

# 1 Vorwort

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit drei ausgewählten Bereichen der Theorie der endlichen Graphen.

Der erste Bereich handelt von speziellen Kreisen (Hamiltonkreise) und Gründen für ihr Fehlen (Toughness,  $A$ -Trenner, Grinbergs Bedingung). Es wird insbesondere die (bisher offene) Vermutung diskutiert, dass hinreichend hohe Toughness einen Hamiltonkreis erzwingt.

Der zweite Bereich beschäftigt sich mit verschiedenen Methoden und Ergebnissen in Bezug auf das Aufspüren von Graphen mit extremalen Eigenschaften innerhalb einer Graphenklasse.

Der dritte Bereich zeigt auf, wie man mit Hilfe der probabilistischen Methode nicht-triviale Schranken für Graphenparameter wie etwa die Dominanzzahl  $\gamma$  herleiten kann. Darüberhinaus wird diskutiert, wie man aus diesem Ansatz heraus polynomiale deterministische Algorithmen erzeugt, die die gefundenen Schranken einhalten - also etwa eine entsprechend kleine dominierende Menge liefern.

## 2 Toughness und Kreise

### 2.1 Einführung

Innerhalb dieses Abschnittes befassen wir uns nur mit endlichen Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten. Die Kanten eines solchen Graphen sind allein durch Nennung ihrer Endknoten eindeutig bestimmt. Sind  $x$  und  $y$  Knoten, so bezeichne  $xy$  ebenso wie  $yx$  die Kante inzident zu  $x$  und  $y$ . Knoten werden entsprechend durch Kleinbuchstaben bezeichnet, Kanten entsprechend durch zwei aufeinanderfolgende Kleinbuchstaben, oder ebenfalls durch einen Kleinbuchstaben. Mengen und Graphen werden durch Großbuchstaben bezeichnet. Insbesondere ist  $G$  stets die Bezeichnung für einen Graphen.

Nun noch einige Grundbegriffe:

Geht ein Graph  $G'$  aus  $G$  durch Löschen von Knoten (und natürlich den zu gelöschten Knoten inzidenten Kanten) hervor, so heißt  $G'$  *induzierter* Untergraph von  $G$ .  $G'$  ergibt sich eindeutig aus der Kenntnis von  $G$  und  $V' = V(G')$ , und heißt daher auch *von  $V$  in  $G$  induzierter* Untergraph.

Geht  $G'$  aus  $G$  nur durch Löschen von Kanten hervor, so heißt  $G'$  *aufspannender* Untergraph von  $G$ .

Ein Graph  $G$  heißt *nicht zusammenhängend*, wenn er eine Zerlegung in zwei disjunkte nichtleere Untergraphen  $G_1$  und  $G_2$  besitzt (d.h.  $G = G_1 \cup G_2$  und  $G_1 \cap G_2 = (\emptyset, \emptyset)$ ). Anderenfalls heißt  $G$  *zusammenhängend*. Bleibt  $G$  nach Löschung von weniger als  $k$  beliebigen Elementen (Knoten und Kanten seien als Elemente bezeichnet) zusammenhängend, so heißt  $G$  genauer  *$k$ -zusammenhängend* oder  *$k$ fach zusammenhängend*.

Jeder Graph  $G$  hat eine eindeutige Zerlegung in zusammenhängende (daher nichtleere) disjunkte Untergraphen. Diese Untergraphen sind die *Komponenten* von  $G$ , sie bilden die

Elemente der Menge  $\mathcal{C}(G)$ .

Mit  $K_V$  ( $V$  Knotenmenge) bezeichnen wir den Graphen  $(V, \binom{V}{2})$ , mit  $K_k$  ( $k$  natürlich) die Isomorphieklasse aller Graphen  $K_V$  mit  $|V| = k$ .

Mit  $K_{V,W}$  ( $V, W$  disjunkte Knotenmengen) bezeichnen wir den *vollständigen paaren Graphen*  $(V \cup W, \{vw | v \in V \wedge w \in W\})$  mit *Partitions Mengen*  $V, W$ . Entsprechend ist der  $K_{k,l}$  die Isomorphieklasse aller  $K_{V,W}$  mit  $|V| = k$  und  $|W| = l$ .

$G$  heißt *k-regulär*, wenn jeder Knoten mit  $k$  Kanten inzidiert (Schlingen zählen doppelt, sind aber in diesem Kapitel ohnehin verboten).

Ein  $k$ -regulärer aufspannender Untergraph heißt *k-Faktor*.

Ein (zweifach) zusammenhängender zweiregulärer Graph  $C$  heißt *Kreis*.

Ein Baum ist ein zusammenhängender kreisfreier Graph.

Ein *Weg* ist ein Graph, der durch Hinzufügen einer Kante inzident zu  $x$  und  $y$  zu einem Kreis (evtl. mit Schlinge oder Doppelkante) wird. Dabei sind  $x$  und  $y$  seine Endknoten und man redet auch von einem  $xy$ -Weg bzw. einem Weg von  $x$  nach  $y$ . Insbesondere sind vollständige Graphen auf einem oder zwei Knoten.

Hat  $G$  einen aufspannenden Kreis  $C$ , so heißt  $G$  *hamiltonsch* und  $C$  *Hamiltonkreis* von  $G$ . Entsprechend ist ein Graph hamiltonsch, wenn er einen zusammenhängenden 2-Faktor enthält.

Hat  $G$  einen aufspannenden Weg  $P$ , so heißt  $P$  *Hamiltonweg* von  $G$ .

## 2.2 Toughness oder: Warum hat $G$ keinen Hamiltonkreis?

Färbt man die Knoten eines Kreises mit den Farben rot und weiß, so induzieren die Knoten der einen wie der anderen Farbe jeweils eine Vereinigung gleichvieler disjunkter Wege. Hat man  $k$  Punkte rot gefärbt, so ergeben sich also nach deren Löschung höchstens  $k$  Komponenten.

**Beobachtung 2.2.1** *Ein Kreis zerfällt nach Löschung von  $k$  Knoten in höchstens  $k$  Komponenten. Gleiches gilt für alle hamiltonschen Graphen.*

Wenn also nach Löschung eines Trenners zu viele Komponenten übrig bleiben, so kann der betrachtete Graph nicht Hamiltonsch sein.

Ist also  $T$  ein Trenner des Graphen  $G$  (d.h.  $T \subseteq V(G)$  und  $G - T$  hat mindestens zwei Komponenten), so interessiert uns das Verhältnis  $|T| : |\mathcal{C}(G - T)|$ . Ist dieses kleiner als 1, so ist der Graph nicht hamiltonsch. Da wir frei sind in der Wahl von  $T$ , interessiert uns eigentlich nur der kleinstmögliche Wert dieses Verhältnisses. Dieser wird als  $\tau(G)$  bezeichnet und mit *toughness* von  $G$  benannt.

In Formeln:

$$\tau(G) = \min \left\{ \frac{|T|}{|\mathcal{C}(G - T)|} \mid T \subseteq V(G) \wedge |\mathcal{C}(G - T)| \geq 2 \right\}$$

Dabei minimieren wir für vollständige Graphen über die leere Menge, was formal als  $\infty$  festgelegt wird.

Ein Graph  $G$  heißt  $t$ -tough, falls für alle Trenner  $T$  von  $G$  das Verhältnis  $|T| : |\mathcal{C}(G-T)|$  mindestens  $t$  ist. Dies ist offenbar äquivalent zu  $t \leq \tau(G)$ . Also können wir die Toughness von  $G$  alternativ auch als maximalen Wert  $t$  einführen, für den  $G$   $t$ -tough ist (dieser ist für vollständige Graphen offenbar  $+\infty$ .)

