbb{R}^3_{/\operatorname{Ker} A} \to \mathbb{R}^2$, $v + \operatorname{Ker} A \mapsto Av$ ist wohldefiniert, linear und injektiv.

66. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $(\operatorname{End}_K(V), +, \circ)$ sein Endomorphismenring und $\mathbb{O} \in \operatorname{End}_K(V)$ die Nullabbildung, also $\forall v \in V\colon \mathbb{O}(v) = 0_V$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen über ein $f \in \operatorname{End}_K(V)$:

    (a) $f \neq \mathbb{O}$ und f ist nicht bijektiv.

    (b) f ist Linksnullteiler, d.h. $f \neq \mathbb{O}$ und $\exists\, g \in \operatorname{End}_K(V) \setminus \{\mathbb{O}\}\colon f \circ g = \mathbb{O}$.

    (c) f ist Rechtsnullteiler, d.h. $f \neq \mathbb{O}$ und $\exists\, g \in \operatorname{End}_K(V) \setminus \{\mathbb{O}\}\colon g \circ f = \mathbb{O}$.

    Im endlichdimensionalen Fall ist also f entweder invertierbar oder Nullteiler. Kann man die Voraussetzung "endlichdimensional" fallen lassen?

    Lösung: Vorbemerkung: Weil V endlichdimensional ist gilt wegen Korollar 4.12: (a) $\Leftrightarrow$ (a1) $f \neq \mathbb{O}$ und f ist nicht injektiv $\Leftrightarrow$ (a2) $f \neq \mathbb{O}$ und f ist nicht surjektiv. Wir zeigen (a1) $\Leftrightarrow$ (b) und (a2) $\Leftrightarrow$ (c).

    (a1) $\Rightarrow$ (b): f nicht injektiv $\overset{4.7(b)}{\Rightarrow} \exists\, w \in V$, $w \neq 0$ und $f(w) = 0$. Konstruiere g so: Sei $(b_i)_{i \in \mathcal{J}}$ eine Basis von V. Nach Satz 4.8 gibt es genau eine lineare Abbildung g mit der Eigenschaft $g(b_i) = w$, $i \in \mathcal{J}$. Damit ist Im $g = \operatorname{span}(w) \subseteq \operatorname{Ker} f$ und insbesondere $g \neq \mathbb{O}$ und $\forall v \in V\colon f \circ g(v) = 0$ also $f \circ g = \mathbb{O}$.

    (b) $\Rightarrow$ (a1): $\exists\, g \neq \mathbb{O}\colon f \circ g = \mathbb{O} \Rightarrow \forall v \in V\colon f \circ g(v) = 0 \Rightarrow \forall v \in V\colon g(v) \in \operatorname{Ker} f$. Da $g \neq \mathbb{O}$, existiert $v \in V$ mit $g(v) = w \neq 0$. Da ja auch $w \in \operatorname{Ker} f$, ist f nicht injektiv wegen 4.7 (b).

    (a2) $\Rightarrow$ (c): f nicht surjjektiv $\overset{4.7(a)}{\Rightarrow} \exists\, w \in V\colon\ w \notin \operatorname{Im} f$. Sei $(b_i)_{i \in \mathcal{J}}$ eine Basis von Im f. Da $w \notin \operatorname{Im} f = \operatorname{span}((b_i)_{i \in \mathcal{J}})$ ist auch die um w erweiterte Famile $(w, b_i)_{i \in \mathcal{J}}$ linear unabhängig (vgl. Beobachtung 3.10 (b)). Wähle $z \in V \setminus \{0\}$ (etwa $z = w$). Nach Satz 4.8 (2) gibt es mindestens eine lineare Abbildung g mit $g(w) = z$ und $g(b_i) = 0\, \forall i \in \mathcal{J}$. Für g gilt damit: $g \neq \mathbb{O}$ und Im $f \subseteq \operatorname{Ker} g$ und damit $\forall v \in V\colon g \circ f(v) = 0$.

    (c) $\Rightarrow$ (a2): Da $g \neq \mathbb{O}$ ist Ker $g \subsetneq V$. Da $g \circ f = \mathbb{O}$, ist $\forall v \in V\colon f(v) \in \operatorname{Ker} g$, also Im $f \subseteq \operatorname{Ker} g \subsetneq V$ und damit f nicht surjektiv. □

    Beachte: V endlichdimensional brauchte man nur für die Äquivalenzen (a) $\Leftrightarrow$ (a1) $\Leftrightarrow$ (a2), die ja im unendlichdimensionalen nicht gelten! Die anderen Schlüsse (a1) $\Leftrightarrow$ (b) und (a2) $\Leftrightarrow$ (c) benutzen nicht die Endlichkeit der Basen. Als Beispiele im unendlichdimensionalen betrachten wir den Folgenraum $K^{\mathbb{N}}$ und $f_1\colon K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}}$, $f_1((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (x_2, x_3, \ldots)$. f_1 ist surjektiv, aber nicht injektiv, denn $(1, 0, 0, \ldots) \in \operatorname{Ker} f_1$. Als g_1 nimm $g_1((x_1, x_2, \ldots)) = (x_1, 0, 0, \ldots)$, dann ist $f_1 \circ g_1 = \mathbb{O}$. Andererseits ist $f_2\colon K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}}$, $f_2((x_1, x_2, \ldots)) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ injektiv, aber nicht surjektiv. Mit $g_2 = g_1$ gilt $g_2 \circ f_2 = \mathbb{O}$.

67. Wie testet man eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ auf Invertierbarkeit und wie rechnet man die Inverse aus?

68. Entscheiden Sie ob folgende Familien Basen von $(\mathbb{R}^3)^*$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind und bestimmen Sie ggf. die duale Basis.

$$\mathcal{A}^* = ([1,2,1],[2,1,2],[0,3,1]), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

69. Wir betrachten im Vektorraum $V = \mathbb{R}_1[x]$ der Polynome vom Grade ≤ 1 die Elemente $p_1(x) = 1+x$ und $p_2(x) = 2+x$. Zeigen, Sie dass $\mathcal{B} = (p_1, p_2)$ eine Basis von V bilden. Seien $\mathcal{B}^* = (p_1^*, p_2^*)$ die duale Basis und $f_1(x) = 4+x, f_2(x) = 3+5x$. Berechnen Sie $p_i^*(f_j)$, $1 \leq i,j \leq 2$.

70. Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V = n$ und V^* der Dualraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (a) Die Elemente $v_1^*, \ldots, v_n^*$ sind l.a. in V^*.

   (b) Es gibt $v \in V$, $v \neq 0_V$ mit $v_1^*(v) = \ldots = v_n^*(v) = 0_K$.

   Lösung: Es bezeichne $\Gamma = \operatorname{span}(v_1^*, \ldots, v_n^*) \subseteq V^*$ und $\Gamma^\circ = \{v \in V\colon \varphi(v) = 0 \,\forall \varphi \in \Gamma\}$. Nach Satz 4.19 gilt die Dimensionsformel $\dim \Gamma + \dim \Gamma^\circ = \dim V^* = \dim V$. Die Lösung der Aufgabe passt nun in eine Zeile:

$$v_1^*, \ldots, v_n^* \text{ l.a.} \Leftrightarrow \dim \Gamma \leq n-1 = \dim V - 1 \Leftrightarrow \dim \Gamma^\circ = n - \dim \Gamma \geq 1 \Leftrightarrow \exists v \in \Gamma^\circ, v \neq 0.$$

Hausaufgabe 9

Abgabe: Brauchen Sie nicht abzugeben. Dürfen Sie aber.

47. Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, (b_1, b_2, b_3) eine Basis von V und $N = \operatorname{span}(b_3)$.

   (a) Geben Sie einen Unterraum $U \subseteq V$ mit $V = U \oplus N$ an.

   (b) Welche der Nebenklassen $v_1 + N, v_2 + N, v_3 + N \in V_{/N}$ sind gleich, wobei $v_1 = b_1 + 2b_2 + 3b_3$, $v_2 = b_1 + 2b_2$, $v_3 = 2b_1 + b_2$? Wie kann man allgemein die Gleichheit zweier Nebenklassen charakterisieren?

   (c) Wohldefiniertheit der Addition und skalaren Multiplikation von Nebenklassen: Zeigen Sie, dass die Additionen $(v_2+N)\hat{+}(v_3+N) = (v_2+v_3)+N$ und $(v_2'+N)\hat{+}(v_3'+N) = (v_2'+v_3')+N$ tatsächlich dieselbe Nebenklasse liefern wobei $v_2' = b_1 + 2b_2 + 4b_3$, $v_3' = 2b_1 + b_2 + b_3$. Ebenso für $3 \hat{\cdot} (v_2 + N) = (3 \cdot v_2) + N$ und $3 \hat{\cdot} (v_2' + N) = (3 \cdot v_2') + N$. Zeigen Sie den allgemeinen Fall.

   (d) Geben Sie eine Basis von $V_{/N}$ an.

   (e) Sei W ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und mit Basis (c_1, c_2) Wir betrachten die Abbildung $A\colon V \to W$, die eindeutig bestimmt ist durch $Ab_1 = c_1$, $Ab_2 = Ab_3 = 0_W$ Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} A$ und eine von $\operatorname{Im} A$. Berechnen Sie Av_3, Av_3' und die Bildmengen von $v_3 + N$, $v_3' + N$, $v_3 + \operatorname{Ker} A$, $v_3' + \operatorname{Ker} A$ unter A.

   (f) Zeigen Sie: Die Abbildung $\overline{A}\colon V_{/N} \to W$, $v + N \mapsto Av$ ist wohldefiniert und linear. Was ist $\operatorname{Ker} \overline{A}$?

   (g) Wie kann man die Gleichheit von Nebenklassen aus $V_{/\operatorname{Ker} A}$ charakterisieren?

