3. Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt monotone Klasse, wenn für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ gilt, dass $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$, und wenn für jede fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ gilt, dass $\bigcap_n A_n \in \mathcal{M}$.

   Zeigen Sie:

   (a) Für jedes $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gibt es eine kleinste monotone Klasse $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ enthält.

   (b) Jede monotone Klasse, die zugleich Algebra ist, ist eine σ-Algebra.

   (c) Ist $\mathcal{E}$ eine Algebra, so ist $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass $\Sigma := \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}) | \mathcal{B}^c \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}$ eine σ-Algebra ist.

Lösung zu 3c)

Beobachtung 1: $\Sigma := \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}) | \mathcal{B}^c \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}$ ist eine monotone Klasse, die $\mathcal{E}$ enthält
Beweis: Dass $\mathcal{E} \subseteq \Sigma$ gilt, folgt daraus, dass E eine Algebra ist und $\mathcal{M}$ diese enthält.

Die Monotonie ergibt sich wie folgt: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ eine aufsteigende Folge, so ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ wegen Monotonie von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}$. Desweiteren ist dann A_n^c eine absteigende Folge aus $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, und $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ wegen Monotonie von $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ ebenfalls in $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Damit sind $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ in Σ. Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ eine absteigende Folge, so folgt mit $A_n = B_n^c$ sofort $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ in Σ. Damit ist der Beweis erbracht.

Aus Beobachtung 1 folgt mit Definition von Σ und $\mathcal{M}(\mathcal{E})$:
Korrolar 1: $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \Sigma$, also $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \Longrightarrow A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$.
Sei $\Sigma_A := \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}) | \mathcal{B} \cup \mathcal{A} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}$.
Beobachtung 2: Zu jedem $A \in \mathcal{M}\mathcal{E}$ ist Σ_A eine monotone Klasse.
Beweis: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ eine aufsteigende Folge, so ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ wegen Monotonie von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}$. Desweiteren ist dann $A_n \cup A$ eine aufsteigende Folge aus $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ und somit ist auch $A \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ wegen Monotonie von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}$. Analog für absteigende Folgen.

Beobachtung 3: Zu jedem $A \in \mathcal{E}$ ist Σ_A eine monotone Klasse, die $\mathcal{E}$ enthält.
Beweis: Dass $\mathcal{E} \subseteq \Sigma_A$ gilt, folgt daraus, dass E eine Algebra ist und $\mathcal{M}$ diese enthält.
Aus Beobachtung 3 folgt mit Definition von Σ_A und $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ sowie Beobachtung 2:
Korollar 2: Falls $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \Sigma_A$, also $A \in \mathcal{E}$ und $B \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$,
Beobachtung 4: Zu jedem $B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ ist $\Sigma_B = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}) | \mathcal{B} \cup \mathcal{A} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}$ eine monotone Klasse, die $\mathcal{E}$ enthält.

Beweis: Dass $\mathcal{E} \subseteq \Sigma_B$ gilt, folgt aus dem Korollar von Beobachtung 3 Die Monotonie folgt exakt wie in Beobachtung 1.

Aus Beobachtung 4 folgt mit Definition von Σ_A, Korollar 2 und Beobachtung 2, dass für alle $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ folgt, dass $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \Sigma_A$ gilt, d.h. dass aus $A \in \mathcal{E}$ und $B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ auch $A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ folgt.

Damit ist gezeigt, dass die monotone Klasse $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ gleichzeitig Algebra, also σ-Algebra ist.