Unsere Beobachtung 2.2.1 geht mit diesen Definitionen über in:

**Theorem 1 (Chvatal, 1973)** *Ist  $G$  hamiltonsch, so folgt  $1 \leq \tau(G)$ .*

Die Umkehrung ist nicht wahr, wie man etwa am Beispiel des Petersen-Graphen erkennt.

Allerdings wird vermutet (Chvatal 1973), dass hinreichend hohe Toughness einen Hamiltonkreis erzwingt:

**Vermutung 1** *Es gibt ein  $t_0$  derart, dass aus  $t_0 < \tau(G)$  folgt, dass  $G$  hamiltonsch ist.*

Lange Zeit (bis zum Jahr 2000) galt  $t_0 = 2$  als aussichtsreicher Kandidat. Allerdings wurde dann von D.Bauer, H.J.Broersma und H.J.Veldman eine Graphenklasse konstruiert, die den folgenden Satz nach sich zieht:

**Theorem 2 (Bauer, Broersma, Veldman 2000)** *Es gibt zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen Graphen  $G_\varepsilon$  mit  $\tau(G_\varepsilon) > \frac{9}{4} - \varepsilon$  ohne Hamiltonkreis.*

Wir folgen nun der Konstruktion dieser Graphenklasse: Sei  $H$  ein Graph mit zwei Knoten  $x, y$ . Weiterhin seien  $l$  und  $m$  natürliche Zahlen. Der Graph  $G(H, x, y, l, m)$  wird wie folgt gebildet:

Mit  $H_i, i = 1 \dots m$  bezeichnen wir  $m$  disjunkte Kopien von  $H$ . Die jeweiligen  $x$  bzw.  $y$  entsprechenden Knoten seien mit  $x_i$  bzw.  $y_i$  bezeichnet.

Der Graph  $T$  sei ein zu allen  $H_i$  disjunkter vollständiger Graph mit  $l$  Knoten.

Wir setzen  $F = K_{\{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m\}} \cup \bigcup_{i=1}^m H_i$  und  $G(H, x, y, l, m) = F \cup T \cup K_{V(T), V(F)}$  (diese Verknüpfung von  $F$  und  $T$  wird auch als *join* von  $F$  und  $T$  bezeichnet).

Wir wollen nun aus Eigenschaften der Parameter Eigenschaften von  $G(H, x, y, l, m)$  gewinnen:

**Theorem 3 (Bauer, Broersma, Heuvel, Veldman 1994)** *Hat  $H$  keinen Hamiltonweg von  $x$  nach  $y$  und gilt  $m \geq 2l + 3$ , so hat  $G(H, x, y, l, m)$  gar keinen Hamiltonweg (und ist infolgedessen nicht hamiltonsch).*

**Beweis von Theorem 3.** Indirekt. Sei  $P$  ein Hamiltonweg von  $G(H, x, y, l, m)$ . Dann hat  $P$  höchstens  $2l$  Kanten, welche  $F$  mit  $T$  verbinden. Da  $P$  außerdem nur zwei Endknoten hat, gibt es mindestens  $m - 2l - 2$   $H_i$ , also wegen  $m \geq 2l + 3$  mindestens ein  $H_i$  (sagen wir  $H_1$ , von dem aus weder eine Kante nach  $T$ , noch dass es einen Endknoten von  $P$  enthält).

Alle Komponenten von  $P \cap H_1$  sind disjunkte Wege, deren Endknoten nach dem vorgenannten  $x_1$  und  $y_1$  sein müssen. Also hat  $P \cap H_1$  nur eine Komponente, die dann ein Hamiltonweg von  $x_1$  nach  $y_1$  ist.

Damit hat aber im Widerspruch zur Voraussetzung  $H$  einen Hamiltonweg von  $x$  nach  $y$ .  $\square$

Sei  $L = (\{u, v, a, b, c, a', b', c'\}, \{ua, ua', ab, ac, cb, a'b', a'c', c'b', bv, b'v\})$ , wobei verschiedene Knotenbezeichnungen auch für unterschiedliche Knoten stehen. Ein Hamiltonweg  $P$  von  $u$  nach  $v$  müsste O.b.D.A. die Kante  $ua$  enthalten, und die Kante  $ua'$  auslassen. Desweiteren enthielte er  $c$  also die  $ac$  und  $cb$  Daher müßte er auch die Kante  $aa'$  auslassen. Damit enthielte er höchstens eine mit  $a'$  inzidente Kante, was für einen Weg von  $x$  nach  $y$  nicht möglich ist.

Es ergibt sich folgende Beobachtung:

**Beobachtung 2.2.2**  $L$  hat keinen Hamiltonweg von  $u$  nach  $v$ .

Als nächstes untersuchen wir die Toughness von  $G(L, u, v, l, m)$ :

**Theorem 4** Für  $l \geq 2$  und  $m \geq 1$  ergibt sich  $\tau(G(L, u, v, l, m)) = \frac{l+4m}{2m+1}$ .

**Beweis von Theorem 4.** Wir behalten die Bezeichnungen aus der Konstruktion von  $G(H, x, y, l, m)$  bei und setzen  $x = u$ ,  $y = v$  und  $H = L$ . Wir betrachten einen Trenner  $S$  und den Restgraphen  $G' = G(H, x, y, l, m) - S$ . Da  $G'$  in mehrere Komponenten zerfällt, müssen offenbar alle  $l$  Knoten von  $T$  gelöscht worden, also in  $S$  enthalten sein. Da  $G(H, x, y, l, m)$  den vollständigen Graphen  $K_{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m}$  enthält, gibt es höchstens eine Komponente in  $G'$ , welche nicht zu ihm disjunkt ist. Jede andere Komponente von  $G'$  ist aber Untergraph eines Graphen  $H_i - x_i - y_i = H'_i$ .

Damit  $H'_i$  eine Komponente von  $G'$  enthält, müssen mindestens zwei Knoten von  $H_i$  zu  $S$  gehören. Damit  $H'_i$  zwei Komponenten von  $G'$  enthält, müssen mindestens vier Knoten von  $H_i$  zu  $S$  gehören. Kein  $H'_i$  kann mehr als zwei Komponenten von  $G'$  enthalten. Um diese drei Aussagen einzusehen, genügt vollständige Fallunterscheidung bzgl.  $S \cap H_i$ .

Also hat  $G'$  höchstens  $2m+1$  Komponenten und jedes  $H_i$  enthält höchstens halb soviele Komponenten von  $G'$ , wie Knoten von  $H_i$  zu  $S$  gehören.

Wir erhalten  $|\mathcal{C}(G')| \leq 1 + \frac{|S|-l}{2}$ , also  $2 + l - 2 \leq |S|$ , weiter  $2 + \frac{l-2}{|\mathcal{C}(G')|} \leq \frac{|S|}{|\mathcal{C}(G')|}$  und mit  $l \geq 2$  und  $|\mathcal{C}(G')| \leq 2m+1$  schließlich  $\frac{l+4m}{2m+1} = 2 + \frac{l-2}{2m+1} \leq \frac{|S|}{|\mathcal{C}(G')|}$ .

Das liefert  $\tau(G(H, x, y, l, m)) \geq \frac{l+4m}{2m+1}$

Betrachtung des Separators bestehend aus allen Knoten, die in  $F$  zu  $K_{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m}$  benachbart sind, liefert dann die Gleichheit.  $\square$

**Beweis von Theorem 2.** Betrachtung des Graphen  $G(L, u, v, l, 2l+3)$  für hinreichend großes  $l$  liefert nach Satz 3 und Satz 4 die Behauptung.  $\square$

## 2.3 Toughness und Faktoren

Wie wir gesehen haben, reicht eine Toughness von 2 nicht, um einen Hamiltonkreis zu erzwingen. Was motivierte also die damit widerlegte Vermutung?

