Analysis III

Wintersemester 2007/2008 **Prof. Dr. P. Stollmann**

Blatt 7 **Abgabe 6.12.2007**

1. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie:

   (a) $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}} = \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum für alle $p \in [1, \infty]$.

   Beweis: Die Rechenregeln vererben sich vom Körper $\mathbb{K}$, sodass lediglich die Abgeschlossenheit zu zeigen ist. Seien dazu $u, v \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}$ Falls p endlich ist, gilt $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}} = \{f : X \mapsto \mathbb{K} \text{ messbar} \mid \ |f|^p \in \mathcal{L}^1\}$. Im Falle $p = \infty$ gilt $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}$ ist die Menge aller messbaren wesentlich beschränkten Funktionen. Da gemäß Lemma 3.7 alle messbaren Funktionen einen Vektorraum bilden, und offenbar auch alle wesentlich beschränkten Funktionen einen Vektorraum bilden (offenbar abgeschlossen bzgl. Linearkombinationen), ist der letztere Fall erledigt.

   Im ersten Fall wissen wir, dass $u + v$ messbar ist, damit auch $|u + v|$ und mithin auch $|u + v|^p$. Da $|u + v|^p \leq (|u| + |v|)^p \leq (2 \max |u|, |v|)^p \leq 2^p(|u|^p + |v|^p) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$ folgt mit Aufgabe 6.3 (iii $\Rightarrow$ i) auch $|u + v|^p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}$.

   Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{K}$:

   $$u \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}} \Rightarrow |u|^p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \Rightarrow |\lambda^p||u^p| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \Rightarrow |\lambda u|^p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}} \Rightarrow \lambda p \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}$$

   (b) $|| \cdot ||_p$ definiert eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$.

   Beweis:

   - Nichtnegativität: $|| \cdot ||_p$ ist nichtnegativ gemäss Definition (im Falle $p = \infty$) bzw. wegen $|f|^p \geq 0 \Longrightarrow \int\limits_X |f(x)|^p d\mu(x) \geq \int\limits_X 0 d\mu(x) = 0$
   - Homogenität: $p = \infty$: Es gilt $\mu(\{x \in X | f(x) > \text{essup}(f)\}) = \mu \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^+} \{x \in X | f(x) > \text{essup}(f) + \frac{1}{k}\} \leq \sum\limits_{\mathbb{N}^+} 0 = 0$. Damit ist $\text{essup}(f) = \min\{M \geq 0 | \quad |f| \leq M \quad \mu - \text{f.ü.}\}$
     $|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq \lambda M \Longleftrightarrow |f(x)| \leq M$ Also $||\lambda f||_\infty = |\lambda| \cdot ||f||_\infty$.
     Sonst:

     $$\begin{aligned} ||\lambda f||_p &= \left[\int\limits_X |\lambda f(x)|^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int\limits_X |\lambda|^p |f(x)|^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[|\lambda|^p \int\limits_X |f(x)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \cdot ||f||_p \end{aligned}$$

   - Dreiecksungleichung: Korollar 8.4 falls $p < \infty$.
     Falls $p = \infty$ gilt $|u(x) + v(x)| \leq |u(x)| + |v(x)| \leq ||u||_p + ||v||_p$ für beliebiges auf dem Komplement der Vereinigung zweier Nullmengen, also dem Komplement einer Nullmenge. Mit der Definition von $||u + v||_\infty$ ergibt sich die Dreiecksungleichung.

(c) Für $f \in \mathcal{L}^p : ||f||_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ gilt $\quad \mu -$ f.ü..
Beweis: Für $p < \infty$ gilt: $||f||_p = 0 \Longleftrightarrow \int\limits_X |f(x)|^p d\mu(x) = 0 \Longleftrightarrow |f(x)|^p = 0 \quad \mu -$ f.ü. $\Longleftrightarrow |f(x)| = 0 \quad \mu -$ f.ü. $\Longleftrightarrow f(x) = 0 \quad \mu -$ f.ü. Für $p = \infty$ gilt $||f||_\infty = 0 \Longleftrightarrow |f| = 0 \quad \mu -$ f.ü. $\Longleftrightarrow f = 0 \quad \mu -$ f.ü.