   (h) Die Abbildung $\overline{A}\colon V_{/\operatorname{Ker} A} \to \mathbb{R}^2$, $v + \operatorname{Ker} A \mapsto Av$ ist wohldefiniert, linear und injektiv.

48. Sei $(R, +, \cdot)$ ein nicht notwendig kommutativer Ring mit Einselement 1. Ein Element $v \in R$ heißt *Linksinverses* zu einem Element $u \in R$, wenn $v \cdot u = 1$. Entsprechend heißt ein Element $v \in R$ *Rechtsinverses* zu $u \in R$, wenn $u \cdot v = 1$. Zeigen Sie:

   (a) Ist $x \in R$ ein Linksnullteiler (vgl. Aufgabe 66), dann hat x kein Linksinverses. Analog haben Rechtsnullteiler kein Rechtsinverses.

   (b) Für den Endomorphismenring $\operatorname{End}_K(V)$ eines endlichdimensionalen K-Vektorraumes gelten nach Aufgabe 66 auch die Umkehrungen. Stimmt das auch für allgemeine Ringe? Beweis oder Gegenbeispiel!

49. Sei $\mathcal{B} := \big(b_1 = x^2 + 1, b_2 = x^2 + x, b_3 = x^2 + 2x + 1\big)$ gegeben.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V aller reellen Polynome vom Grade ≤ 2 ist.

   Welche der Basisvektoren kann man gegen

   (b) x^2,   (c) $3x^2 + 2x$,   (d) $2x^2 + 2x$, bzw.   (e) $x + 1$

   austauschen? Sei ferner $\mathcal{B}^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von V^*.

   (f) Berechnen Sie $b_i^*(x^{j-1})$ für $1 \leq i, j \leq 3$.

Übung 13

71. Ach Gottchen! Was ist denn nochmal ein Vektorraum?

72. Was ist eine Basis? Was kann man zur Existenz sagen? Was ist die Dimension?

73. Gegeben seien eine Familie B und Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass B eine Basis ist. Welche Elemente aus B kann man gegen v bzw. w tauschen und erhält immer noch eine Basis?

$$B = \left(b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 121 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 30 \end{pmatrix}$$

74. Es sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Wieviele lineare Abbildungen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt es mit

   (a) $F(e_1) = b_1,\ F(e_2) = b_2,\ F(e_3) = b_3,\ F(x) = v,$

   (b) $F(e_1) = b_1,\ F(e_2) = b_2,\ F(e_3) = b_3,\ F(x) = w,$

   (c) $F(e_2) = b_2,\ F(e_3) = b_3,\ F(x) = w$

   Geben Sie F konkret an (wenn's geht).

75. Bezeichne $\mathbb{R}[X]$ den Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten und $\mathbb{R}_0[X]$ den Unterraum der konstanten Polynome und $D\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ f \mapsto f'$ die Ableitung. Geben Sie mit Hilfe von D einen Isomorphismus $\mathbb{R}[X]_{/\mathbb{R}_0[X]} \to \mathbb{R}[X]$ an. Haben Sie eine Idee, wie man die Umkehrabbildung davon nennen könnte?

76. Was ist der Dualraum und was versteht man unter der dualen Basis?

77. Bestimmen sie die zu $C = \left(d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ duale Basis C^*.

78. Sei V ein Vektorraum endlicher Dimension n, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V und $B^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ die zu B duale Basis von V^*. Ferner sei $v \in V$. Wie kann man die Darstellung von v durch B mithilfe von B^* ausdrücken?

79. Bestimmen Sie den Annulator Y_i° von $Y_1 = \{e_3, x\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (s.o.) und von $Y_2 = \{\lambda e_1 + \cos(\lambda) e_2 + \sin(\lambda) e_3,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ Bestimmen Sie ferner $Y_i^{\circ\circ}$.

80. Bezeichne $\mathbb{R}_n[X]$ den Vektorraum der Polynome vom Grade $\leq n$. Sei $B = (1, x, x^2)$ und $B^* = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ die zu B duale Basis von $(\mathbb{R}_2[X])^*$ und $D\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ f \mapsto f'$ die Ableitung. Wie ist allgemein die duale Abbildung erklärt und was ist konkret (d.h. in Termen der Koeffizienten von f) $D^*(\varphi_i)(f)$?

81. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$. Ferner sei $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $G(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -2x \\ y \end{pmatrix}$.

   Geben Sie die Darstellungsmatrizen $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(G)$ von F an wobei

   (a) $\mathcal{A} = \mathcal{E}_3$ und $\mathcal{B} = \mathcal{E}_2$ die Standardbasen,

   (b) $\mathcal{A} = B$ und $\mathcal{B} = C$ (s.o.).

   Geben Sie ferner in beiden Fällen $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F \circ G)$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(G \circ F)$. Überprüfen Sie $G \circ F$ und $F \circ G$ auf Invertierbarkeit. Geben Sie im Falle der Invertierbarkeit die Darstellungsmatrix bezüglich der jeweiligen Standardbasis. Mit $\mathcal{A} = \mathcal{E}_3$ und $\mathcal{B} = C$ berechnen Sie bitte noch das Matrizenprodukt $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(G)$.

82. Geben Sie $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(D)$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(D^2)$ an wobei die $D\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ wieder der Ableitungsoperator ist $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$ und

   (a) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$,

   (b) $\mathcal{A} = (1, 1 + x, 1 + x + x^2, \ldots, 1 + x + x^2 + \ldots + x^n)$.

Hausaufgabe 10

Abgabe: Abgabe am 21.4. in der Übung

50. Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, (b_1, b_2, b_3) eine Basis von V und $N = \text{span}(b_3)$.

    (a) Geben Sie einen Unterraum $U \subseteq V$ mit $V = U \oplus N$ an.

    (b) Welche der Nebenklassen $v_1 + N, v_2 + N, v_3 + N \in V_{/N}$ sind gleich, wobei $v_1 = b_1 + 2b_2 + 3b_3$, $v_2 = b_1 + 2b_2$, $v_3 = 2b_1 + b_2$?

    (c) Geben Sie eine Basis von $V_{/N}$ an.

    (d) Sei W ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und mit Basis (c_1, c_2) Wir betrachten die Abbildung $A\colon V \to W$, die eindeutig bestimmt ist durch $Ab_1 = c_1$, $Ab_2 = Ab_3 = 0_W$ Bestimmen Sie eine Basis von Ker A und eine von Im A. Berechnen Sie Av_3, Av_3' und die Bildmengen von $v_3 + N$, $v_3' + N$, $v_3 + \text{Ker } A$, $v_3' + \text{Ker } A$ unter A.

    (e) Zeigen Sie: Die Abbildung $\overline{A}\colon V_{/N} \to W$, $v + N \mapsto Av$ ist wohldefiniert und linear. Was ist Ker $\overline{A}$?

    (f) Die Abbildung $\overline{A}\colon V_{/\text{Ker } A} \to W$, $v + \text{Ker } A \mapsto Av$ ist wohldefiniert, linear und injektiv.

51. Sei $(R, +, \cdot)$ ein nicht notwendig kommutativer Ring mit Einselement 1. Ein Element $v \in R$ heißt *Linksinverses* zu einem Element $u \in R$, wenn $v \cdot u = 1$. Entsprechend heißt ein Element $v \in R$ *Rechtsinverses* zu $u \in R$, wenn $u \cdot v = 1$. Ein Element $x \in R \backslash \{0\}$ heißt *Linksnullteiler*, wenn es $y \in R \backslash \{0\}$ gibt mit $x \cdot y = 0$. Entsprechend ist ein *Rechtsnullteiler* erklärt. Zeigen Sie:

    (a) Ist $x \in R$ ein Linksnullteiler, dann hat x kein Linksinverses. (Analog haben Rechtsnullteiler kein Rechtsinverses)

    (b) Für den Endomorphismenring $\text{End}_K(V)$ eines endlichdimensionalen K-Vektorraumes gelten nach Aufgabe 66 auch die Umkehrungen. Stimmt das auch für allgemeine Ringe? Beweis oder Gegenbeispiel!

52. Sei $\mathcal{B} := \big(b_1 = x^2 + 1, b_2 = x^2 + x, b_3 = x^2 + 2x + 1\big)$ gegeben.

    (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V aller reellen Polynome vom Grade ≤ 2 ist.

    Welche der Basisvektoren kann man gegen

    (b) x^2, (c) $3x^2 + 2x$, (d) $2x^2 + 2x$, bzw. (e) $x + 1$

    austauschen? Sei ferner $\mathcal{B}^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von V^*.

    (f) Berechnen Sie $b_i^*(x^{j-1})$ für $1 \leq i, j \leq 3$.

53. Sei (e_1, e_2) die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Die Menge M der linearen Abbildungen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(e_1) = b_1$ bildet einen affinen Unterraum von $\text{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$. Welche Dimension hat er?

54. Wir fassen $(\mathbb{R}^n)^*$ als $\mathbb{R}^{1\times n}$ auf, also als Zeilenvektoren. Es sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ mit zughöriger dualer Basis $B^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ von $\mathbb{R}^{1\times n}$ mit der Eigenschaft,dass für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ alle Einträge von sowohl b_i als auch b_i^* nicht negativ sind. Zeigen Sie: Dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S_n$ und Skalare $\lambda_i > 0$ mit $b_i = \lambda_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}$, $i = 1, \ldots, n$ und entsprechend $b_i^* = \lambda_{\sigma(i)}^{-1} e_{\sigma(i)}^T$. (Jedes b_i kann also nur genau einen von null verschiedenen Eintrag haben, B muss also “im Wesentlichen” die Standardbasis sein)

Übung 14

83. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kann man ja als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen, mit der kanonischen ($\mathbb{R}$-)Basis $\mathcal{B} = (1, i)$. Für eine Zahl $z = a + bi$, ist die Abbildung $M_z\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto M_z x := z \cdot x$ $\mathbb{R}$-linear. Was ist $A_z = \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(M_z)$? Welche algebraische Struktur hat das Bild der Abbildung $z \mapsto A_z$?