Welche Eigenschaften hat jeder Graph mit Toughness mindestens  $k$ , insbesondere im Falle  $k = 2$ ?

Fangen wir klein an:

**Lemma 2.3.1** *Ist  $\tau(G) \geq 1$  und  $|V(G)|$  gerade, so hat  $G$  einen 1-Faktor.*

Einen 2-Faktor wird man allerdings nicht garantieren können, wie folgender Graph mit Toughness 1, aber ohne 2-Faktor beweist:

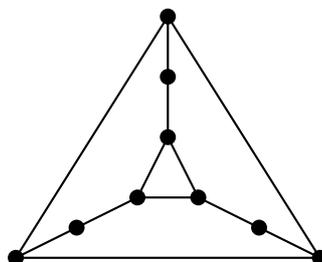


Bild 1:  $G_{\text{Ex1}}$

Um Lemma 2.3.1 beweisen zu können, zitieren wir einen Satz aus den Grundlagen der Graphentheorie, den 1-Faktorsatz von Tutte:

**Theorem 5 (Tutte, 1947)** *Ein Graph  $G$  hat einen 1-Faktor genau dann, wenn für jede Menge  $S \subseteq V(G)$  der Graph  $G - S$  höchstens  $|S|$  Komponenten mit ungerader Knotenanzahl hat.*

Die Anzahl der Komponenten mit ungerader Knotenanzahl eines Graphen  $G$  bezeichnen wir im folgenden mit  $c_u(G)$ .

**Beweis von Lemma 2.3.1.** Sei  $G$  ein Graph mit  $\tau(G) \geq 1$ . Dann folgt aus den Definitionen von  $\tau(G)$  und  $c_u(G)$  für jedes  $S \subseteq V(G)$ , für welches  $|S| \geq 1$  gilt:

$$c_u(G) \leq |\mathcal{C}(G - S)| \leq |S|$$

Man beachte, dass dies im Falle  $|\mathcal{C}(G - S)| \leq 1$  ohne die Betrachtung von  $\tau(G)$  zu folgern ist und zwar aus  $|S| \geq 1$ .

Damit ist die in Theorem 5 genannte (notwendige und) hinreichende Bedingung (Tutte-Bedingung) für die Existenz eines 2-Faktors für alle  $S$  ausser der leeren Menge erfüllt.

Da eine positive Toughness einen zusammenhängenden Graphen impliziert (Warum?) ist im Falle  $S = \emptyset$  die Anzahl der ungeraden Komponenten von  $G - S$  in der Tat gleich 0, da  $G - S = G$  gerade viele Knoten hat, die in einer einzigen Komponente liegen.

Also ist die Tutte-Bedingung vollständig erfüllt, und die Behauptung des Lemmas folgt.

□

Wir wollen das Lemma auf andere Werte von  $\tau$  erweitern:

**Theorem 6 (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito, 1985)** *Sei  $G$  ein Graph mit  $\tau(G) \geq k$  und  $|V(G)| = n \geq k + 1$  und sei  $kn$  gerade. Dann hat  $G$  einen  $k$ -Faktor.*

Insbesondere genügt eine Toughness kleiner  $k$  nicht, um einen  $k$ -Faktor zu erzwingen:

**Theorem 7 (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito, 1985)** Sei  $k \geq 1$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Graphen mit  $\tau(G) \geq k - \varepsilon$  und  $k|V(G)|$  gerade, welcher keinen  $k$ -Faktor hat.

Beweisidee zu Theorem 6:

Die grundlegende Idee der Beweisführung liegt auch hier in der Verwendung eines passenden  $k$ -Faktorsatzes. Der eigentliche Beweis ist etwas lang und technisch. Die Eigenschaften eines Graphen  $G$ , welche notwendig (und hinreichend) sind, um einen  $k$ -Faktor zu besitzen, kann man mit Hilfe eines Ersatzgraphen  $G' = G'(G, k)$  illustrieren.

Zur Konstruktion des Ersatzgraphen:

Zunächst sei bemerkt, dass  $\tau(G) \geq k$  impliziert, dass die Minimalvalenz von  $G$  mindestens  $k+1$  ist, sofern  $G$  mehr als  $k$  Knoten hat. Für jeden Knoten  $v \in V(G)$  sei  $X_v$  eine Menge aus  $x_v = \text{val}_G(v) - k$  verschiedenen Knoten  $v_1, v_2, \dots, v_{x_v}$ , sowie  $Y_v$  folgende Menge aus  $y_v = \text{val}_G(v)$  verschiedenen Knoten:  $Y_v = \{v_e | e \in E(G) \text{ und } e \text{ inzidiert mit } v\}$ . Dabei seien die  $X_v$  und  $Y_v$  paarweise disjunkt. Es sei nun  $V(G') = \bigcup_{v \in V(G)} (X_v \cup Y_v)$  und  $E(G') = E_1 \cup E_2$

mit  $E_1 = \{v_i v_e | v \in V(G) \text{ und } v_i \in X_v \text{ und } v_e \in Y_v\}$ , sowie  $E_2 = \{v_{vw} w_{vw} | vw \in E(G)\}$ .

Kontrahiert man in  $G'$  die von  $X_v \cup Y_v$  induzierten Untergraphen jeweils zum zugehörigen Knoten  $v$ , so geht  $G'$  in  $G$  über, wobei aus Kanten der Form  $v_{vw} w_{vw}$  (aus  $E_2$ ) die zugehörigen Kanten  $vw$  werden und die Kanten aus  $E_1$  verschwinden.

Ein 1-Faktor von  $G'$  hat zu jedem  $v$  genau  $x_v$  durch  $X_v \cup Y_v$  induzierte Kanten (welche  $X_v$  abdecken) und damit  $y_v - x_v = \text{val}_G(v) - (\text{val}_G(v) - k) = k$  Kanten welche  $X_v \cup Y_v$  verlassen. Erstere liegen in  $E_1$ , letztere liegen in  $E_2$ , weswegen der 1-Faktor von  $G'$  bei der beschriebenen Kontraktion aller  $X_v \cup Y_v$  in einen  $k$ -Faktor von  $G$  übergeht.

Letztlich reduziert sich der Beweis darauf, Aussagen zur Toughness von  $G'$  zu gewinnen ( $\tau(G) \geq 1$  genügt). Hierbei kann man sich bei geeigneter Anwendung des Extremalprinzips jedoch auf Separatoren der Form  $\bigcup_{v \in H} X_v$  zurückziehen, weswegen ein auf diese Art hergeleiteter Beweis in seiner Ausführung letztlich ohne die Verwendung des Hilfsgraphen  $G'$  auskommen kann (er wirkt dann wenig intuitiv).

## 2.4 Topologische Toughness

Der Ansatz von Chvatal berücksichtigt nur Effekte die bei *Löschung von Knoten* auftreten. Mitte der 90er Jahre verfolgte G.Y.Katona einen detaillierteren Ansatz, der auch Effekte beim *Löschen* von Kanten mitberücksichtigte. Ein solcher Ansatz führt auf eine Separatortnotation ähnlich der im Satz von Mader verwendeten.

Diese Beobachtung führt auf die entsprechende duale Betrachtungsweise (*Verbinden* von Knoten): Sei  $H^* \subseteq V(G)$  eine Menge von mindestens zwei Knoten des Graphen  $G$ . Hat  $G$  einen  $H^*$  überdeckenden Kreis, so besteht dieser aus  $|H^*|$  kreuzungsfreien  $H^*$ -Wegen.

