2. Zeigen Sie, dass jede Gerade in $\mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Ist das Bild jeder Kurve eine Lebesgue-Nullmenge?

   Lösung: Die Gerade sei mit g bezeichnet Ist die Gerade achsenparallel, so kann man sie als disjunkte Vereinigung abzählbar viele Translate von $\{0\} \times [0, 1)$ (bzw. umgekehrt) darstellen, die alle Maß 0 haben.

   Anderenfalls gibt es $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ derart, dass

$$g = \{(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2)|t \in \mathbb{R}\}.$$

   Wir wählen ein $c > 0$. Sei für $i \in \mathbb{N}_+$

$$M_{2i}(c) := [a_1 + cH_{i-1}b_1, a_1 + cH_ib_1) \times [a_2 + cH_{i-1}b_2, a_2 + cH_ib_2)$$

   und

$$M_{2i-1}(c) := [a_1 - cH_ib_1, a_1 - cH_{i-1}b_1) \times [a_2 - cH_ib_2, a_2 - cH_{i-1}b_2)$$

   gesetzt, wobei $H_i = \sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k}$ ist. Man beachte $H_0 = 0$. Es ergibt sich

$$g = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} M_i(\frac{1}{n}) \right),$$

   weswegen g eine Lebesgue-Menge ist. Für $\mu(g)$ ergibt sich

$$\mu(g) \leq \inf_{c>0} \left(2c^2 b_1 b_2 \sum_{i \in \mathbb{N}_+} \frac{1}{i^2} \right) = \inf_{c>0} \left(2c^2 b_1 b_2 \frac{\pi^2}{6} \right) = 0.$$

Zur Frage nach Kurven mit positivem Maß: Die Hilbertkurve beispielsweise ist eine flächenfüllende Kurve. Sie ist das Bild der Abbildung $f : [0,1] \mapsto [0,1]^2$ mit $r \mapsto f(r)$ wobei sich $f(r)$ aus der Darstellung von r im Positionssystem zur Basis 4 wie folgt ergibt:

Zu $i \in \{0,1,2,3\}$ und $Q := [0,1]^2$ betrachten wir die Abbildungen $f_i : Q \mapsto Q$ mit

- $f_0 := (x,y) \mapsto \frac{1}{2}((y,x) + (-1,-1))$ (Spiegelung an Diagonale durch die linke untere Ecke und Stauchung an dieser Ecke auf die Hälfte),

- $f_1 := (x,y) \mapsto \frac{1}{2}((x,y) + (-1,1))$ (Stauchung an linker oberer Ecke auf die Hälfte),
- $f_2 := (x,y) \mapsto \frac{1}{2}((x,y) + (1,1))$ (Stauchung an rechter oberer Ecke auf die Hälfte) sowie
- $f_3 := (x,y) \mapsto \frac{1}{2}((x,y) + (1,-1))$ (Spiegelung an Diagonale durch rechte untere Ecke und Stauchung an dieser Ecke auf die Hälfte).

Sei $\{0,1,2,3\}^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{0,1,2,3\}^n$. Tupel wie $(0,0,2,3)$ schreiben wir hier kurz wie 0023, d.h. wir lassen die Klammern und Kommas weg. Für $s \in \{0,1,2,3\}^*$ sei

$$Q_s := \begin{cases} Q & \text{Falls } s \text{ die Länge 0 hat, (i.e. } Q_s = Q) \\ f_i(Q_t) & \text{Falls } s = it \text{ für ein } i \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Da $\bigcup_{i=0}^{3} Q_i = Q$ enthalten sind, folgt auch $\bigcup_{i=0}^{3} Q_{si} = Q_s$. Außerdem ist die Seitenlänge von Q_s gerade $\frac{2}{2^{\ell(s)}}$ wobei $\ell(s)$ die Zahl der Stellen von s darstellt.