84. Bestimmen Sie den Rang und ggf. die Inverse von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

85. Stellen Sie die Matrizen A, B aus der Aufgabe oben und Ihre Inversen als Produkte von Elementarmatrizen $\in \{S(\alpha), Q_{ij}(\alpha), P_{ij}\}$ dar.

86. Bestimmen Sie die Matrix des Basiswechsels $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ für die Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von V, wobei

    (a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$.

    (b) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{A} = \left((x+1)^2, (x-1)^2, x^2\right)$, $\mathcal{B} = \left(1, x, x^2\right)$,

    (c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{A} = \left(1, x, x^2\right)$, $\mathcal{B} = (1, x, x(x-1))$,

    (d) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{A} = \left((x+1)^2, (x-1)^2, x^2\right)$, $\mathcal{B} = (1, x, x(x-1))$.

    (e) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $\mathcal{A} = \left(1, x, x^2, \ldots, x^n\right)$, $\mathcal{B} = \left((x-a)^j : j = 0, \ldots, n\right)$. Bestimmen Sie hierfür auch $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.

87. Bestimmen Sie invertierbare Matrizen S und T so dass $S \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} T^{-1}$ möglichst wenige von Null verschiedene Einträge enthält.

88. Zeigen Sie, dass die Menge der $n \times n-$Matrizen P über einem Körper K, die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einen Eintrag 1 und sonst nur Einträge 0 haben eine Gruppe bilden. Zu welcher Ihnen bekannten Gruppe ist diese isomorph? Wie funktioniert die Matrixinversion in dieser Untergruppe?

89. Betrachten Sie den Operator $D\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $f \mapsto f - x \cdot f' = 0$. Geben Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme $Df = 0$, $Df = x^2 + x + 1$ und $Df = (x^2+1)^2$ als affine Unterräume von $\mathbb{R}_n[x]$ an.

90. Es seien drei Ebenen $E_i, i \in \{1, 2, 3\}$ im Raum $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $E_i = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon a_i x = b_i\}$, $0 \neq a_i \in \mathbb{R}^{1\times 3} \cong \left(\mathbb{R}^3\right)^*$ (Normalenvektoren). Wir setzen

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ A^{(ij)} = \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},\ b^{(ij)} = \begin{pmatrix} b_i \\ b_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, 1 \leq i < j \leq 3.$$

    Charakterisieren Sie alle möglichen Lagen, die drei Ebenen zueinander haben können mit Hilfe der Ränge $r = \text{Rang } A$, $r' = \text{Rang } [A|b]$, $r_{ij} = \text{Rang } A^{(ij)}$ und $r'_{ij} = \text{Rang } \left[A^{(ij)}|b^{(ij)}\right]$ (z.B. sind alle drei parallel und $E_1 = E_2 \neq E_3 \Leftrightarrow r = 1 = r_{12}, r' = 2.$).

Hausaufgabe 11

Abgabe: 5.5.2015 in der Übung

55. Es seien die Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von $V = \mathbb{C}_n[x]$ gegeben wobei $\mathcal{A} = \big((x-a)^j : j = 0, \ldots, n\big)$ und $\mathcal{B} = \big((x-b)^j : j = 0, \ldots, n\big)$, $a, b \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ und $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

56. Bestimmen Sie die Matrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ des Basiswechsels von der Basis $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}\right)$ zur Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

57. Bestimmen Sie den Rang folgender reeller Matrizen A und geben Sie eine Basis von Ker A an sowie Lös(A, b) als affinen Unterraum.

    (a) $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 5 & 5 & 12\\ 1 & 1 & 3 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 8 & 8 & 12\end{bmatrix}, b = \begin{pmatrix}24\\19\\32\end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & -2 & 4\end{bmatrix}, b = \begin{pmatrix}15\\7\\7\end{pmatrix}$

    Bestimmen Sie ferner jeweils S und T so, dass SAT^{-1} genau Rang A viele 1en und sonst nur 0en enthält.

58. Es seien drei Geraden $G_i, i \in \{1, 2, 3\}$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $G_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon a_i x = b_i\}$, $0 \neq a_i \in \mathbb{R}^{1\times 2} \cong \big(\mathbb{R}^2\big)^*$ (Normalenvektoren). Wir setzen

    $$A = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},\ b = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ A^{(ij)} = \begin{bmatrix}a_i\\a_j\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ b^{(ij)} = \begin{pmatrix}b_i\\b_j\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, 1 \le i < j \le 3.$$

    Charakterisieren Sie alle möglichen Lagen, die drei Geraden zueinander haben können mit Hilfe der Ränge $r = \text{Rang } A$, $r' = \text{Rang } [A|b]$, $r_{ij} = \text{Rang } A^{(ij)}$ und $r'_{ij} = \text{Rang } \big[A^{(ij)}|b^{(ij)}\big]$.

59. Sei $D \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ gegeben durch $f \mapsto xf' + xf'' + xf'''$. Bestimmen Sie $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D)$ für $\mathcal{B} = \big((x+1)^2, x^2, (x-1)^2\big)$.

60. Eine lineare Abbildung $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, wobei

    $$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right),\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

    ist, die Darstellungsmatrix

    $$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

    Bestimmen Sie $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(F)$ für die Standardbasen $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{E}_2$.

Übung 15

91. Gegeben sei ein Gleichungssystem in Zeilenstufenform wie im Abschnitt “Parametrisierte Form des Lösungsraums”. Dort ist eine Basis des Lösungsraumes des homogenen Systems angegeben als Spalten einer gewissen Matrix $\begin{bmatrix} -C \\ I_{n-r} \end{bmatrix}$. Wie rechnet man diese konkret aus z.B. für $Ax = 0$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}?$$

Wie würde man praktisch weiter vorgehen um $\text{Lös}(A, b)$ in parametrisierter Form zu erhalten, z.B. für $b = \begin{pmatrix} 22 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$?

92. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ eine quadratische Matrix über einem Körper K. Zeigen Sie: Genau dann gilt Rang $A = r$, wenn es Matrizen $X \in M_{n\times r}(K)$ und $Y \in M_{r\times n}(K)$ gibt mit Rang $X = r =$ Rang Y und $A = XY$.

93. Zeigen Sie, dass ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit über dem Körper der komplexen Zahlen mit m Gleichungen in n Unbekannten ($A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $x \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^m$) äquivalent ist zu einem linearen reellen System mit $2m$ Gleichungen und $2n$ Unbekannten. Stellen Sie ein reelles System auf für

$$\begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & 2+\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1+2\mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+8\mathbf{i} \\ 9\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

94. Sind die Matrizen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ äquivalent oder gar ähnlich?

95. Sei K ein Körper. Berechnen Sie die Inverse von $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$ mit dem Gauß-Verfahren. Welches Kriterium für Invertierbarkeit ergibt sich daraus?

Übung 16

96. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da die Einträge von A, B, C ganze Zahlen sind, kann man die Matrizen auch als Matrizen über den Restklassenringen $\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ auffassen, indem man einfach jeden Eintrag durch seine Restklasse (mod p) ersetzt. Was sind dann die Determinanten für $p = 2, 3, 5, 7$?

97. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden $n \times n$ Matrizen.

(a)
$$\begin{bmatrix} x & y & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & y \\ y & 0 & \dots & \dots & 0 & x \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n).$$

98. Berechnen Sie die Determinante von $V(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$ (Vandermonde-Determinante).

99. Berechnen Sie folgende Determinanten für reelle Parameter! Wann sind die Determinanten 0? Lassen sich die gefundenen Formeln in Ihrer vereinfachten Form verallgemeinern (ggf. und wie?) ?

(a)
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & 2a & 2b \\ a^3 & b^3 & 3a^2 & 3b^2 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 12

Abgabe: 19.5.

61. Seien U, V, W endlichdimensionale K-Vektorräume und $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ linear. Zeigen Sie:
   (a) $\operatorname{Rang} g \circ f \leq \min\{\operatorname{Rang} f, \operatorname{Rang} g\}$.
   (b) Wenn $\operatorname{Rang} g = \dim V$ und $\operatorname{Rang} f = r$ gilt, dann ist $\operatorname{Rang} g \circ f = r$.

62. In der Vorlesung hatten wir eine kleine Bemerkung vergessen: Von den Elementarmatrizen braucht man nicht alle. Zeigen Sie:
   (a) $P_{ij} = S_j(-1)Q_{ij}(1)Q_{ji}(-1)Q_{ij}(1)$.
   (b) $Q_{ij}(\alpha) = S_j(\alpha^{-1})Q_{ij}(1)S_j(\alpha)$.

63. Lösen Sie mit der Cramer'schen Regel und zwar nur mit der Cramer'schen Regel und **nicht** mit dem Gauß-Verfahren:

   (a) $\begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & 2+\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1+2\mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+8\mathbf{i} \\ 9\mathbf{i} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 35 \\ 45 \end{pmatrix}$

   Bestimmen Sie ferner die Inversen der Koeffizientenmatrizen obiger Systeme mit Hilfe der Adjunkten/Komplementärmatrizen (Satz 6.14), **nicht** mit dem Gauß-Verfahren.

64. Wir betrachten die Folge $(D_n,\ n \geq 4)$ von $n \times n$-Matrizen

$$D_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Berechnen Sie

$$\det D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \ \det D_5 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

   raten Sie eine Formel für allgemeines n und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

65. Beweisen Sie: Zu gegebenem Körper $(K, +, \cdot)$ und $a, b, c, d, a', b', c', d' \in K$ gibt es genau dann genau ein Polynom p vom Grad drei, welches $p(a) = a'$, $p(b) = b'$, $p(c) = c'$ und $p(d) = d'$ erfüllt, wenn keine zwei der Körperelemente a, b, c und d gleich sind. Hinweis: Sie dürfen (und sollten) das Ergebnis von Aufgabe 98 benutzen.