Da er auch jede Menge  $H \subseteq H^*$  überdeckt, können wir folgende Beobachtung formulieren:

**Beobachtung 2.4.1** Der Graph  $G$  hat keinen  $H^*$  überdeckenden Kreis, wenn es ein  $H \subseteq H^*$  mit  $|H| \geq 2$  derart gibt, dass  $G$  keine  $|H|$  kreuzungsfreien  $H$ -Wege besitzt.

Sei mit  $p_G(H)$  die maximale Mächtigkeit eines Systems kreuzungsfreier  $H$ -Wege bezeichnet. Die Beobachtung gibt Anlass zu folgender Definition:

$$\tau'_G(H^*) = \min \left\{ \frac{p_G(H)}{|H|} \mid H \subseteq H^* \text{ und } |H| \geq 2 \right\}$$

Da  $\tau'_G(H^*)$  auch für ausgewählte Teilmengen der Knotenmenge von  $G$  definiert ist, und da Unterteilung von Kanten am Wert der Funktion nichts ändert, bezeichnen wir  $\tau'_G(H^*)$  als *lokale topologische Toughness der Knotenmenge  $H^*$  im Graphen  $G$* .

Folgende Beobachtung unterstreicht die topologische Natur dieses Parameters:

**Beobachtung 2.4.2** *Ist  $G'$  ein topologischer Minor von  $G$  und  $H^* \subseteq V(G')$ , so gilt  $\tau'_{G'}(H) \leq \tau'_G(H)$ .*

Um direkten Bezug zu  $\tau(G)$  nehmen zu können, bietet es sich an,  $\tau'(G) = \tau'_G(V(G))$  zu definieren. Der Zusammenhang zwischen Toughness und Hamiltonkreisen bleibt auch für  $\tau'(G)$  erhalten:

**Beobachtung 2.4.3** *Ist  $\tau'(G) \leq 1$ , so hat  $G$  keinen Hamiltonkreis.*

Allerdings kann  $\tau'(G)$  nur in eine Richtung von  $\tau(G)$  abweichen:

**Lemma 2.4.4** *Für alle Graphen  $G$  gilt:  $\tau'(G) \leq \tau(G)$ .*

**Beweis von Lemma 2.4.4.** Nach Definition von  $\tau(G)$  gibt es einen Trenner  $T \subseteq V(G)$  derart, dass  $\frac{|T|}{|\mathcal{C}(G-T)|} = \tau(G)$ . Sei  $H_T \subseteq V(G)$  nun eine Knotenmenge, die in jeder Komponente von  $G - T$  genau einen Knoten besitzt. Also gilt  $|H_T| = |\mathcal{C}(G - T)| \geq 2$ .

Da jeder  $H_T$ -Weg wenigstens einen Knoten aus  $T$  im Inneren enthält, gibt es in  $G$  höchstens  $|T|$  kreuzungsfreie  $H_T$ -Wege. Also gilt  $p_G(H_T) \leq |T|$ . Zusammengefasst ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tau'(G) &= \tau'_G(V(G)) \\ &= \min \left\{ \frac{p_G(H)}{|H|} \mid H \subseteq V(G) \text{ und } |H| \geq 2 \right\} \\ &\leq \frac{p_G(H_T)}{|H_T|} \\ &\leq \frac{|T|}{|\mathcal{C}(G - T)|} = \tau(G) \end{aligned}$$

□

Lemma 2.4.4 zeigt, dass sich die topologische Toughness eines Graphen mindestens genauso gut zum Nachweis der Nichtexistenz eines Hamiltonkreises eignet, wie die Originalvariante der Toughness.

Für den Graphen  $G = G_{\text{Ex1}}$  (vgl. Bild 1) gilt  $\tau(G) = 1 > \frac{2}{3} = \tau'(G)$ . Damit ist klar, dass wir vermöge  $\tau'$  bei einer echt größeren Klasse von Graphen die Existenz eines aufspannenden Kreises ausschließen können, als vermöge  $\tau$ .

Um zu zeigen, dass  $\tau(G) < k$  gilt, genügt die Angabe eines Trenners  $T$  mit  $k|\mathcal{C}(G-T)| > |T|$ .

Wie zeigt man aber  $\tau'(G) < k$ ?

Es genügt die Angabe einer Knotenmenge  $H \subseteq V(G)$  mit  $p_G(H) < k|H|$ . Aber wie zeigt man  $p_G(H) < k|H|$ ?

Hier hilft der Satz von Mader:

**Theorem 8** Sei  $G$  ein Graph, und  $H \subseteq V(G)$  eine unabhängige Knotenmenge von  $G$ . Dann gilt:

$$p_G(H) = \min\{\text{perm}_G(X, Y) \mid (X, Y) \text{ ist totaler } H\text{-Separator von } G\}$$

Hierbei bezeichnet der Begriff *totaler  $H$ -Separator von  $G$*  ein Paar  $(X, Y)$  mit  $X \subseteq V(G - H)$  und  $Y \subseteq E(G - H - X)$  derart, dass in  $G - X - Y$  keine Komponente mehr als einen Knoten von  $H$  enthält. Desweiteren gelte:

$$\text{perm}_G(X, Y) = |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}(Y)} \left\lfloor \frac{|\partial_{G-X} C|}{2} \right\rfloor$$

Dabei bezeichne  $\partial_{G-X} C$  die Menge aller Knoten von  $C$ , die in  $G - X$  mit Kanten ausserhalb von  $C$  inzidieren.

Die Forderung  $H$  müsse unabhängig sein ist kein Problem, da wir die eventuell auftretenden von  $H$  induzierten Kanten extra zählen und für das Zählen der weiteren  $H$ -Wege dann aus  $G$  entfernen können.

Um  $\tau'(G) < k$  zu zeigen, genügt es also, eine Knotenmenge  $H$ , sowie einen totalen  $H$ -Separator  $(X, Y)$  von  $G - E(G[H])$  derart anzugeben, dass  $k|H| > |E(G[H])| + \text{perm}_G(X, Y)$  ist.

Wir bekommen also auch ein schnell überprüfbares Zertifikat dafür, dass  $G$  keine hohe topologische Toughness hat - wenngleich das Aufspüren eines geeigneten  $H$  und eines passenden  $(X, Y)$  schwer ist.

In Bezug auf die Faktorsätze für  $\tau(G)$  gibt es ebenfalls ein Äquivalent für  $\tau'_G(H)$ .

Dazu definieren wir einen  *$H$ -lokalen  $k$ -Faktor von  $G$*  als Menge kreuzungsfreier  $H$ -Wege derart, dass jeder Knoten aus  $H$  in genau  $k$  dieser Wege vorkommt. Man beachte, dass ein  $V(G)$ -lokaler  $k$ -Faktor von  $G$  genau ein gewöhnlicher  $k$ -Faktor von  $G$  ist.

Es gilt folgender Satz:

**Theorem 9** Ist  $G$  ein Graph,  $H^* \subseteq V(G)$  und  $k$  eine positive ganze Zahl, so sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

- $\tau_G(H^*) \geq k$
- $G$  besitzt zu jedem  $H \subseteq H^*$  mit  $|H| \geq 2$  einen  $H$ -lokalen  $2k$ -Faktor.

Wählt man  $H^* = V(G)$ , ergibt sich folgendes Korollar:

**Korollar 10** *Sei  $G$  ein Graph. Gilt  $\tau'(G) \geq k$ , so hat  $G$  einen  $2k$ -Faktor.*

Insbesondere besitzen Graphen  $G$  mit  $\tau'(G) \geq 1$  zwar nicht unbedingt einen Hamiltonkreis, aber wenigstens ein aufspannendes System disjunkter Kreise - einen 2-Faktor.

