Analysis III

Wintersemester 2007/2008 **Prof. Dr. P. Stollmann**

Blatt 6 **Abgabe 22.11.2007**

1. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $u : X \to \mathbb{C}$ messbar. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X, \mathcal{A})$ gibt so dass für alle $x \in X$: $|\phi_j(x)| \le |u(x)|$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\phi_j(x) \to u(x)$ für $j \to \infty$.

2. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : X \to [0, \infty]$. Wir nennen f *messbar*, wenn $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und schreiben $\overline{\mathcal{M}}$ für die Menge dieser Funktionen. Zeigen Sie:

   (a) Für alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{A}$.

   (b) Ist $f \in \overline{\mathcal{M}}$, so gibt es eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X, \mathcal{A})$ mit $\phi_j \nearrow f$ für $j \to \infty$.

   (c) Ist $f \in \overline{\mathcal{M}}$ und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlich, so gibt es eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\phi_j \nearrow f$ für $j \to \infty$.

   (d) Zeigen Sie, dass auf die σ-Endlichkeit in der verherigen Teilaufgabe nicht ersatzlos verzichtet werden kann.

3. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $u : X \to \mathbb{C}$ messbar bezüglich $\tilde{\mathcal{A}}$. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

   (i) $u \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$,

   (ii) $|u| \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$,

   (iii) es existiert $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $|u| \le h$.

   Hinweis: Mit Zerlegung in Real- und Imaginärteil und anschließend in Positiv- und Negativteil kann man für die Implikation $(iii) \Rightarrow (i)$ annehmen, dass $u \ge 0$. Dann helfen Beppo-Levi und Aufgabe (2) auf diesem Blatt.

4. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f \in \overline{\mathcal{M}}$. Definiere

$$\int_* f d\mu := \sup\{\int \phi d\mu | \phi \in \mathcal{E}^1(X, \mathcal{A}, \mu), \phi \le f\}.$$

   Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind,

   (i) es gibt $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $f = g$ μ–f.ü.,

   (ii) $\int_* f d\mu < \infty$,

   und in diesem Fall die beiden Integrale übereinstimmen.