Übung 17

100. Bekanntlich (vgl. Aufgabe 26) kann man zu zwei ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ ein (eindeutig bestimmtes) Paar $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, \ldots, |b| - 1\}$ finden mit $a = q \cdot b + r$ (Division mit Rest). Satz 7.4 und sein Beweis gelten natürlich auch für ganze Zahlen, die Gradfunktion deg ist dabei durch den Betrag $|\cdot|$ zu ersetzen. Wenden Sie den Euklidischen Algorithmus aus dem Beweis von Satz 7.4 an um

    (a) ganze Zahlen p, q mit $138p + 48q = \mathrm{ggT}(138, 48)$ zu finden,

    (b) das multiplikative Inverse der Restklasse von 89 modulo 17 zu berechnen (sofern dieses existiert, versteht sich).

101. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$. Zeigen Sie: Im Restklassenring $\left(\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}, +, \cdot\right)$ ist die Restklasse $[a]$ von $a \in \mathbb{Z}$ genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$ ist.

102. Dividieren Sie $f = 6z^4 + 15z^3 + 15z^2 + 10z + 4$ durch $g = 2z^2 + z + 1$ mithilfe des Algorithmus im Beweis von Satz 7.1. Bestimmen Sie ferner $d = \mathrm{ggT}(f, g)$ und Polynome p, q mit $pf + qg = d$ mit dem Euklidischen Algorithmus.

103. Sei K ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über K und $p \in K[x]$ mit $\deg p > 0$. Wir definieren die Relation $\equiv \pmod{p}$ auf $K[x]$ durch
$$f \equiv g (\mathrm{mod}\ p) \Leftrightarrow p|(f - g),$$
vgl. Aufgabe 26. Zeigen Sie:

    (a) $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse von f wird mit $[f]$ bezeichnet.

    (b) Die Äquivalenzklasse von $f \in K[x]$ ist von der Form $[f] = f + pK[x]$ und enthält genau ein Polynom vom Grad $< \deg p$.

    (c) Die auf der Menge der Äquivalenzklassen $K[x]_{/\equiv}$ definierten Verknüpfungen
    $$[f] \oplus [g] = [f + g] \text{ und } [f] \odot [g] = [f \cdot g]$$
    sind wohldefiniert und $\left(K[x]_{/\equiv}, \oplus, \odot\right)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement.

    (d) $K[x]_{/\equiv}$ ist genau dann ein Körper, wenn p irreduzibel ist.

    (e) Für $K = \mathbb{F}_2$, den Körper mit 2 Elementen und $p = x^2 + x + 1$ ist $K[x]_{/\equiv}$ ein Körper mit 4 Elementen.

    (f) Welcher Ihnen bekannte Körper ergibt sich für $K = \mathbb{R}$ und $p = x^2 + 1$?

104. Zeigen Sie: Wenn $\deg f = n = \deg g$ ist, so gilt für die Polynome p, q mit $\mathrm{ggT}(f, g) = pf + qg$ aus dem Euklidischen Algorithmus: $\deg p < n$ und $\deg q < n$.

Hausaufgabe 13

Abgabe: 2.6.

66. Zeigen Sie, dass jedes (o.B.d.A normierte) Polynom mit reellen Koeffizienten und *ungeradem Grad* mindestens eine *reelle* Nullstelle hat.

67. Bestimmen Sie $d = \mathrm{ggT}(f, g)$ und p, q mit $d = pf + gq$, wobei

    (a) $f = 11704, g = 4123, p, q \in \mathbb{Z}$

    (b) $f = 8z^4 + 4z^3 - 12z^2 - 3z + 7, g = 2z^2 - 3z + 1, p, q \in \mathbb{R}[x]$.

68. Konstruieren Sie einen Körper mit 8 Elementen. (vgl. Aufgabe 103)

69. Seien $f_1, \ldots, f_n \in K[x]$ und $d = \mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_n)$. Zeigen Sie:

$$\{u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n \colon u_1, \ldots, u_n \in K[x]\} = \{vd \colon v \in K[x]\}.$$

70. Seien V ein 3- und W ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $F\colon V \to W$ habe bezüglich der Basen $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ von V und $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ von W die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen $\mathcal{A}'$ von V und $\mathcal{B}'$ von W (drücken Sie diese als Linearkombinationen der a_i bzw. b_i aus), so dass

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

71. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, sodass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist. Berechnen Sie dann A^n für $n \in \mathbb{Z}$. Dabei ist

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}$$

Übung 18

105. Berechnen Sie das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen, ihr Spektrum und zugehörigen Eigenräume und entscheiden Sie ob Sie diaginalisierbar sind. Geben Sie in diesem Fall eine Transformationsmatrix an.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1+\mathbf{i} \\ 1-\mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

106. Geben gegeben sei die Folge f_n durch die Rekursion $f_{n+1} = 3f_n - 2f_{n-1}, f_0 = 1, f_1 = 4$. Lösen Sie die Rekursionsgleichung wiefolgt.

(a) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\varphi \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

(gibt es eine, und wenn ja wieviele?) und geben Sie $A = \mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}(\varphi)$ an. Damit würde gelten $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \varphi^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von φ!

(c) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von φ. Bestimmen Sie $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^n)$ und die Koordinaten von $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis!

(d) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$ für allgemeines n bezüglich $\mathcal{B}$!

(e) Ermitteln Sie durch Rücktransformation auf die kanonische Basis die explizite Darstellung der Folge f_n!

107. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass $F \circ G$ und $G \circ F$ dieselben Eigenwerte haben.

108. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und seien $F, G \in \mathrm{End}(V)$. F und G heißen *simultan diagonalisierbar*, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt mit der Eigenschaft, dass sowohl $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$ als auch $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(G)$ eine Diagonalmatrix ist. Wir beweisen folgende Aussage:

F, G sind simultan diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ F, G sind beide diagonalisierbar und kommutieren, d.h. $F \circ G = G \circ F$.

Für die (schwierigere) Richtung "$\Leftarrow$" seien nun $\mu_1, \ldots, \mu_l$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von G und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die von F. Es gilt also nach Satz 8.15 (äquivalente Formulierungen der Diagonalisierbarkeit)

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Eig}(F, \lambda_i) = V = \bigoplus_{j=1}^{l} \mathrm{Eig}(G, \mu_j)$$

Arbeiten Sie nun folgende Punkte ab:

(a) Zeigen Sie, dass jedes $\mathrm{Eig}(F, \lambda_i)$ G-invariant ist.

(b) Sei w Eigenvektor von G zum Eigenwert μ_j und $w = w_1 + \ldots + w_k$ die nach Satz 3.28 *eindeutige* Zerlegung von w mit $w_i \in \mathrm{Eig}(F, \lambda_i)$ (direkte Summe!). Zeigen Sie: Für $i = 1, \ldots, k$ gilt $w_i \in \mathrm{Eig}(G, \mu_j)$.

(c) Konstruieren Sie eine Basis von $\mathrm{Eig}(G, \mu_j)$, die nur aus Eigenvektoren von F besteht, indem Sie $\mathrm{Eig}(G, \mu_j)$ als eine direkte Summe von geeigneten Untervektorräumen der $\mathrm{Eig}(F, \lambda_i), i = 1, \ldots, k$ darstellen.

Die Richtung "$\Rightarrow$" ist Hausaufgabe.

Hausaufgabe 14

Abgabe: Abgabe am 16.6.2015

72. Wir betrachten eine Zahlenfolge f_n, die der Rekursion $f_{n+3} = f_{n+1} - 2(f_{n+2} - f_n)$ genügt, $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 0$.

   (a) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so dass für alle $n \geq 2$ gilt
   $$\varphi \begin{pmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$
   (gibt es eine, und wenn ja wieviele?) und geben Sie $A = \mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}(\varphi)$ ($\mathcal{E}_3$ die Standardbasis) an. Damit würde gelten $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = \varphi^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

   (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von φ!

   (c) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von φ. Bestimmen Sie $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^n)$ und die Koordinaten von $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis!

   (d) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\begin{pmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$ für allgemeines n bezüglich $\mathcal{B}$!

   (e) Ermitteln Sie durch Rücktransformation auf die kanonische Basis die explizite Darstellung der Folge f_n!

73. Zeigen Sie die Richtung "$\Rightarrow$" in Aufgabe 108. Finden Sie außerdem eine Basis, die simultan die beiden Matrizen
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   diagonalisiert (d.h. eine invertierbare Matrix S mit: $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ beide Diagonalmatrizen).

74. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen. Geben Sie eine Basis aus Eigenvektoren an, falls es eine gibt. Falls nicht, ergänzen Sie die gefundenen (linear unabhängigen) Eigenvektoren zu einer Basis und berechnen Sie die Darstellungsmatrix bzgl. der so erhaltenen Basis.
   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   Die Eigenwerte sind beides mal (betragsmäßig handhabbare) ganze Zahlen.

75. Sei $A \in K^{n \times n}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass
   $$A^{-1} \in \operatorname{span}\left(I, A^k \colon k \in \mathbb{N}\right)$$
   und geben Sie eine solche Linearkombination an. (Tipp: Cayley-Hamilton).