Beweisidee von Satz 9:

Die Rückwärtsrichtung ist trivial, da  $H$ -lokale  $2k$ -Faktoren stets aus  $k|H|$  kreuzungsfreien  $H$  Wegen bestehen.

Schwierig ist die Vorwärtsrichtung.

Hier genügt es zu zeigen, dass aus der Nichtexistenz eines  $H$ -lokalen  $2k$ -Faktors die Nichtexistenz von  $k|H'|$  kreuzungsfreien  $H'$ -Wegen für geeignetes  $H' \subseteq H$  mit  $|H'| \geq 2$  folgt.

Dies geschieht unter Zuhilfenahme eines wie folgt konstruierten Ersatzgraphen  $G'$ :

Für jeden Knoten  $v \in H$  werden für jede zu  $v$  inzidente Kante  $e$  ein neuer Endknoten  $v_e$  sowie eine Menge  $A_v$  von  $2k$  weiteren neue Knoten eingeführt. Die Knoten  $v_e$  bilden dabei eine Menge  $B_v$ . Alle Knoten aus  $A_v$  werden mit  $v$  sowie allen Knoten aus  $B_v$  verbunden. Kanten, die mit Knoten aus einem  $A_v$  inzidieren, bezeichnen wir als  $A$ -Kanten, solche, die mit Knoten aus einem  $B_v$  inzidieren, bezeichnen wir als  $B$ -Kanten.

**Beobachtung 2.4.5**  *$G'$  hat genau dann ein System aus  $k|H|$  kreuzungsfreien  $H$ -Wegen, wenn  $G$  einen  $H$ -lokalen  $2k$ -Faktor hat.*

Zum einen lässt sich aus einem  $H$ -lokalen  $2k$ -Faktor von  $G$  leicht ein System kreuzungsfreier  $H$ -Wege von  $G'$  machen, andererseits geht ein solches durch Kontraktion aller  $A$ -Kanten auch immer in einen  $H$ -lokalen  $2k$ -Faktor von  $G$  über.

Hat  $G$  also keinen  $H$ -lokalen  $2k$ -Faktor, so hat  $G'$  keine  $k|H|$  kreuzungsfreien  $H$ -Wege, und nach Satz 8 also einen Trenner  $(X', Y')$  mit  $\text{perm}_{G'}(X, Y) < k|H|$ .

Die Symmetrie von  $G'$  in der Umgebung der Knoten von  $H$  kann dazu genutzt werden, vermöge geeigneter Extremalprinzipien einen Trenner  $(X', Y')$  mit  $\text{perm}_{G'}(X, Y) < k|H|$  zu konstruieren, der folgende Bedingung erfüllt:

Für jeden Knoten  $v \in H$  gilt eine der drei folgenden Aussagen:

- $A_v \subseteq X$  ( $v$  ist  $X$ -Knoten).
- Alle mit  $B_v$  inzidenten Kanten gehören zu  $Y$  ( $v$  ist  $Y$ -Knoten)
- $X$  ist disjunkt zu  $A_v$  und  $B_v$  und  $Y$  enthält keine zu  $A_v$  inzidente Kante. ( $v$  ist  $H$ -Knoten).

Wir wählen  $H'$  als die Menge aller  $H$ -Knoten.  $X'$  bestehe aus  $X \cap V(G)$  zuzüglich aller  $X$ -Knoten und  $Y'$  bestehe aus  $E(G - H') \cap Y$  zuzüglich aller zu  $Y$ -Knoten inzidenten Kanten.

Sei  $h$  die Anzahl der  $H$ -Knoten,  $x$  die Anzahl der  $X$ -Knoten und  $y$  die Anzahl der  $Y$ -Knoten.

Es ergibt sich  $0 \leq \text{perm}_G(X', Y') \leq \text{perm}_{G'}(X, Y) - (2k-1)x - ky < k(|H| - y - 2x) + x < k(|H| - x - y) = k|H'|$  und somit  $|H'| \geq 1$ , sowie im Falle  $|H'| > 1$  der Abschluss des Beweises. Im Falle  $|H'| = 1$  wissen wir  $k|H| = k(|H'| + x + y) = k(1 + x + y) > \text{perm}_{G'}(X, Y) \geq 2kx + ky$ , also  $x < 1$ . Somit sind die anderen Knoten von  $H$  alle  $Y$ -Knoten. Sei  $v$  der einzige Knoten von  $h$ , sowie  $w$  ein beliebiger  $Y$ -Knoten und  $C$  das Element von  $\mathcal{C}(Y')$ , welches  $w$  als Knoten enthält. Dann trennt  $X' \cup \partial_{G-X'}C$  die Knoten  $v$  und  $w$  in  $G$ , und wegen  $\text{perm}_G(X', Y') < k$  erhalten wir  $|X'| + \left\lfloor \frac{|\partial_{G-X'}C|}{2} \right\rfloor < k$ , weswegen  $|X' \cup \partial_{G-X'}C| < 2k$  gilt, und es also keinen  $\{v, w\}$ -lokalen  $2k$ -Faktor in  $G$  gibt.  $\square$

## 2.5 Ein Äquivalent zu Chvatal's Vermutung

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass Chvatal's Vermutung

**Vermutung 2** *Es gibt ein reelles  $t_0$  derart dass alle Graphen  $G$  mit  $\tau(G) \geq t_0$  einen aufspannenden Kreis besitzen.*

äquivalent ist zu der entsprechenden Vermutung für topologische Toughness:

**Vermutung 3** *Es gibt ein reelles  $t_0$  derart dass alle Graphen  $G$  mit  $\tau(G) \geq t_0$  einen aufspannenden Kreis besitzen.*

Wegen Lemma 2.4.4 folgt Vermutung 3 aus Vermutung 2. Das umgekehrt auch Vermutung 2 aus Vermutung 3 folgt, bestätigt der folgende Satz:

**Theorem 11** *Hat der Graph  $G$  wenigstens  $\frac{1}{2} \left(t + \frac{3}{2}\right)^2$  Knoten und ist  $(4t^2 + 2t)$ -tough, so ist im Falle  $t \geq 1$  der Graph auch topologisch  $t$ -tough.*

Die Einschränkung in der Knotenzahl ist hier technischer Natur, ein Graph mit  $\tau(G) \geq 4t^2 + 2t$  ist entweder vollständig (also auch hämiltonsch) oder er hat sogar mindestens  $4t^2 + 2t + 2 > \frac{1}{2} \left(t + \frac{3}{2}\right)^2$  Knoten. Daher genügt die Aussage dieses Satzes offenbar, um Vermutung 3 in Vermutung 2 zu überführen.

Der Rest dieses Abschnittes beschäftigt sich nun mit dem detaillierten Beweis dieses Satzes.

**Beweis von Theorem 11.** Wir gehen indirekt vor, d.h.  $G$  erfülle die Voraussetzungen des Satzes, ohne topologisch  $t$ -tough zu sein. Dann existiert nach Definition der topologischen Toughness unter Einbeziehung des Satzes von Mader ein  $H \subseteq V(G)$  sowie ein totaler  $H$ -Trenner  $(X, Y)$  des Graphen  $G - E(G[H])$  derart, dass

$$\text{perm}_G(X, Y) + |E(G[H])| \leq t|H|$$

und  $|H| \geq 2$  gilt. Man beachte hierbei, dass

$$\text{perm}_{G-E(G[H])}(X, Y) = \text{perm}_G(X, Y) = |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}(Y)} \left\lfloor \frac{|\partial_{G-X}C|}{2} \right\rfloor$$

gilt, da kein Knoten einer Kantenkomponente  $C \in \mathcal{C}(Y)$  mit einer Kante aus  $G[H]$  inzidiert.

