Analysis III

Wintersemester 2007/2008 **Prof. Dr. P. Stollmann**

Blatt 4 **Abgabe 8.11.2007**

1. (a) Zeigen Sie, dass jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist. *Hinweis:* Ober- und Unter-Integrale legen geeignete einfache Funktionen zur Approximation nahe.

   (b) Finden Sie eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-integrierbar ist. *Hinweis:* g Lebesgue-integrierbar $\Rightarrow |g|$ Lebesgue-integrierbar.

2. Zeigen Sie, dass jede Gerade in $\mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Ist das Bild jeder Kurve eine Lebesgue-Nullmenge?

3. Sei X überabzählbar und $\mathcal{A} = \{A \subset X | A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$. Finden Sie einen Erzeuger $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ und zwei verschiedene Maße μ, ν auf $\mathcal{A}$ mit $\mu|_{\mathcal{G}} = \nu|_{\mathcal{G}}$.