Analysis III

Wintersemester 2007/2008 **Prof. Dr. P. Stollmann**

Blatt 9 **Abgabe 20.12.2007**

Für $M \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in M$ definiere den *Tangentialkegel* von M in p durch

$$T_pM := \{\gamma'(0) | \gamma : (a,b) \to M \text{ stetig diffbar, } 0 \in (a,b), \gamma(0) = p\}$$

und den Normalenraum durch

$$N_pM := \{v \in \mathbb{R}^n | \text{ Für alle } y \in T_pM \text{ ist } (v|y) = 0\}.$$

1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:
   (a) Für $v \in T_pM$ und $c \in \mathbb{R}$ ist $cv \in T_pM$ und N_pM ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.
   (b) Ist M eine Umgebung von p, so gilt $T_pM = \mathbb{R}^n$.
2. Skizzieren Sie $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass $T_{(0,0)}K = \{(0,0)\}$. *Hinweis:* Nehmen Sie an, dass $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ stetig diffbar, $0 \in (a,b), \gamma(0) = (0,0)$ und $\gamma_1'(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann $\gamma(a,b) \not\subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\}$.
3. Skizzieren Sie $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \cdot y \geq 0\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $T_{(0,0)}M$ kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist (siehe den Hinweis zur vorherigen Aufgabe).
   (b) Berechnen Sie $N_{(0,0)}M$.
4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $d-$dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass $\Psi(M)$ eine $d-$dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.