Wir versuchen nun,  $G$  derart durch einen Trenner  $T$  (entspricht  $(T, \emptyset)$  in der Schreibweise als totaler Trenner) zu zerlegen, dass die verbleibenden Knoten von  $H$  auf möglichst viele Komponenten von  $G - T$  verstreut sind.

Die maximale Anzahl von Komponenten von  $G - T$ , die Knoten von  $H$  erhalten, ist offenbar die Mächtigkeit  $\alpha$  einer maximalen in  $G$  unabhängigen Teilmenge  $H'$  von  $H$ . Wir führen die technische Variable  $x = \frac{|H|}{\alpha}$  ein und zeigen zunächst  $x \leq 2t + 1$ .

Dazu betrachten wir den Komplementärgraphen  $\overline{G[H]}$  zu  $G[H]$ . Dieser enthält offenbar keinen  $K_{\alpha+1}$  als Untergraphen, und nach Turans Theorem also höchstens  $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$  Kanten. Damit folgt

$$\begin{aligned} |E(G[H])| &\geq \frac{|H|(|H| - 1)}{2} - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 \\ &= \frac{\alpha x(\alpha x - 1) - \alpha x(\alpha x - x)}{2} \\ &= \alpha \frac{x(x - 1)}{2} \end{aligned}$$

und somit wegen der indirekten Annahme:

$$\alpha x t = t|H| \geq \text{perm}_G(X, Y) + |E(G[H])| \geq |E(G[H])| \geq \alpha \frac{x(x - 1)}{2}$$

Umstellen nach  $x$  liefert die gesuchte Ungleichung.

Als nächstes kümmern wir uns darum, wie wir aus  $(X, Y)$  einen Trenner  $T'$  mit gleichen Trenneigenschaften bzgl.  $H$  machen können:

$T'$  bestehe aus den Knoten von  $X$  sowie allen Knoten von  $\partial_{G-X}C$  für alle  $C \in \mathcal{C}(Y)$ , bis auf jeweils einen. Da  $|\partial_{G-X}C| - 1 \leq 2 \left\lfloor \frac{|\partial_{G-X}C|}{2} \right\rfloor$  gilt, haben wir

$$|T'| \leq |X| + 2 \sum_{C \in \mathcal{C}(Y)} \left\lfloor \frac{|\partial_{G-X}C|}{2} \right\rfloor \tag{1}$$

$$\leq 2 \text{perm}_G(X, Y) \tag{2}$$

Allerdings sind die Knoten von  $H'$  eventuell noch nicht in  $G - T'$  getrennt, sondern nur in  $G - T' - E(G[H])$ . Wir konstruieren nun  $T$  aus  $T'$  folgendermassen:

Wir starten mit  $T' = T$ . Solange es noch einen  $H'$ -Weg in  $G[H] - T$  gibt, fügen wir einen inneren Knoten dieses Weges zu  $T$  hinzu.

In jedem Schritt wächst  $T$  um einen Knoten, wobei  $G[H] - T$  mindestens zwei Knoten verliert.

Betrachten wir zunächst den Fall  $|H'| = \alpha \geq 2$ . Hier erhalten wir für die Toughness von  $G$  folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\tau(G) &\leq \frac{|T|}{|H'|} \\
&\leq \frac{2\text{perm}_G(X, Y) + \frac{1}{2}|E(G[H])|}{\alpha} \\
&\leq 2x \frac{\text{perm}_G(X, Y) + |E(G[H])|}{|H|} \\
&< 2tx \leq 4t^2 + 2t
\end{aligned}$$

was den Beweis in diesem Falle abschließt.

Im verbleibenden Falle  $|H'| = \alpha = 1$  können wir uns dafür nicht einmal sicher sein, dass  $T$  überhaupt ein Trenner von  $G$  ist. Allerdings wissen wir, dass hier  $T = T'$  gilt.

Um aus  $T$  überhaupt einen Trenner von  $G$  machen zu können (durch weiteres Anfügen von Knoten), überzeugen wir uns zunächst, dass  $G - T$  nicht etwa genau der vollständige Graph  $G[H]$  ist: Wäre dies so, dann hätte  $\mathcal{C}(Y)$  keinerlei Kantenkomponenten, also wäre  $Y$  leer. Es folgte

$$\begin{aligned}
t|H| &> \text{perm}_G(X, Y) + |E(G[H])| \\
&= |X| + \frac{|H|(|H| - 1)}{2} \\
&= |V(G)| - |H| + \frac{|H|(|H| - 1)}{2}
\end{aligned}$$

Umstellen nach  $|V(G)|$  und Ausklammern von  $|H|$  würde im Widerspruch zur gegebenen Voraussetzung

$$|V(G)| < \frac{1}{2}(2t + 3 - |H|)|H| \leq \frac{1}{2} \left( t + \frac{3}{2} \right)^2$$

liefern.

Damit besitzt  $G - T - H$  noch einen Knoten  $v$ . Sei  $T_v$  die Menge aller Knoten von  $H$ , welche in  $G - E(G[H]) - T$  in der gleichen Komponente liegen. Es folgt  $|T_v| \leq 1$ , da  $(T, \emptyset)$  ja ein totaler  $H$ -Trenner von  $G - E(G[H])$  ist. Weiterhin sei  $w$  ein Knoten aus  $H \setminus T_v$ , was wegen  $|H| \geq 2 > 1 \geq |T|$  ja nicht leer ist.

Wir zeigen nun, dass  $T \cup T_v$  die Knoten  $v$  und  $w$  in  $G$  trennt:

Jeder  $vw$  Weg von  $G - T$  enthält einen  $vH$ -Weg (Weg dessen Endknoten  $v$  bzw. ein Knoten aus  $H$  sind, der aber auch nur einen Knoten aus  $H$  enthält). Kein  $vH$ -Weg von  $G - T$  kann Kanten aus  $G[H]$  enthalten. Also ist jeder  $vH$ -Weg von  $G - T$  auch in  $G - T - E(G[H])$  enthalten. Insbesondere ist damit jeder  $vH$ -Weg in der Komponente von  $G - T - E(G[H])$  enthalten, welche  $v$  enthält. Damit ist jeder  $vH$ -Weg von  $G - T$  ein  $vT_v$ -Weg. Also enthält jeder  $T$  vermeidende  $vw$ -Weg einen Knoten aus  $T_v$ . Damit liegen aber  $v$  und  $w$  in  $G - (T \cup T_v)$  in unterschiedlichen Komponenten.