76. Seien $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times m}$. Zeigen Sie: Für die charakteristischen Polynome P_{AB} von AB und P_{BA} von BA gilt die Gleichung
   $$\lambda^n P_{AB}(\lambda) = \lambda^m P_{BA}(\lambda),$$
   insbesondere also für $A, B \in K^{n \times n}$: $P_{AB} = P_{BA}$. Betrachten Sie dazu die beiden $(m+n) \times (m+n)$-Blockmatrizen C und D und ihre Produkte, wobei
   $$C = \begin{bmatrix} \lambda I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & \lambda I_n \end{bmatrix}.$$

Übung 19

109. Zeigen Sie den Rest von B 8.23: Sei m_F das Minimalpolynom von F, $u \in V$, $[u]_F = \operatorname{span}(F^i u, i \in \mathbb{N}_0)$ der von u erzeugte F-zyklische Unterraum und $m_{F,u}$ das gradkleinste *normierte* Polynom mit $m_{F,u}(F)u = 0$. Dann gilt

    (a) $m_{F,u} = 1 \Leftrightarrow u = 0$,

    (b) $f \in K[\xi] \wedge f(F)u = 0 \Rightarrow m_{F,u}|f$, insbesondere $m_{F,u}|m_F$,

    (c) für $n_u = \deg m_{F,u}$ ist $(u = F^0 u, Fu, \ldots, F^{n_u-1}u)$ eine Basis von $[u]_F$.

110. Sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$ der Flip-Operator. Was ist sein Minimalpolynom? Was kann man daraus über seine Eigenwerte schließen? Was können wir mit Hilfe des ersten Zerlegungssatzes 8.24 schließen?

111. Zeigen Sie: F ist genau dann diagonalisierbar, wenn sein Minimalpolynom $m_F(\xi)$ in Linearfaktoren zerfällt und nur *einfache* Nullstellen hat.

112. Vollziehen Sie Satz 8.24 (Erster Zerlegungssatz) nach am Beispiel der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

nach, mit allem was dazu gehört, d.h. Minimalpolynom, Basen der invarianten Unterräume etc..

113. Finden Sie A- (bzw. B-)zyklische Unterräume maximaler Dimension (= deg Minimalpolynom) für die reellen Matrizen A und B (bleiben Sie dabei im Reellen, es gibt nur komplexe Eigenwerte). Vollziehen Sie Satz 8.25 und 8.27 der Vorlesung nach. Am Beispiel von B vollziehen Sie den zweiten Zerlegungssatz nach.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}.$$

Übung 20

114. **Vefahren zur Bestimmung der Normalmatrix, einer Transformationsmatrix, und der elementaren Divisoren**

Input: Matrix (Endomorphismus) A und die irreduziblen Faktoren $p_1(\xi), \ldots, p_k(\xi)$ von $m_A(\xi)$ (bzw. $P_A(\xi)$, vgl. 8.35)
Output: $(r_1, \ldots, r_k)$ mit $m_A(\xi) = p_1(\xi)^{r_1} \cdots p_k(\xi)^{r_k}$, die elementaren Divisoren mit ihren Vielfachheiten und folglich die allgemeine Normalmatrix, eine Basis $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(A) =$ Normalmatrix, bzw. S mit $S^{-1}AS =$Normalmatrix.

Initialisierung: $\mathcal{S} = \emptyset$ ($\mathcal{S}$ enthält am Ende eine Basis mit $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(A) =$ Normalmatrix, bzw. die Spalten einer Transformationsmatrix)
Verfahren: Für jedes $p(\xi) \in \{p_1(\xi), \ldots, p_k(\xi)\}$ setze

$$q = \deg p(\xi)$$

und führe die folgenden Schritte (a) und (b) durch:

(a) Bestimme linear unabhängige Mengen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall\, j \geq 1: \ \text{Ker } p(A)^j = \text{span}(\mathcal{U}_1) \oplus \ldots \oplus \text{span}(\mathcal{U}_j).$$

Ferner setze

$$r = \min\{j \geq 1, \mathcal{U}_j = \emptyset\} - 1.$$

Dann ist r die Vielfachheit von $p(\xi)$ in $m_A(\xi)$. Weiter definiere $D(j)$ durch

$$D(r) = \frac{|\mathcal{U}_r|}{q} \text{ und } D(j) = \frac{|\mathcal{U}_j|}{q} - D(j+1) - \ldots - D(r).$$

Falls $p(\xi) = \xi - \lambda$ (d.h. $q = 1$), dann gibt $D(j)$ die Anzahl der Jordanblöcke der Größe j zum Eigenwert λ an. Allgemein gibt $D(j)$ die Anzahl der $jq \times jq$-Blöcke $M(d)$ an, die zum Elementardivisor $d = p(\xi)^j$ gehören, vgl. Satz 8.35.

Bemerkungen: *i)* Ker $p(A) \subsetneq$ Ker $p(A)^2 \subsetneq \ldots \subsetneq$ Ker $p(A)^{r-1} \subsetneq$ Ker $p(A)^r =$ Ker $p(A)^{r+1} = \ldots$, und $\mathcal{U}_1$ ist eine Basis von Ker $p(A)$, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ eine Basis von Ker $p(A)^2$ und allgemein ergänzt $\mathcal{U}_i$ die bisher gewonnene Basis von Ker $p(A)^{i-1}$, zu einer von Ker $p(A)^i$.

ii) Ist man also nur an der Gestalt der Normalmatrix (z.B. beim Ähnlichkeitsproblem) interessiert, kann man Schritt (b) überspringen und zum nächsten Primteiler übergehen.

Das Verfahren zur Bestimmung der Transformationsmatrix geben wir zunächst nur für den Fall an, dass alle $p(\xi)$ Linearfaktoren sind, also ab jetzt

$$p(\xi) = \xi - \lambda \text{ und } q = 1.$$

(b) Setze $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \ldots = \mathcal{V}_r = \emptyset$.
Für $m = r, \ldots, 1$ führe folgende Schritte durch

  i. Ergänze die linear unabhängige Menge $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{m-1} \cup \mathcal{V}_m$ durch eine ($D(m)$-elementige) Menge $\mathcal{W}_m$ zu einer Basis von Ker $(A - \lambda I)^m$, etwa durch $D(m)$ geeignete Elemente aus $\mathcal{U}_m$.

  ii. Für jedes $v \in \mathcal{W}_m$:

$$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{v, (A - \lambda I)v, \ldots, (A - \lambda I)^{m-1}v\}$$
$$\text{und für } i = 0, \ldots, m-1: \mathcal{V}_{m-i} \leftarrow \mathcal{V}_{m-i} \cup \{(A - \lambda I)^i v\}$$

Bemerkungen: *i)* Im ersten Durchlauf der Schleife in Schritt (b) (d.h. $m = r$) wählt man direkt $\mathcal{W}_r = \mathcal{U}_r$. In späteren Durchläufen kann auch $\mathcal{W}_m = \emptyset$ vorkommen (nämlich, wenn $D(m) = 0$ ist).
ii) In der Schleife in Schritt (b) wird insbesondere $\mathcal{W}_m$ zu $\mathcal{V}_m$ zugefügt, so dass nach den r Schleifendurchläufen gilt

$$\forall\, j \geq 1: \ \text{Ker } p(A)^j = \text{span}(\mathcal{V}_1) \oplus \ldots \oplus \text{span}(\mathcal{V}_j).$$

Für $v \in \mathcal{W}_k$ nennt man $\{v, (A - \lambda I)v, \ldots, (A - \lambda I)^{k-1}v\}$ *Jordan-Kette* der Länge k. Jedes $v \in \mathcal{V}_k \setminus \mathcal{W}_k$ liegt auf genau einer Jordan-Kette einer Länge $k + l$ für ein $l \geq 1$, d.h. es gibt $w \in \mathcal{W}_{k+l} \subseteq \mathcal{V}_{k+l}$ mit $(A - \lambda I)^l w = v$. Die Updates von $\mathcal{V}_k$ in jedem Schleifendurchlauf kann man als Austausch von geeigneten Basisvektoren in $\mathcal{U}_k$ gegen die zu $\mathcal{V}_k$ hinzugefügten Elemente interpretieren, denn im Schritt $m = k$ wird $\mathcal{U}_k$ nicht mehr betrachtet!
iv) Schreibt man die Jordan-Ketten in der angegebenen Reihenfolge (d.h. beginnend mit v) in die Basis $\mathcal{S}$, so stehen die 1en in den Jordanblöcken *unterhalb* der Diagonalen.
v) Für allgemeines $p(\xi)$ vom Grade q lautet Schritt (b) wiefolgt:

(b) Für $m = r, \dots, 1$ führe folgende Schritte durch

i. Ergänze die linear unabhängige Menge $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \dots \cup \mathcal{U}_{m-1} \cup \mathcal{V}_m$ durch eine Menge $\mathcal{W}_m$ zu einer Basis von Ker $p(A)^m$, wobei man geeignete Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_{D(m)}$ wählt, so dass

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_m = \{&v_1, Av_1, \dots, A^{q-1}v_1,\\ &v_2, Av_2, \dots, A^{q-1}v_2,\\ &\vdots\\ &v_{D(m)}, Av_{D(m)}, \dots, A^{q-1}v_{D(m)}\}\end{aligned}$$

(es ist $|\mathcal{W}_m| = qD(m)$).

ii. Für jedes $v \in \{v_1, v_2, \dots, v_{D(m)}\}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{&v, Av, \dots, A^{q-1}v,\\ &p(A)v, p(A)Av, \dots, p(A)A^{q-1}v,\\ &\vdots\\ &p(A)^{m-1}v, p(A)^{m-1}Av, \dots, p(A)^{m-1}A^{q-1}v\}\end{aligned}$$

und für $i = 0, \dots, m-1$:

$$\mathcal{V}_{m-i} \leftarrow \mathcal{V}_{m-i} \cup \{p(A)^i v, p(A)^i Av, \dots, p(A)^i A^{q-1}v\}$$

115. Wenden Sie das Verfahren auf die folgende Matrix A an.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

116. Begründen Sie, dass das Verfahren funktioniert. (Es ist weniger nach einem Beweis als nach einer kleinen Tour durch die entsprechenden Sätze gefragt...)

117. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit reellen Einträgen und sei $\lambda \neq \bar{\lambda}$ ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte von A. Wie hängen $\mathrm{Hau}(A, \lambda)$ und $\mathrm{Hau}(A, \bar{\lambda})$ zusammen?

Alternativer Beweis des zweiten Zerlegungssatzes 8.31. Sei also $A\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $m_A(\xi) = p(\xi)^r$ für ein irreduzibles Polynom $p \in K[\xi]$. Wir führen zunächst die Notationen ein die wir im Folgenden häufig gebrauchen.

$$q = \deg p(\xi), \quad p(\xi) = a_0 + a_1^{\xi} + \ldots + a_{q-1}\xi^{q-1} + \xi^q \text{ und } B = p(A).$$

Wegen $m_A(\xi) = p(\xi)^r$ gilt

$$\text{Ker } B \subsetneq \text{Ker } B^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \text{Ker } B^{r-1} \subsetneq \text{Ker } B^r = V.$$

Die Striktheit der Inklusionen folgt aus der Existenz eines Elementes u mit $m_{A,u} = m_A$ (Satz 8.25) Für dieses gilt ja für $0 \leq i \leq r-1 : B^i u \in \text{Ker } B^{r-i} \setminus B^{r-i-1}$. Es seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_r$ linear unabhängige Mengen mit der Eigenschaft, dass

$$\forall\, j \geq 1 : \text{ Ker } B^j = \text{span}(\mathcal{U}_1) \oplus \ldots \oplus \text{span}(\mathcal{U}_j). \tag{1}$$

Es ist also $\mathcal{U}_1$ ist eine Basis von Ker B, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ eine Basis von Ker B^2 und allgemein ergänzt $\mathcal{U}_i$ die bisher gewonnene Basis von Ker B^{i-1} zu einer von Ker B^i. Insbesondere ist jedes $\mathcal{U}_i \neq \emptyset$ und es gilt

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \text{span}(\mathcal{U}_i) \tag{2}$$

$$\forall u_i \in \mathcal{U}_i \colon m_{A,u_i}(\xi) = p(\xi)^i. \tag{3}$$

Die Basis $\bigcup_{i=1}^r \mathcal{U}_i$ wird nun sukzessive in eine “strukturierte” Basis $\bigcup_{i=1}^r \mathcal{V}_i$ getauscht, so dass (1) auch für die $\mathcal{V}_j$ gilt und zusätzlich folgende “Ketteneigenschaft” erfüllt ist

$$v \in \mathcal{V}_{j+1} \Rightarrow Bw \in \mathcal{V}_j,\ j = 1, \ldots, r-1 \tag{4}$$

und jedes $\mathcal{V}_j$ folgende Form hat (Für $\deg p = q = 1$ trivialerweise erfüllt)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_j = \Big\{ & v_1^{(j)}, Av_1^{(j)}, \ldots, A^{q-1}v_1^{(j)}, \\ & v_2^{(j)}, Av_2^{(j)}, \ldots, A^{q-1}v_2^{(j)}, \\ & \quad\vdots \\ & v_{i_j}^{(j)}, Av_{i_j}^{(j)}, \ldots, A^{q-1}v_{i_j}^{(j)} \Big\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Dass (4) erreicht werden kann, garantiert das folgende Lemma 1. Lemma 2 stellt sicher, dass (5) erzielt werden kann.

Lemma 1: Sei $1 \leq m \leq r-1$, $B := B$, $\mathcal{U}_m = \{u_1^{(m)}, \ldots, u_K^{(m)}\}$, $\mathcal{U}_{m+1} = \{u_1^{(m+1)}, \ldots, u_L^{(m+1)}\}$ und $v_i^{(m)} = Bu_i^{(m+1)}$, $i = 1, \ldots, L$. Dann ist $L \leq K$ und nach geeigneter Umnummerierung der $u_i^{(m)}$ kann in (1) $\mathcal{U}_m$ durch $\widetilde{\mathcal{U}}_m = \{v_1^{(m)}, \ldots, v_L^{(m)}, u_{L+1}^{(m)}, \ldots, u_K^{(m)}\}$ ersetzt werden, d.h. es gilt

$$\text{Ker } B^m = \text{span}(\mathcal{U}_1) \oplus \ldots \oplus \text{span}(\mathcal{U}_{m-1}) \oplus \text{span}(\mathcal{U}_m) = \text{span}(\mathcal{U}_1) \oplus \ldots \oplus \text{span}(\mathcal{U}_{m-1}) \oplus \text{span}(\widetilde{\mathcal{U}}_m). \quad \square$$

Lemma 2: Seien $\mathcal{U}_j$, $j = 1, \ldots, m-1$ gemäß (1) gewählt. Es gebe $i \geq 0$ Elemente $v_1, \ldots, v_i \in \text{Ker } B^m \setminus \text{Ker } B^{m-1}$, so dass mit

$$\mathcal{U}_m^{(i)} = \{v_l, Av_l, \ldots, A^{q-1}v_l, l = 1, \ldots, i\}$$

die Menge $\mathcal{H}_i = \bigcup_{j=1}^{m-1} \mathcal{U}_j \cup \mathcal{U}_m^{(i)}$ linear unabhängig ist. Gibt es $v_{i+1} \in \text{Ker } B^m \setminus \text{span}(\mathcal{H}_i)$, dann definieren wir entsprechend $\mathcal{U}_m^{(i+1)} = \mathcal{U}_m^{(i)} \cup \{v_{i+1}, Av_{i+1}, \ldots, A^{q-1}v_{i+1}\}$ und

$$\mathcal{H}_{i+1} = \mathcal{H}_i \cup \{v_{i+1}, Av_{i+1}, \ldots, A^{q-1}v_{i+1}\} = \bigcup_{j=1}^{m-1} \mathcal{U}_j \cup \mathcal{U}_m^{(i+1)}$$

Dann ist $\mathcal{H}_{i+1}$ linear unabhängig. Insbesondere kann man jedes $\mathcal{U}_m$ als eine Menge $\mathcal{U}_m = \mathcal{U}_m^{(i_r)}$ konstruieren, wobei beginnend mit $\mathcal{U}_m^{(0)} = \emptyset$ schrittweise $\mathcal{U}_m^{(i+1)}$ wie oben aus $\mathcal{U}_m^{(i)}$ gewonnen wird. ($\Rightarrow q \mid |\mathcal{U}_m| \,\forall\, m$). $\square$

Die Beweise der beiden Lemmata reichen wir unten nach. Wir konstruieren nun die oben angekündigte Basis $\bigcup_{j=1}^r \mathcal{V}_j$ und zeichnen dabei noch eine bestimmte (möglicherweise leere) Teilmenge $\mathcal{E}_m$ von $\mathcal{V}_m$ aus (die zyklischen $\mathcal{E}$rz$\mathcal{E}$ug$\mathcal{E}$r). Dazu bestimmen wir zunächst irgendwelche linear unabhängige Mengen $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_{r-1}$ die (1) erfüllen. Wir konstruieren $\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_r^{(i_r)}$ gemäß Lemma 2 und setzen

$$\mathcal{V}_r = \mathcal{U}_r = \{v_1^{(r)}, Av_1^{(r)}, \ldots, A^{q-1}v_1^{(r)}, \ldots, v_{i_r}^{(r)}, Av_{i_r}^{(r)}, \ldots, A^{q-1}v_{i_r}^{(r)}\}.$$

und

$$\mathcal{E}_r = \{v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, \ldots, v_{i_r}^{(r)}\}.$$

Damit hat $\mathcal{V}_r$ die Eigenschaft (5). Die Mengen $\mathcal{V}_j$, $j = r-1, \ldots, 1$ werden nun induktiv definiert. Seien dazu für $j \leq r-1$ die Mengen $\mathcal{V}_r, \ldots, \mathcal{V}_{j+1}$ bereits so konstruiert, dass (4) und (5) erfüllt sind, also insbesondere

$$\mathcal{V}_{j+1} = \{v_1^{(j+1)}, Av_1^{(j+1)}, \ldots, A^{q-1}v_1^{(j+1)}, \ldots, v_{i_{j+1}}^{(j+1)}, Av_{i_{j+1}}^{(j+1)}, \ldots, A^{q-1}v_{i_{j+1}}^{(j+1)}\}.$$

Jetzt definieren wir $\mathcal{U}_j^{(i_{j+1})} \subseteq \text{Ker } B^j \setminus \text{Ker } B^{j-1}$ durch

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_j^{(i_{j+1})} = B\mathcal{V}_{j+1} &= \{Bv_1^{(j+1)}, BAv_1^{(j+1)}, \ldots, BA^{q-1}v_1^{(j+1)}, \ldots, Bv_{i_{j+1}}^{(j+1)}, BAv_{i_{j+1}}^{(j+1)}, \ldots, BA^{q-1}v_{i_{j+1}}^{(j+1)}\} \\ &= \{Bv_1^{(j+1)}, ABv_1^{(j+1)}, \ldots, A^{q-1}Bv_1^{(j+1)}, \ldots, Bv_{i_{j+1}}^{(j+1)}, ABv_{i_{j+1}}^{(j+1)}, \ldots, A^{q-1}Bv_{i_{j+1}}^{(j+1)}\}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 1 ist $\mathcal{U}_j^{(i_{j+1})}$ linear unabhängig. Wir ergänzen $\bigcup_{l=1}^{j-1} \mathcal{U}_l \cup \mathcal{U}_j^{(i_{j+1})}$ gemäß Lemma 2 zu einer Basis von Ker B^m mit einer (evtl. leeren) Menge

$$\mathcal{W}_j = \{v_{i_{j+1}+1}^{(j)}, Av_{i_{j+1}+1}^{(j)}, \ldots, A^{q-1}v_{i_{j+1}+1}^{(j+1)}, \ldots, v_{i_j}^{(j)}, Av_{i_j}^{(j)}, \ldots, A^{q-1}v_{i_j}^{(j)}\}$$

und setzen $\mathcal{V}_j = \mathcal{U}_j^{(i_{j+1})} \cup \mathcal{W}_j$ und $\mathcal{E}_j = \{v_{i_{j+1}+1}^{(j)}, v_{i_{j+1}+2}^{(j)}, \ldots, v_{i_j}^{(j)}\}$. Damit hat $\mathcal{V}_j$ die Eigenschaft (5) und die Kettenbedingung (4) ist für $\mathcal{V}_j$ und $\mathcal{V}_{j+1}$ erfüllt. Damit sind die $\mathcal{V}_j$ konstruiert. Die Eigenschaft (1) ist auch für $\bigcup_{m=1}^r \mathcal{V}_m$ erfüllt, denn nach Konstruktion hat jedes Tupel $(\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_{j-1}, \mathcal{V}_j, \ldots, \mathcal{V}_r)$, $j = r, \ldots, 1$ die Eigenschaft (1).

