Analysis III

Wintersemester 2007/2008 **Prof. Dr. P. Stollmann**

Blatt 7 **Abgabe 6.12.2007**

1. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie:

   (a) $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}} = \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum für alle $p \in [1, \infty]$.

   (b) $|| \cdot ||_p$ definiert eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$.

   (c) Für $f \in \mathcal{L}^p : ||f||_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ gilt $\mu -$ fü.

2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ wesentlich beschränkt. Zeigen Sie:

   (a) $g \in \mathcal{L}^p \Longrightarrow f \cdot g \in \mathcal{L}^p$,

   (b) $||f \cdot g||_p \leq ||f||_\infty \cdot ||g||_p$ für $g \in \mathcal{L}^p$,

   (c) $||f||_\infty = \sup \left\{ |\int fg d\mu| \;\; \middle| \; g \in \mathcal{L}^1, ||g||_1 \leq 1 \right\}$

   Wo wird die σ-Endlichkeit verwendet?

3. Zeigen Sie, dass die Oberfläche σ_{n-1} und das Volumen ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel durch $\sigma_{n-1} = n\omega_n$ verknüpft sind.

   Hinweis: Integrieren Sie eine geeignete radialsymmetrische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe sphärischer Koordinaten!