Für die Toughness von  $G$  folgt der erwünschte Widerspruch zur Voraussetzung:

$$\begin{aligned}
 \tau(G) &\leq \frac{|T \cup T_v|}{2} \leq \frac{1}{2}(|T'| + 1) \leq \frac{1}{2}(2\text{perm}_G(X, Y) + 1) \\
 &< \frac{1}{2}(2(t|H| - |E(G[H])|) + 1) = \frac{1}{2}(|H|(2t + 1 - |H|) + 1) \\
 &\leq \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \\
 &< 4t^2 + 2t
 \end{aligned}$$

□

## 2.6 Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Hamiltonkreises in planaren Graphen

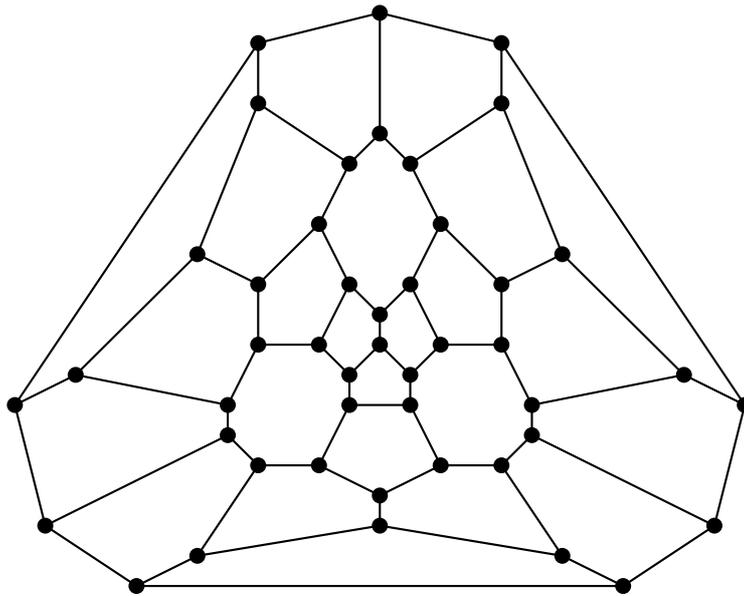


Bild 2: Grünberggraph

Der im Bild dargestellte Graph (Grünberggraph) ist ein nichthamiltonscher dreiregulärer Polyedergraph (dreifach zusammenhängend, planar). Da seine Toughness (und auch seine topologische Toughness) mindestens 1 sind, kann man allerdings die Nichtexistenz eines Hamiltonkreises über die bisher betrachteten Graphenparameter nicht feststellen.

Folgender Satz liefert allerdings eine Bedingung, die hier zum Nachweis der Nichtexistenz eines Hamiltonkreises führt.

**Theorem 12 (Grinberg, 1968)** *Ist  $G$  ein schlingenfreier ebener Graph mit Hamiltonkreis  $C$ , und sind  $f_i$  und  $f'_i$  die Anzahlen der Länder mit Länge  $i$  innerhalb bzw. außerhalb von  $C$ , so gilt:*

$$\sum_{i=2}^{|V(G)|} (i-2)f'_i = \sum_{i=2}^{|V(G)|} (i-2)f_i$$

**Beweis von Theorem 12.**  $G$  besteht nur aus  $C$  und Sehnen von  $C$  die innerhalb oder außerhalb von  $C$  verlaufen. Gilt  $G = C$  so ist die Aussage trivial. Somit können wir im weiteren davon ausgehen, dass  $G$  eine Sehne  $e$  an  $C$  besitzt, und weiterhin induktiv (Induktion nach der Anzahl solcher Sehnen), dass  $G - e$  ein Graph ist, für den Satz 12 gilt.

Nun liefert jedes Land von  $G - e$  der Länge  $i$  einen Beitrag von  $i-2$  zu einer der Summen. Sei  $l$  die Länge jenes Landes von  $G - e$ , welches  $e$  enthält. In  $G$  zerfällt dieses Land in zwei Länder der Längen  $l_1$  und  $l_2$ . Da  $e$  in beiden Ländern als zusätzliche Grenzkante auftritt, folgt  $l_1 + l_2 = l + 2$ , also  $(l_1 - 2) + (l_2 - 2) = l - 2$ . Die beiden Länder von  $G$ , die von  $e$  berandet werden, liefern also den gleichen Beitrag zu der gleichen Summe, wie das entsprechende Land von  $G - e$ , welches sich aus ihnen zusammensetzt, da es  $e$  im Inneren enthält. Somit folgt die Gültigkeit der Aussage auch für  $G$  und der Induktionsbeweis ist abgeschlossen.  $\square$

Wollen wir diesen Satz auf den Grinberg-Graphen anwenden, so sei zunächst beobachtet, dass dieser nur ein Neuneck (Außenland), ansonsten aber nur Fünfecke und Achtecke als Länder aufweist. Damit sind alle Beiträge aller Länder bis auf jenen des Außenlandes durch drei teilbar, weswegen die Ungleichheit der Summen in Satz 12 folgt. Da der Grinberggraph aber schlingenfrei und eben ist, folgt daraus die Nichtexistenz eines Hamiltonkreises.

## 2.7 Hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Hamiltonkreises

Nachdem einige Gründe aufgezeigt wurden, warum ein Graph keinen Hamiltonkreis besitzt, sollen nun Gründe diskutiert werden, die einen Hamiltonkreis erzwingen.

Da nicht bekannt ist, ob hinreichend hohe Toughness ein solcher Grund ist, wird in diesem Unterabschnitt die Toughness eines Graphen keine Rolle spielen.

Zunächst behandeln wir einen Satz, der es uns ermöglicht, die Existenz eines Hamiltonkreises in einem Graphen  $G$  auf die Existenz eines solchen in einem dichteren Graphen (mehr Kanten bei gleicher Knotenmenge) zurückzuführen. Dieser Satz wird die Definition des hamiltonschen Abschlusses von Graphen motivieren, mit deren Hilfe wir eine tiefliegende Gradbedingung für die Existenz von Hamiltonkreisen erhalten.

Zum Abschluß behandeln wir noch eine hinreichende Bedingung, die über Zusammenhang und Unabhängigkeitszahl des Graphen arbeitet.

**Theorem 13 (Ore, 1960)** *Ist  $G$  ein schlichter Graph und sind  $u$  und  $v$  zwei nicht verbundene (nicht adjazente) Knoten von  $G$  mit  $\text{val}_G(u) + \text{val}_G(v) \geq |V(G)|$ , so ist  $G$  genau dann hamiltonsch, wenn auch  $G + uv$  hamiltonsch ist.*

**Beweis von Korollar 13.** Es genügt zu zeigen, dass  $G$  hamiltonsch ist, wenn  $G + uv$  hamiltonsch ist. Dies tun wir konstruktiv. Sei dazu  $G + uv$  hamiltonsch und  $n = |V(G)|$  gesetzt.

$G$  besitzt also einen Hamiltonweg  $P$  von  $u$  nach  $v$ , dessen Knoten wir in dieser Reihenfolge mit  $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$  bezeichnen wollen. Finden wir einen Index  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  derart, dass  $uv_{i+1}$  und  $v_i v$  Kanten von  $G$  sind, so ist  $P - v_i v_{i+1} + uv_{i+1} + v_i v$  offenbar ein Hamiltonkreis.

Sei hierzu  $S = \{i \in \{1, \dots, n-1\} | uv_{i+1} \in E(G)\}$  und  $T = \{i \in \{1, 2, \dots, n-1\} | v_i v \in E(G)\}$  gesetzt.

Es gilt  $n = |V(G)| \leq \text{val}_G(u) + \text{val}_G(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T|$ .  $S$  enthält aber zu jedem Nachbarn von  $u$  einen Index und  $T$  enthält zu jedem Nachbarn von  $v$  einen Index. Da aber  $S \cup T \subseteq \{1, \dots, n-1\}$  folgt  $|S \cup T| < n$  und mithin  $|S \cap T| \geq 1$ .  $S \cap T$  ist aber genau die Menge der zu findenden Indizes  $i$ .  $\square$

Iteriertes Anwenden des Satzes von Ore liefert die Äquivalenz der Existenzen eines Hamiltonkreises in einem Graphen  $\text{cl}(G)$  und dem Ausgangsgraphen  $G$  wobei  $G'$  wie folgt definiert ist:

Der Graph  $\text{cl}(G)$  (*hamiltonscher Abschluss von  $G$ , hamiltonsche Hülle von  $G$* ) ergibt sich aus dem Graphen  $G$  mittels folgendem Verfahren:

Zu Beginn setzen wir  $G' = G$ . Solange wir noch unverbundene Knoten  $u$  und  $v$  in  $G'$  finden, die  $\text{val}_{G'}(u) + \text{val}_{G'}(v) \geq |V(G')|$ , ändern wir  $G'$  ab indem wir  $u$  und  $v$  verbinden. Danach setzen wir  $\text{cl}(G) = G'$ .