Ebenfalls erhält man durch Induktion nach n: Falls $s,t \in \{0,1,2,3\}^n$ lexikographisch aufeinander folgen, so haben Q_s und Q_t jeweils eine gemeinsame Kante: Ist $n = 0$, so ist nichts zu beweisen. Ist $s = is'$ und $t = it'$ für $i \in 1,2,3,4$, so haben $Q_{s'}$ und $Q_{t'}$ eine gemeinsame Kante und f_i auf diese Situation angewendet liefert die Behauptung. bleibt $s = i3^{n-1}$ und $t = j0^{n-1}$ zu untersuchen, wobei $j = i+1$ gilt. Man sieht induktiv, dass $Q_{0^n} = \left[-1, -1 + \frac{2}{2^n}\right]^2$ und $Q_{3^n} = \left[1 - \frac{2}{2^n}, 1\right] \times \left[-1, -1 + \frac{2}{2^n}\right]$ gilt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} Q_{03^{n-1}} \cap Q_{10^{n-1}} = \quad & f_0(Q_{3^{n-1}}) \cap f_1(Q_{0^{n-1}}) & = \left[-1, -1 + \frac{2}{2^n}\right] \times \{0\} \\ Q_{13^{n-1}} \cap Q_{20^{n-1}} = \quad & f_1(Q_{3^{n-1}}) \cap f_2(Q_{0^{n-1}}) & = \{0\} \times \left[0, \frac{2}{2^n}\right] \\ Q_{23^{n-1}} \cap Q_{30^{n-1}} = \quad & f_2(Q_{3^{n-1}}) \cap f_3(Q_{0^{n-1}}) & = \left[1 - \frac{2}{2^n}, 1\right] \times \{0\} \end{aligned}$$

womit der Induktionsschritt und die Induktion abgeschlossen sind.

Sei $r \in [0,1]$ eine reelle Zahl und $s_n(r)$ stelle die ersten n Nachkommastellen dar (wobei wir r im Positionssystem zur Basis 4 darstellen, und nur bei $1 = [0.\bar{3}]_4$ eine Dreierperiode verwenden). Dann gibt es genau einen Punkt $f(r)$ in Q mit $f(r) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_{s_n(r)}$, da die geschnittenen Quadrate eine absteigende Folge bilden, die sich auf einen Punkt zusammenzieht.

Diese Funktion ist stetig, denn zwei Zahlen $r_1, r_2 \in [0,1)$ mit $|r_1 - r_2| \leq \frac{1}{4^n}$ stimmen entweder in den ersten n Nachkommastellen überein, oder $s_n(r_1)$ und $s_n(r_2)$ sind zumindest lexikographisch aufeinanderfolgend in $\{1,2,3,4\}^n$. Damit liegen $f(r_1)$ und $f(r_2)$ in einem gemeinsamen Rechteck mit Seitenlängen $\frac{1}{2^n}$ und $\frac{2}{2^n}$, haben also höchstens den Abstand $\frac{\sqrt{5}}{2^n}$.

Hat r im Positionssystem zur Basis 4 eine endliche Darstellung, so könnte man r auch mit einer Dreierperiode darstellen. Wegen der Stetigkeit von f lieferte aber auch diese Darstellung von r den selben Funktionswert. Es kommt also nicht darauf an, welche Darstellung man nimmt!

Zur Umkehrfunktion: Zu jedem Punkt P von Q läßt sich (mindestens) eine unendliche absteigende Folge $Q_{s(n)}$ derart finden, dass $P \in Q_{s(n)}$ gilt. Sei $s = (s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definiert durch $s_i := s(n)_i$. Dann ist $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i 4^{-i}\right) = P$, weswegen die durch $f([0,1])$ gegebene Kurve das ganze Quadrat $[-1,1]^2$ überdeckt, und damit Maß 4 hat.

Zur Frage der Selbstüberschneidung der Hilbertkurve: Selbstüberschneidungen der Peano-Kurve treten an allen Punkten P auf, wo es mehrere unterschiedliche Möglichkeiten gibt, die absteigende Folge der $Q_{s(n)}$ zu definieren, wobei aber die resultierenden Urbilder nicht gleich sind. Man kann entsprechend zeigen, dass die Kurve auf allen Punkten von

- $\{(x,y) \in (-1,1)^2 | \exists n \in \mathbb{Z} : \{2^n x, 2^n y\} \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset\}$,
- $\{-1,1\} \times \{y \in (-1,1) | \exists n \in \mathbb{Z} : 2^n(y - \frac{1}{4}) \in 3\mathbb{Z}\}$,
- sowie $\{x \in (-1,1) | \exists n \in \mathbb{Z} : 2^n x \in 3\mathbb{Z}\} \times \{-1\}$

Selbstüberschneidungen hat, sonst aber nirgendwo. Es treten dabei Doppelpunkte(wie $(0, \frac{1}{2})$), Tripelpunkte (wie $(0,0)$), maximal aber Quadrupelpunkte (wie bei $(0, -\frac{1}{2})$ auf. In der Tat ist

- $f^{-1}(0, \frac{1}{2}) = \{\frac{7}{16}, \frac{9}{16}\}$,
- $f^{-1}(0,0) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\}$ und
- $f^{-1}(0, -\frac{1}{2}) = \{\frac{5}{48}, \frac{7}{48}, \frac{41}{48}, \frac{43}{48}\}$.