

Einige Lösungen zur WMM Analysis II Übung (SoSe2007)

DR.FRANK GÖRING

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, Reichenhainer Straße 39, 09126 Chemnitz,

1 Blatt 2, Aufgabe 3

Da f und g zu $R[a, b]$ gehören, gibt es eine reelle Zahlen S derart, dass für jedes $x \in [a, b]$ gilt $|f(x)| < S$ und $|g(x)| < S$.

Ebenfalls gibt es daher zu jedem ε Treppenfunktionen ϕ_f und ψ_f mit

$$\phi_f(x) \leq f(x) \leq \psi_f(x) \text{ und } \int_a^b \psi_f(x) dx - \int_a^b \phi_f(x) dx \leq \varepsilon$$

sowie Treppenfunktionen ϕ_g und ψ_g mit

$$\phi_g(x) \leq g(x) \leq \psi_g(x) \text{ und } \int_a^b \psi_g(x) dx - \int_a^b \phi_g(x) dx \leq \varepsilon$$

Dann sind aber

$$\phi := x \rightarrow \min\{\phi_f(x)\phi_g(x), \phi_f(x)\psi_g(x), \psi_f(x)\phi_g(x), \psi_f(x)\psi_g(x)\}$$

und

$$\psi := x \rightarrow \max\{\phi_f(x)\phi_g(x), \phi_f(x)\psi_g(x), \psi_f(x)\phi_g(x), \psi_f(x)\psi_g(x)\}$$

Treppenfunktionen mit

$$\phi(x) \leq f(x)g(x) \leq \psi(x)$$

Nach Konstruktion existieren Treppenfunktionen $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ mit

$$\phi(x) = \phi_1(x)\phi_2(x) \text{ und } \psi(x) = \psi_1(x)\psi_2(x)$$

sowie $\{\phi_1(x), \psi_1(x)\} \subseteq \{\phi_f(x), \psi_f(x)\}$ und $\{\phi_2(x), \psi_2(x)\} \subseteq \{\phi_g(x), \psi_g(x)\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \phi(x) dx &= \int_a^b (\psi_1(x)\psi_2(x) - \phi_1(x)\phi_2(x)) dx \\ &= \int_a^b ((\psi_1(x) - \phi_1(x))\psi_2(x) + (\psi_2(x) - \phi_2(x)\phi_1(x))) dx \\ &\leq \int_a^b ((\psi_f(x) - \phi_f(x))S + (\psi_g(x) - \phi_g(x)S)) dx \\ &\leq 2S\varepsilon \end{aligned}$$

Wählen wir $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2S}$ für $\varepsilon' > 0$, folgt damit die Riemann-integrierbarkeit von $f \cdot g$.

2 Blatt 2, Aufgabe 4a

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \eta$ können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a > 0$ derart wählen, dass für alle $x > a$ gilt

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - \eta < \frac{\varepsilon}{2}$$

also

$$-(x-a)\frac{\varepsilon}{2} < \int_a^x (f(t) - \eta) dt < (x-a)\frac{\varepsilon}{2}$$

bzw.:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{x} \int_a^x (f(t) - \eta) dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wählen wir $x > \frac{2}{\varepsilon} \left| \int_0^a (f(t) - \eta) dt \right|$ erhalten wir:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{x} \int_0^a (f(t) - \eta) dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für $x > x_0 := \max \left\{ a, \frac{2}{\varepsilon} \left| \int_0^a (f(t) - \eta) dt \right| \right\}$ erhalten wir zusammengefasst:

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} \int_0^a (f(t) - \eta) dt + \frac{1}{x} \int_a^x (f(t) - \eta) dt < \varepsilon$$

Der mittlere Term kann durch Ausklammern von $\frac{1}{x}$, und Zusammenfassen der Integrale umgeschrieben werden zu:

$$\frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \eta) dt = -\eta + \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

Also gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ in der Tat ein x_0 derart, dass für jedes $x > x_0$ gilt:

$$\left| \eta - \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right| < \varepsilon$$

3 Blatt 2, Aufgabe 4b

Wegen Teil a) (und Spiegelung des Intervalls an Mitte) gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(x-t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = \xi$$

und folglich ergibt sich Gleichung 1):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \eta g(x-t) dt = \xi \eta$$

Da $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \xi$ gibt es ein x_0 sodass $g(x)$ für $x > x_0$ beschränkt ist. Damit g im Intervall $[0, x_0]$ Riemann-integrierbar ist, ist $g(x)$ für $x \in [0, x_0]$ beschränkt. Also gibt es eine reelle Zahl S derart, dass für jedes $x \in [0, \infty)$ gilt: $-S \leq g(x) \leq S$.

Es folgt:

$$\frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - \eta|(-S) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \eta)g(x-t) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - \eta|S dt$$

Da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - \eta|(-S) = \lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - \eta|S = 0$$

gilt, folgt gemäß 4a):

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - \eta|(-S) dt \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \eta)g(x-t) dt \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - \eta|S dt = 0$$

also:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \eta)g(x-t) dt = 0$$

Mit Gleichung 1) erhalten wir

$$\xi \eta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \eta g(x-t) dt + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \eta)g(x-t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)g(x-t) dt$$

4 Blatt 5, Aufgabe 3

$$\int_1^t \sin(x^2) dx = \int_1^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx + \int_{\sqrt{\left[\frac{t^2}{\pi}\right]\pi}}^t \sin(x^2) dx + \sum_{k=1}^{\left[\frac{t^2}{\pi}\right]-1} \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin x^2 dx$$

Der erste Summand auf der linken Seite ist konstant, der zweite ist betragsmäßig beschränkt durch den Betrag des letzten Summanden, die Summe hat alternierende Vorzeichen, die Beträge der Summanden konvergieren für i gegen unendlich streng monoton gegen 0. Daher konvergiert die Rechte Seite für t gegen unendlich, also konvergiert das Integral. (Den

Betrag des k -ten Summanden $\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin x^2 dx$ der Summe kann man nach der Substitution

$y = x^2$ durch $\int_0^1 \frac{\sin(y)}{x} dy$ bestimmen und mit $\sqrt{k\pi} \leq x \leq \sqrt{(k+1)\pi}$ mit $\frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin(y) dy <$

$\left| \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin x^2 dx \right| < \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin(y) dy$ abschätzen, was die streng monotone Konvergenz der Beträge der Summanden der Summe gegen 0 (für k gegen unendlich) beweist.

Analog verläuft der Beweis der Konvergenz von $\int_1^\infty x \sin(x^3) dx$, hier wird x^3 durch y substituiert, und in der Zerlegung $\sqrt{\quad}$ durch $\sqrt[3]{\quad}$ sowie t^2 durch t^3 ersetzt.