Diese neue Basis $\bigcup_{m=1}^r \mathcal{V}_m$ von V kann man schreiben als

$$\bigcup_{m=1}^r \mathcal{V}_m = \bigcup_{m=1}^r \bigcup_{w \in \mathcal{E}_m} \underbrace{\{\underbrace{w, Aw, \ldots, A^{q-1}w}_{\in \mathcal{V}_m}, \underbrace{Bw, BAw, \ldots, BA^{q-1}w}_{\in \mathcal{V}_{m-1}}, \ldots, \underbrace{B^{m-1}w, B^{m-1}Aw, \ldots, B^{m-1}A^{q-1}w}_{\in \mathcal{V}_1}\}}_{=: \mathcal{B}_w}.$$

Es ist nach (3) $m_{A,w}(\xi) = p(\xi)^m$ für alle $w \in \mathcal{E}_m$ $(\subseteq \mathcal{V}_m)$ und mit Beobachtung 8.23(d) und Lemma 8.26 ist

$$[w]_A \overset{8.23(d)}{=} \text{span}(w, Aw, \ldots, A^{qm-1}w) \overset{8.26}{=} \text{span}(\mathcal{B}_w)$$

und daher

$$V = \bigoplus_{m=1}^r \bigoplus_{w \in \mathcal{E}_m} [w]_A,$$

eine Darstellung von V als direkte Summe A-zyklischer Unterräume, was die Existenzaussage im zweiten Zerlegungssatz zeigt. Die Anzahlen der $w \in \bigcup_{m=1}^r \mathcal{E}_m$ mit $m_{A,w}(\xi) = p(\xi)^i$ sind dabei genau gleich

$$|\mathcal{E}_r| = \frac{1}{q}|\mathcal{V}_r|, \quad |\mathcal{E}_i| = \frac{1}{q}\left(|\mathcal{V}_i| - |\mathcal{V}_{i+1}|\right) \quad \left(= \frac{1}{q}\left(|\mathcal{U}_i| - |\mathcal{U}_{i+1}|\right)\right), \ i = r-1, \ldots, 1.$$

In der Summe liefert dies (Teleskopsumme!)

$$|\mathcal{E}_r| + \ldots + |\mathcal{E}_j| = \frac{1}{q}|\mathcal{V}_j| = \frac{1}{q}\left(\dim \text{Ker } B^j - \dim \text{Ker } B^{j-1}\right) = \frac{1}{q}\left(\text{Rang } B^{j-1} - \text{Rang } B^j\right)$$

und diese Ränge sind eindeutig durch A festgelegt. (Das letzte "=" ist die Dimensionsformel $\dim V = n = \text{Rang } B^m + \dim \text{Ker } B^m$) Damit ist der Beweis von 8.31 abgeschlossen. $\square$

Beweis von Lemma 1: Es sei $\mathcal{U}_m^{(i)} = \{v_1^{(m)}, \ldots, v_i^{(m)}, u_{i+1}^{(m)}, \ldots, u_K^{(m)}\}$ die Menge nach i Austauschschritten (evtl. nach Umnummerieren), also $\widetilde{\mathcal{U}}_m = \mathcal{U}_m^{(L)}$. Wir zeigen dass für jedes $i = 0, \ldots, L$

$$\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathcal{U}_j \cup \mathcal{U}_m^{(i)}$$

eine Basis von Ker B^m ist durch Induktion nach i. Für $i = 0$ ist $\mathcal{U}_m^{(0)} = \mathcal{U}_m$ und dies nach Konstruktion erfüllt.
$\underline{i-1 \to i:}$ Nach Konstruktion ist $Bu_i^{(m+1)} = v_i^{(m)} \in \text{Ker}B^m \setminus \text{Ker}B^{m-1}$. Nach Induktionsannahme hat $v_i^{(m)}$ somit eine eindeutige Darstellung in der Basis $\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathcal{U}_j \cup \mathcal{U}_m^{(i-1)}$, also

$$v_i^{(m)} = u_{m-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j v_j^{(m)} + \sum_{j=i}^{K} \beta_j u_j^{(m)}$$

mit einem eindeutigen $u_{m-1} \in \text{Ker}B^{m-1} = \text{span}(\mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{m-1})$. Ist eines der $\beta_j \neq 0$, dann kann man nach dem Austauschlemma von Steinitz dieses $u_j^{(m)}$ gegen $v_i^{(m)}$ austauschen und das Lemma ist bewiesen. Nehmen wir also für einen Widerspruch an, dass alle $\beta_j = 0$ sind und damit

$$u_{m-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j v_j^{(m)} - v_i^{(m)}$$

gilt. Dann gilt aber

$$0 = B^{m-1}u_{m-1} = B^{m-1}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j v_j^{(m)} - v_i^{(m)}\right) = B^m\left(\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j u_j^{(m+1)} - u_i^{(m+1)}\right),$$

d.h. $\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j u_j^{(m+1)} - u_i^{(m+1)} \in \mathrm{Ker}B^m \cap \mathrm{span}(\mathcal{U}_{m+1}) = \{0\}$ (direkte Summe in (1)), Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Menge $\mathcal{U}_{m+1}$. Für mindestens ein $j \geq i$ gilt daher $\beta_j \neq 0$. Nach eventueller Umnummerierung können wir also $u_i^{(m)}$ gegen $v_i^{(m)}$ austauschen und das Lemma 1 ist gezeigt. $\square$

Beweis von Lemma 2: Wir zeigen zunächst: $\underline{\mathrm{span}(\mathcal{H}_i) \text{ ist } A\text{-invariant.}}$ Es ist $\mathrm{span}\left(\bigcup_{j=1}^{m-1}\mathcal{U}_j\right) = \mathrm{Ker}\ B^{m-1}$ A-invariant nach B. 8.17. Es reicht also zu zeigen, dass die Elemente aus $\mathcal{U}_m^{(i)}$ unter A nach $\mathrm{span}(\mathcal{H}_i)$ abgebildet werden. Für $j \leq q-2$ und $l \leq i$ ist $A(A^j v_l) \in \mathcal{U}_m^{(i)}$ und

$$A(A^{q-1}v_l) = A^q v_l = \underbrace{Bv_l}_{\in \mathrm{Ker}\ B^{m-1}} - \underbrace{(a_0 v_l + a_1 A v_l + \ldots + a_{q-1}A^{q-1}v_l}_{\in \mathrm{span}\left(\mathcal{U}_m^{(i)}\right)},$$

womit die A-Invarianz von $\mathrm{span}(\mathcal{H}_i)$ gezeigt ist.

Es gebe nun also $v = v_{i+1} \in \mathrm{Ker}\ B^m \setminus \mathrm{span}(\mathcal{H}_i)$. Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{H}_{i+1}$ durch Widerspruch. Dazu zeigen wir: $\underline{\mathcal{H}_{i+1} \text{ ist l.a.} \Rightarrow [v]_A \subseteq \mathrm{span}(\mathcal{H}_i).}$ Ist $\mathcal{H}_{i+1}$ l.a., dann gibt es $\beta_0, \ldots \beta_{q-1}$ nicht alle $= 0$ mit $w = \sum_{j=0}^{q-1}\beta_j A^j v \in \mathrm{span}\left(\mathcal{H}_i\right)$. Insbesondere gilt $w \in [v]_A$ und $w \neq 0$ da $v, Av, \ldots, A^{q-1}v$ l.u. sind nach B 8.23(d). Wegen der A-Invarianz von $\mathrm{span}\left(\mathcal{H}_i\right)$ gilt $[w]_A \subseteq \mathrm{span}\left(\mathcal{H}_i\right)$. Wir zeigen nun $\underline{[w]_A = [v]_A}$. Die Inklusion $[w]_A \subseteq [v]_A$ folgt aus $w \in [v]_A$ und der A-Invarianz von $[v]_A$. Die Gleichheit wird aus Dimensionsgründen wieder mit 8.23(d) folgen, wenn wir gezeigt haben, dass $\underline{m_{A,w}(\xi) = p(\xi)^m (= m_{A,v}(\xi))}$. Setze dazu $b(\xi) = \sum_{i=0}^{q-1}\beta_i \xi^i$, womit man $w = b(A)v$ schreiben kann. Weil ja $m_{A,v} = p^m$ ist, gilt $p(A)^m w = p(A)^m b(A)v = b(A)p(A)^m v = 0$. Weiter ist $p(A)^{m-1}w = p(A)^{m-1}b(A)v \neq 0$, denn andernfalls würde wegen 8.23(c) gelten $m_{A,v}(\xi) = p(\xi)^m \mid p(\xi)^{m-1}b(\xi)$, also $p(\xi)|b(\xi)$, was wegen $\deg b \leq q-1 < q = \deg p$ nicht stimmen kann.Damit folgt also $v \in [v]_A = [w]_A \subseteq$ $\mathrm{span}\left(\mathcal{H}_i\right)$ und somit der gewünschte Widerspruch, und Lemma 2 ist gezeigt. $\square$

Hausaufgabe 15

Abgabe: Abgabe am 30.6.

77. Sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$ der Flip-Operator. Geben Sie ergänzend zur Übung 110 Basen der Eigenräume an.

78. Sei $A \in K^{n\times n}$. Für ein $0 \le k \le n$ unterteilen wir A in Blöcke $A_{11} \in K^{k\times k}$, $A_{12} \in K^{k\times n-k}$, $A_{21} \in K^{n-k\times k}$ und $A_{22} \in K^{k\times n-k}$ und definieren damit A' wiefolgt

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie, dass A und A' dieselben Eigenwerte haben.

Tipp: Es ist zweckmäßig einen Eigenvektor $v \in K^n$ als $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ aufzufassen. Wie erhält man nun einen Eigenvektor von A' zum Eigenwert λ aus einem von A?

79. Berechnen Sie jeweils die Jordan'schen Normalform von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ -2 & 34 & 26 & 18 \\ 14 & 18 & -2 & 14 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

und eine Transformationsmatrix mit dem Verfahren aus 114.

Tipp: 1 ist ein Eigenwert von A.

80. Wenden Sie das Verfahren auf die Matrizen A und B aus Aufgabe 113 an um die Normalmatrizen und zugehörige Transformationsmatrizen zu bestimmen. Bleiben Sie reell, also verwenden Sie den "allgemeinen" Schritt b) zur Bestimmung der Transformationsmatrix.

Übung 21

118. Sei $p(\xi) = a_0 + a_1\xi + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1} + \xi^n$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

p sowohl als charakteristisches als auch als Minimalpolynom hat. Tipp: Betrachten Sie $m_{A,u}(\xi)$ für ein geeignetes u.

119. Bestimmen Sie die (komplexe) Jordan'sche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_{2\times 2} & & 0 \\ I_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0_{2\times 2} \\ 0 & & I_2 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2r\times 2r}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

und eine Transformationsmatrix.

Tipp: Für die Transformationsmatrix kann man die Blockstruktur ausnutzen: Transformieren Sie zunächst B mit einer 2×2-Matrix S auf "schöne" Gestalt! (Geht auch mit obigem Verfahren, ist hier aber anstrengender...)

120. Berechnen Sie J^K, wobei J ein Jordanblock der Größe n zum Eigenwert λ und $K \in \mathbb{N}_0$ ist.

Tipp: Binomische Formel.

121. Überprüfen Sie, ob $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ähnlich sind.

Übung 22

122. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ und $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

    (a) Zeigen Sie, dass durch $\langle v, w \rangle_A = w^T A v$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ erklärt ist.

    (b) Wie kann man mit Hilfe von A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ erklären? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

123. Zeigen Sie, dass im Lemma 9.10 $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_r, v) = \mathrm{span}\left(v_1, \ldots, v_r, \frac{u}{\|u\|}\right)$ gilt.

124. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^5$ und $u \in U$, so dass $\|e_1 - u\|$ minimal ist. Was ist $\dim U^\perp$? Berechnen Sie eine ONB von $U^\perp$.

125. Zeigen Sie für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$: $\mathrm{Spur}(A\bar{B}^T) \leq \mathrm{Spur}(A\bar{A}^T)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{Spur}(B\bar{B}^T)^{\frac{1}{2}}$.

126. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $\|a \times b\|$ gleich der Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist. Benutzen Sie die Identität $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a^T b)^2$ (wird in der HA gezeigt).

127. Sei $\mathbb{C}^2$ mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet. Eine lineare Abbildung $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ habe bezüglich der Basen $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \mathbf{i} \end{pmatrix}\right)$ und $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 + \mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 + \mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}\right)$ die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{bmatrix} 3 + \mathbf{i} & 9 - 2\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 9 \end{bmatrix}$. Finden Sie Basen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$, so dass $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(F^{\mathrm{ad}}) = \begin{bmatrix} 3 - \mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ 9 + 2\mathbf{i} & 9 \end{bmatrix}$.

Hausaufgabe 16

Abgabe: 14.7.

81. Überprüfen Sie, ob $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ ähnlich sind, und geben Sie ggf. eine Matrix S mit $S^{-1}AS = B$ an.

82. Zeigen Sie die Polarisierungsidentitäten aus Satz 9.5. Sei ferner für $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max(|x_i|\colon i = 1, \ldots, n)$ die Maximumnorm. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass es kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\|x\|_\infty^2 = \langle x, x \rangle \; \forall x \in \mathbb{R}^n$.

83. Für das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ zeigen Sie sie die Identität $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (a^T b)^2$.

84. Wir betrachten den Vektorraum $C[-1,1]$ mit dem Skalarprodukt $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ und der Norm $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

    (a) Zeigen Sie, dass $C[-1,1]$ die bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ orthogonale Summe von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$ ist, wobei

    $$\mathcal{G} = \{f \in C[-1,1] | f(x) = f(-x)\} \text{ und } \mathcal{U} = \{f \in C[-1,1] | f(x) = -f(-x)\}.$$

    (b) Sei $M_n = \operatorname{span}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(\pi m x), \cos(\pi m x), m = 1, \ldots, n\right)$. Approximieren Sie jeweils die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ bestmöglich (bezüglich $\|\cdot\|$) durch ein Element aus M_n. Hier können Sie nochmal feste partiell integrieren...

85. Gegeben seien zwei Geraden $G = \{a + \lambda u\colon \lambda \in \mathbb{R}\}, H = \{b + \mu v\colon \mu \in \mathbb{R}\}$ in einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle,\rangle)$ der Dimension $n \geq 3$ (von mir aus $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardprodukt, eh Wurscht wg. Fredholm 9.25). Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden, d.h. $\min\{\|x - y\|,\ x \in G, y \in H\}$. Dabei sei $\|\cdot\|$ die von $\langle,\rangle$ induzierte Norm. Wenn Sie wollen, dürfen Sie das als Extremwertaufgabe mit den Methoden der Analysis lösen. Das führt aufs selbe Gleichungssystem wie die Überlegung, wer da wo auf wem senkrecht stehen muss, damit der Abstand klein wird.

86. Zeigen Sie: Zu jeder reellen symmetrischen Matrix A und jeder ungeraden natürlichen Zahl n existiert eine reelle symmetrische Matrix B mit $B^n = A$. Bestimmen Sie eine Quadratwurzel von A und eine Kubikwurzel von B, d.h. symmetrische Matrizen C, D mit $C^2 = A$ und $D^3 = B$. Dabei sind

    $$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 59 & -38 \\ -38 & 116 \end{bmatrix}.$$

87. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, deren Elemente gleichzeitig Eigenvektoren von A und B sind, wobei

    $$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

    (Vgl. auch Übung 108 und HA 73)

Übung 23

128. Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie ferner alle $x \in \mathbb{R}^3$, so dass $\|Ax - e_1\|$ minimal wird.

129. Seien V, W endlichdimensionale euklidische oder unitäre Vektorräume und $F\colon V \to W$ linear. Zeigen Sie:
   (a) $\operatorname{Rang} F^{\mathrm{ad}} = \operatorname{Rang} F$.
   (b) $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f^{\mathrm{ad}} = V$ wobei die Summe orthogonal ist.

130. Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass $A\colon V \to V$ genau dann normal ist, wenn $\forall x \in V\colon \|Ax\| = \|A^*x\|$ gilt.

131. Zeigen Sie, dass $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{bmatrix}$ unitär ist ($\Leftrightarrow S^*S = I_2 \Leftrightarrow$Spalten ONB von $\mathbb{C}^2$) und dass $S^* \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} a + b\mathbf{i} & 0 \\ 0 & a - b\mathbf{i} \end{bmatrix}$. Zeigen Sie ferner, dass Permutationsmatrizen orthogonal sind. Bestimmen Sie die komplexe und die reelle Normalform von $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ gemäß Satz 9.35 inklusive unitärer und orthogonaler Transformationsmatrix.

132. Es seien V, W endlichdimensionale euklidische (oder unitäre) Vektorräume. Zeigen Sie, dass für das Bilden der adjungierten Abbildung

$$.^{\mathrm{ad}} : \operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(W, V),\ F \mapsto F^{\mathrm{ad}}$$

die Regeln $(F + G)^{\mathrm{ad}} = F^{\mathrm{ad}} + G^{\mathrm{ad}}$, $(\alpha F)^{\mathrm{ad}} = \bar{\alpha} F^{\mathrm{ad}}$ und $(F \circ G)^{\mathrm{ad}} = G^{\mathrm{ad}} \circ F^{\mathrm{ad}}$ $(G\colon U \to V, F\colon V \to W)$ gelten.

133. Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, dann kann man A auch als unitäre Matrix auffassen. Dann ist A (über $\mathbb{C}$) diagonalisierbar mit einer ONB aus Eigenvektoren. Wie kann man mit einem Ausflug ins Komplexe die reelle Normalform und eine entsprechende reelle ONB erhalten? Und wie ist das umgekehrt, wenn die reelle Normalform vorliegt und die Komplexe her muss?

134. Beweisen Sie den Satz von Euler: Jede orthogonale Abbildung A des $\mathbb{R}^3$ mit $\det A = 1$ ist eine Drehung um eine Achse.
   Auch Satz vom Fußall genannt: Auf der Oberfläche des Balles gibt zwei Punkte, die Zu Beginn jeder Halbzeit (zum Anstoß) an exakt derselben Stelle im umgebenden Raum liegen.