Analysis III

Wintersemester 2007/2008 **Prof. Dr. P. Stollmann**

Blatt 2 **Abgabe 25.10.2007**

1. Sei X eine Menge, $\mathcal{A} = \{A \subseteq X | A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass
   $$\mu(A) = \begin{cases} 0, \text{ falls } A \text{ abzählbar} \\ 1, \text{ sonst} \end{cases}$$
   ein Maß ist.
   (b) Warum ist die entsprechende Mengenfunktion für überabzählbare X kein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$?

2. Wir betrachten das Zählmaß μ auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Zeigen Sie:
   (a) $\mathcal{E}(X, \mathcal{A}) = \{x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} | x(\mathbb{N}) \text{ ist endlich }\}$,
   (b) $\mathcal{E}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = C_c(\mathbb{N}) = \{x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} | \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x(n) = 0\}$,
   (c) $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \ell^1(\mathbb{N}) = \{x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} | \sum\limits_n |x(n)| \text{ konvergiert }\}$ und
   $\int\limits_{\mathbb{N}} x(n) d\mu(n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x(n)$.

3. Sei $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ monoton und rechtsstetig und $\mu_\phi : \mathcal{J} \mapsto [0, \infty]$ mit $\mu_\phi([a, b)) = \phi(b-) - \phi(a-)$.
   (a) Zeigen Sie, dass μ_ϕ additiv ist auf $\mathcal{J} = \{[a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$, d.h.
   $$[a, b) = \dot{\bigcup_{k=1}^{N}} [a_k, b_k) \Rightarrow \mu_\phi([a, b)) = \sum_{k=1}^{N} \mu_\phi([a_k, b_k)).$$
   (b) Angenommen, μ_ϕ lässt sich σ-additiv auf $\mathcal{B}$ fortsetzen. Wie groß ist dann $\mu(\{b\})$ für $b \in \mathbb{R}$?

4. Wir schreiben $a \wedge b := \min\{a, b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und entsprechend für Funktionen $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$
   $$f \wedge g := X \mapsto \mathbb{R}, f \wedge g(x) := f(x) \wedge g(x).$$
   Analog sei $a \vee b := \max\{a, b\}$ und
   $$f \vee g := X \mapsto \mathbb{R}, f \vee g(x) := f(x) \vee g(x).$$
   Zeigen Sie:
   (a) $a \wedge b = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$, sowie:
   (b) Ist (X, A, μ) ein Maßraum, so ist $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}} \times \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}} \mapsto \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}, (f, g) \mapsto f \wedge g$ eine Kontraktion.