2. Wir betrachten das Zählmaß μ auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Zeigen Sie:

   (a) $\mathcal{E}(X, \mathcal{A}) = \{x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} | x(\mathbb{N}) \text{ ist endlich } \}$,

   (b) $\mathcal{E}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = C_c(\mathbb{N}) = \{x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} | \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x(n) = 0\}$,

   (c) $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \ell^1(\mathbb{N}) = \{x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} | \sum\limits_n |x(n)| \text{ konvergiert } \}$ und

   $\int\limits_{\mathbb{N}} x(n) d\mu(n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x(n)$.

Lösung zu c:

$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) :=$

$$\{x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} | \exists \text{ Cauchyfolge } \subset \mathcal{E}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \text{ punktweise konvergent gegen } x\}$$

Richtung "$\subset$": x gehört zur linken Seite und $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist die punktweise gegen x konvergierende Cauchyfolge: Sei $\varepsilon > 0$ und j so gewählt, dass für alle $i > j$ gilt $||x_i - x_j|| = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_i(n) - x_j(n)| < \varepsilon$. Wir zeigen, dass $\sum\limits_{n=1}^{N} |x(n)|$ beschränkt ist.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |x(n)| &= \sum_{n=1}^{N} |\lim_{i \to \infty} x_i(n)| = \lim_{i \to \infty} \sum_{n=1}^{N} |x_i(n)| \\
&\leq \sup_{i \geq j} \sum_{n=1}^{N} (|x_j(n)| + |x_i(n) - x_j(n)|) \leq \sup_{i \geq j} \left(\left(\sum_{n=1}^{N} |x_j(n)| \right) + ||x_i - x_j|| \right) \\
&\leq \sup_{i \geq j} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_j(n)| \right) + \varepsilon \right) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} |x_j(n)|
\end{aligned}$$

Damit ist eine von N unabhängige Schranke etabliert, woraus die Konvergenz von $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$ - und damit "$\subset$" folgt.

Richtung "$\supset$": Eine geeignete Cauchyfolge zu x ist $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $x_i(n) = x(n)$ für $n < i$ und 0 sonst.

Diese liefert auch sofort $\int\limits_{\mathbb{N}} x(n) d\mu(n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x(n)$.

4. Wir schreiben $a \wedge b := \min\{a, b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und entsprechend für Funktionen $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$

$$f \wedge g := X \mapsto \mathbb{R}, f \wedge g(x) := f(x) \wedge g(x).$$

Analog sei $a \vee b := \max\{a, b\}$ und

$$f \vee g := X \mapsto \mathbb{R}, f \vee g(x) := f(x) \vee g(x).$$

Zeigen Sie:

(a) $a \wedge b = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$, sowie:

(b) Ist (X, A, μ) ein Maßraum, so ist $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}} \times \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}} \mapsto \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}, (f, g) \mapsto f \wedge g$ eine Kontraktion.

Lösung zu b): Für $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$ ist

$$||f_1 \wedge g_1 - f_2 \wedge g_2||_1 \leq ||f_1 - f_2||_1 + ||g_1 - g_2||_1$$

zu zeigen. Das führt mittels Definition der $\mathcal{L}^1$-Norm und Linearität des Integrals zu der Aufgabe, zu zeigen

$$\int_X (|f_1(x) - f_2(x)| + |g_1(x) - g_2(x)| - |\min\{f_1(x), g_1(x)\} - \min\{f_2(x), g_2(x)\}|) d\mu(x) \geq 0$$

Dabei wurden alle Integrale auf eine Seite gebracht und zusammengefaßt. Es genügt wegen Positivität des Integrals, zu zeigen, dass der Integrand überall positiv ist. Seien dazu für ein beliebig gewähltes x die Werte $a_i = f_i(x)$ und $b_i = g_i(x)$ betrachtet. Wir haben zu zeigen, dass $|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| - |\min\{a_1, b_1\} - \min\{a_2, b_2\}| > 0$. Aus Symmetriegründen dürfen wir annehmen, dass $a_1 > b_1$ (Vertauschbarkeit von f_1 und g_1) und $a_2 > b_2$ (Vertauschbarkeit von f_2 und g_2) gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| - |\min\{a_1, b_1\} - \min\{a_2, b_2\}| &= |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| - |b_1 - b_2| && (1) \\ &= |a_1 - a_2| > 0 && (2) \end{aligned}$$