Analysis III

Wintersemester 2007/2008 **Prof. Dr. P. Stollmann**

Blatt 3 **Abgabe 1.11.2007**

1. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.
   Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ...

   (a) ... eine Menge endlichen Maßes $E \in \mathcal{A}$ gibt mit

   $$\int\limits_{E^c} |f(x)| d\mu(x) \leq \varepsilon$$

   (b) ... ein $R > 0$ und eine Menge $E \in \mathcal{A}$ gibt mit

   $$|f(x)| \leq R \text{ auf } E \text{ und}$$

   $$\int\limits_{E^c} |f(x)| d\mu(x) \leq \varepsilon$$

   Lösung zu 1)

   Laut Lemma 3.11. gilt $\tilde{E}_s := \{x \in X : |f(x)| \geq s\} \in \tilde{\mathcal{A}}_\mu$ und $\mu(\tilde{E_R}) \leq \frac{1}{s}$. Nach Definition 3.1.(iii) für $\tilde{\mathcal{A}}_\mu$ gibt es eine Nullmenge $N_s \in \mathcal{A}$ und ein $E_s \in \mathcal{A}$ derart, dass $E'_s \triangle \tilde{E}_s \subseteq N_s$ und $\mu(E'_s) \leq \frac{1}{s}$. Wir setzen $E_s := E'_s \cup N_s$. Dann ist $\mu(E_s) = \mu(E'_s) \leq \frac{1}{s}$.

   (a) Wir wählen $f_n(x) = f(x)\chi_{E_{\frac{1}{n}}}(x)$. Offenbar erfüllen $|f|$ und $|f_n|$ die Aussagen von Satz 4.6. mit $|f|$ an Stelle von g und f und $|f_n|$ an Stelle von f_n. Es folgt

   $$\lim_{n\to\infty} \int |f_n| d\mu = \int |f| d\mu.$$

   Daher gibt es ein hinreichend großes n mit $\int(|f| - |f_n|)d\mu < \varepsilon$. Sei zur Abkürzung $E := E_{\frac{1}{n}}$ mit diesem n gesetzt.
   Es gilt $\int(|f| - |f_n|)d\mu = \int(|f| - |f|\chi_E)d\mu = \int |f|\chi_{E^c} d\mu = \int\limits_{E^c} |f| d\mu < \varepsilon$ sowie $\mu(E) < n$.

   (b) Wir wählen $f_n(x) = f(x)\chi_{E_n^c}(x)$. Offenbar erfüllen $|f|$ und $|f_n|$ die Aussagen von Satz 4.6. mit $|f|$ an Stelle von g und f und $|f_n|$ an Stelle von f_n. Es folgt

   $$\lim_{n\to\infty} \int |f_n| d\mu = \int |f| d\mu.$$

   Daher gibt es ein hinreichend großes n mit $\int(|f| - |f_n|)d\mu < \varepsilon$. Sei zur Abkürzung $E := E_n^c$ mit diesem n, sowie $R := n$ gesetzt.
   Es gilt $\int(|f| - |f_n|)d\mu = \int(|f| - |f|\chi_E)d\mu = \int |f|\chi_{E^c} d\mu = \int\limits_{E^c} |f| d\mu < \varepsilon$ sowie $f(x) < R$ auf E.