2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ wesentlich beschränkt. Zeigen Sie:

   (a) $g \in \mathcal{L}^p \Longrightarrow f \cdot g \in \mathcal{L}^p$,
   Beweis: Wenn f und g messbar, so gibt es Folgen einfacher Funktionen ϕ_n und γ_n, die jeweils punktweise gegen sie konvergieren (nach Folgerung 3.6). Dann konvergiert die Folge einfacher Funktionen $\phi_n \cdot \gamma_n$ punktweise gegen $f \cdot g$ womit $f \cdot g$ messbar ist. Entsprechend ist auch $|f \cdot g|^p$ messbar.
   Fall $p < \infty$: Desweiteren gilt $|f \cdot g| \leq ||f||_\infty \cdot |g|$ bis auf eine Ausnahmemenge vom Maß 0. Folglich ist $|f \cdot g|^p \leq ||f||_\infty^p \cdot |g|^p$ bis auf eine Ausnahmemenge vom Maß 0. Aus Aufgabe 6.3) folgt mit $||f||_\infty^p \cdot |g|^p \in \mathcal{L}^1$ und $|f \cdot g|^p$ messbar nun auch $|f \cdot g|^p \in \mathcal{L}^1$.
   Fall $p = \infty$: in Teil b).

   (b) $||f \cdot g||_p \leq ||f||_\infty \cdot ||g||_p$ für $g \in \mathcal{L}^p$,
   Beweis ($p < \infty$): Wegen$|f \cdot g| \leq ||f||_\infty \cdot |g|$ bis auf eine Ausnahmemenge vom Maß 0 folgt mit Linearität des Integrals: $\int\limits_X |f \cdot g| d\mu(x) \leq ||f||_\infty \cdot \int\limits_X |g| d\mu(x)$ und schließlich wegen Monotonie von $(\cdot)^{\frac{1}{p}}$ auch die Behauptung.
   ($p = \infty$): Bis auf je eine Nullmenge sind $||f||_\infty$ und $||g||_\infty$ obere Schranken von $|f|$ und $|g|$. Wegen Monotonie der Multiplikation bei positiven Zahlen ist daher (bis auf die Vereinigung der beiden Nullmengen - was wieder eine Nullmenge ist) $||f||_\infty \cdot ||g||_\infty$ obere Schranke von $|f \cdot g|$. Mit der Definition von $||f \cdot g||_\infty$ folgt die Behauptung von a) und b).

   (c) $||f||_\infty = \sup \left\{ |\int fg d\mu| \quad \middle| g \in \mathcal{L}^1, ||g||_1 \leq 1 \right\}$ Beweis:
   Sei $(A_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende ausschöpfende Folge messbarer Mengen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $A'_n := \{x \in X| \quad ||f||_\infty - \frac{1}{n} < |f(x)| \leq ||f||_\infty\}$ keine Nullmenge, da ansonsten $||f||_\infty - \varepsilon < ||f||_\infty$ folgen würde. Folglich gibt es ein dazu passendes $m \in \mathbb{N}$ derart, dass für $A_n := A_m^* \cap A'_n$ auch $0 < \mu(A_n)$ gilt. Insbesondere haben wir aber auch $\mu(A_n) < \mu(A_m^*) < \infty$. Sei $g_n = \frac{\chi_{A_n}}{\mu(A_n)}$ gesetzt. Es folgt $g_n \in \mathcal{L}^1, ||g_n||_1 = 1$ sowie $\int f g_n d\mu \geq ||f||_\infty - \frac{1}{n}$. Die Behauptung folgt mit $n \to \infty$ und Teil b).

   Wo wird die σ-Endlichkeit verwendet?

   Sie wird benötigt, um g_n definieren zu können. Ist beispielsweise $\mu(A) = \infty$ wenn A ein gewisses Element x enthält, und $f = \chi_x$, so ist $||f||_1 = 1$, jedoch ist jedes $g \in \mathcal{L}^1$ an der Stelle x gleich 0. Damit ist fg die Nullfunktion und die Aussage gilt nicht mehr.

3. Zeigen Sie, dass die Oberfläche σ_{n-1} und das Volumen ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel durch $\sigma_{n-1} = n\omega_n$ verknüpft sind. Hinweis: Integrieren Sie eine geeignete radialsymmetrische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe sphärischer Koordinaten!

   Beweis: Sei $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ als charakteristische Funktion der n-dimensionalen Einheitskugel gewählt. Dann ist $u(x) = \chi_{[0,1]}(|x|)$. Mit Korrolar 9.7 folgt

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) d\lambda^n(x) = \sigma_{n-1} \int\limits_0^\infty r^{n-1} \chi_{[0,1]}(r) d\lambda(r) \\
&= \sigma_{n-1} \int\limits_0^1 r^{n-1} d\lambda(r) = \sigma_{n-1} \left(\frac{1^n}{n} - \frac{0^n}{n} \right) = \frac{\sigma_{n-1}}{n}
\end{aligned}$$

   und damit die Behauptung.