Analysis III

Wintersemester 2007/2008 **Prof. Dr. P. Stollmann**

Blatt 1 **Abgabe 18.10.2007**

1. Zeigen Sie für Algebren $\mathcal{A}$ auf X:

   (a) Sei $N \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A} \Rightarrow, \bigcup_{j=1}^{N} A_j \in \mathcal{A}$ sowie $\bigcap_{j=1}^{N} A_j \in \mathcal{A}$.

   (b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ sowie $A \triangle B \in \mathcal{A}$.

   (c) Sei $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, so gilt $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

   (d) Ist X eine Menge und $B \subseteq X$, so bildet $\{\emptyset, B, X\}$ genau dann eine [σ-]Algebra, wenn $B \in \{\emptyset, X\}$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^1$ auf $\mathbb{R}$ von der Menge $\{(-\infty, a) | a \in \mathbb{Q}\}$ erzeugt wird. Hinweis: Es ist praktisch, zunächst zu zeigen, dass jede offene Menge als abzählbare Vereinigung von Intervallen der Form $[a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ geschrieben werden kann.

3. Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt monotone Klasse, wenn für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ gilt, dass $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$, und wenn für jede fallende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ gilt, dass $\bigcap_n A_n \in \mathcal{M}$.

   Zeigen Sie:

   (a) Für jedes $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gibt es eine kleinste monotone Klasse $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ enthält.

   (b) Jede monotone Klasse, die zugleich Algebra ist, ist eine σ-Algebra.

   (c) Ist $\mathcal{E}$ eine Algebra, so ist $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass $\Sigma := \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}) | \mathcal{B}^c \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}$ eine σ-Algebra ist.

Hinweis zu Aufgaben 1 und 3:
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Algebra auf X, wenn fogende Eigenschaften erfüllt sind:

- $X \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ und
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.