Analysis III

Wintersemester 2007/2008 **Prof. Dr. P. Stollmann**

Blatt 5 **Abgabe 15.11.2007**

1. Sei $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ monoton und rechtsstetig und $\mu_\phi : \mathcal{J} \mapsto [0, \infty]$ mit $\mu_\phi([a, b)) = \phi(b-) - \phi(a-)$. Zeigen Sie, dass sich μ_ϕ zu einem Maß auf $\mathcal{B}^1$ fortsetzen lässt.

2. Sei $k \geq 2, X = \{1, 2, \dots, 2k\}$ und $\mathcal{D} := \{D \subset X|\ |D| \text{ ist gerade }\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System aber keine σ-Algebra ist.

3. (a) Seien $a, b \in \mathbb{Q}^n, a_i < b_i$ für $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass es $N \in \mathbb{N}$ und endlich viele Translate $I_k, k = 1, \dots, m$ von $[0, \frac{1}{N})^n$ so gibt, dass $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) = \dot{\bigcup}_{k=1}^{m} I_k$!

   (b) Sei $\mathcal{I}_\mathbb{Q} := \{I \in \mathcal{I} | I = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)\}$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}_\mathbb{Q}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger der Borel-σ-Algebra ist.