Natürlich ist  $\text{cl}(\cdot)$  eine Hülloperation, also  $\text{cl}(\text{cl}(\cdot)) = \text{cl}(\cdot)$ .

Wir erhalten sofort als Korollar zum Satz von Ore:

**Korollar 14 (Bondy, Chvatal, 1976)**  $G$  ist genau dann hamiltonsch, wenn  $\text{cl}(G)$  hamiltonsch ist.

Allerdings ist bisher noch nicht sicher, dass  $\text{cl}(G)$  durch das gegebene Verfahren *eindeutig* bestimmt ist; es könnte noch von der Reihenfolge der hinzugefügten Kanten  $uv$  abhängen. Das dem nicht so ist, besagt das folgende Lemma:

**Lemma 2.7.1**  $\text{cl}(G)$  ist wohldefiniert

**Beweis von Lemma 2.7.1.** Seien  $H$  und  $H'$  Graphen, die aus  $G$  durch Hinzufügen der Kanten  $e_1, e_2, \dots, e_r$  bzw.  $f_1, f_2, \dots, f_s$  jeweils in dieser Reihenfolge entsprechend der Definition von  $\text{cl}(G)$  entstanden sind. Das  $i$ -te Zwischenergebnis wird dabei mit  $H_i$  bzw.  $H'_i$  bezeichnet. Wir zeigen  $H = H'$ .

Sei dazu  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$  und  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$  gesetzt. Wir zeigen  $f_i \in E$  und  $H'_i \subseteq H$  durch Induktion nach  $i$ . Beginnen wir mit  $i = 1$ . Es gilt  $G \subseteq H$ , weswegen  $\text{val}_G(u) \leq \text{val}_H(u)$  und  $\text{val}_G(v) \leq \text{val}_H(v)$  und mithin  $\text{val}_H(u) + \text{val}_H(v) \geq \text{val}_G(u) + \text{val}_G(v) \geq |V(G)|$  gilt. Die letzte Relation ergibt sich daraus, dass  $f_1$  zu  $G$  hinzugefügt wurde, um  $H'_1$  zu erhalten. Damit muss aber  $f_1 \in E(H)$  und somit  $f_1 \in E$  sowie  $H'_1 \subseteq H$  gelten.

Der  $i$ -te Induktionsschritt läuft analog, wobei die verwendeten Indizes um  $i$  erhöht werden und  $G$  in  $H'_i$  übergeht.

Es folgt also in der Tat  $H' = H'_s \subseteq H$ .

Durch vertauschen der Rollen von  $H$  und  $H'$  sowie von  $s$  und  $r$  ergibt sich ein analoger Induktionsbeweis für  $H \subseteq H'$ .

Zusammengefasst ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Welche Graphen sind aber nach Korollar 14 hamiltonsch, weil z.B.  $K_n$  hamiltonsch ist? Diese Frage beantwortet der folgende Satz:

**Theorem 15 (Chvatal, 1972)** *Der Graph  $G$  mit  $n \geq 3$  Knoten sei schlicht und habe die Valenzen  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ . Es gelte für alle  $i < \frac{n}{2}$  wenigstens eine der Ungleichungen  $d_i > i$  und  $d_{n-i} \geq n - i$ . Dann ist  $G$  hamiltonsch.*

**Beweis von Theorem 15.** Da die  $d_i$  unter Hinzufügen von Kanten höchstens wachsen, da  $\text{cl}(G)$  aus  $G$  nach Definition durch sukzessives Hinzufügen von Kanten entsteht und da  $\text{cl}(\cdot)$  Hülloperation ist, genügt es, diesen Satz für Graphen  $G$  zu mit  $\text{cl}(G) = G$  zu zeigen.

Wir zeigen genauer, dass unter den gegebenen Voraussetzungen für  $G$  folgt, dass  $G$  vollständig ist. Dies geschieht indirekt: Falls  $G$  nicht vollständig ist, gibt es zwei Knoten, die in  $G$  nicht verbunden sind. Unter allen Möglichkeiten wählen wir die zwei nicht verbundenen Knoten  $u$  und  $v$  so, dass  $\text{val}_G(u) + \text{val}_G(v)$  maximal ist. Dabei seien die Bezeichnungen  $u$  und  $v$  so gewählt, dass  $\text{val}_G(u) \leq \text{val}_G(v)$  gilt.

Sei  $i = \text{val}_G(u)$  gesetzt. Wir zeigen nun  $i < \frac{n}{2}$  sowie  $d_i \leq i$  und  $d_{n-i} < n - i$  im Widerspruch zur Voraussetzung, was den Beweis abschließt.

Aus  $\text{cl}(G) = G$  folgt  $\text{val}_G(u) + \text{val}_G(v) \leq n - 1$ . Wegen  $\text{val}_G(u) \leq \text{val}_G(v)$  ergibt sich  $i < \frac{n}{2}$ .

Sei nun  $A$  die Menge aller Knoten aus  $V(G - v)$ , die zu  $v$  nicht adjazent sind. Es ergibt sich  $|A| = n - \text{val}_G(v) - 1 \geq \text{val}_G(u) = i$ . Wegen der Wahl von  $u$  und  $v$  gilt für alle  $u' \in A$  auch  $\text{val}_G(u') \leq \text{val}_G(u) = i$  weswegen  $d_i \leq i$  folgt.

Sei desweiteren  $B$  die Menge aller Knoten aus  $V(G - u)$ , die zu  $u$  nicht adjazent sind. Es ergibt sich  $|B| = n - \text{val}_G(u) - 1 = n - i - 1$ . Wegen der Wahl von  $u$  und  $v$  gilt für alle  $v' \in A$  auch  $\text{val}_G(v') \leq \text{val}_G(v) < n - i$ . Desweiteren ist  $\text{val}_G(u) = i < n - i$  wegen  $i < \frac{n}{2}$ , weswegen  $d_{n-i} < n - i$  folgt.  $\square$

Bisher liefern hinreichend hohe Valenzen den Hamiltonkreis. Die folgende Bedingung kommt ganz ohne Valenzen aus:

**Theorem 16 (Chvatal, Erdős, 1972)** *Ist der Knotenzusammenhang eines Graphen  $G$  mindestens so groß, wie seine Unabhängigkeitszahl, so ist  $G$  hamiltonsch oder  $G = K_2$ .*

**Beweis von Theorem 16.** Für vollständige Graphen ist die Aussage offensichtlich, weswegen wir im weiteren davon ausgehen können, dass  $G$  mindestens 2 unabhängige Knoten hat und seine Zusammenhangszahl  $k$  mithin mindestens 2 ist.

Unser Beweis verläuft nun indirekt, d.h. wir nehmen an,  $G$  hat einen längsten Kreis  $C$  derart, dass  $G - C$  noch eine Komponente  $H$  besitzt.

Nach einem Satz von Dirac aus der Grundlagenvorlesung wissen wir, dass in einem  $k$ -fach zusammenhängenden Graphen im Falle  $k \geq 2$  beliebige  $k$  Knoten auf einem Kreis

liegen. Es ergibt sich  $|V(C)| \geq k$ . Nach Mengers Theorem gibt es in  $G$  also  $k$   $V(C)V(H)$ -Wege, die nach Konstruktion von  $H$  alle die Länge 1 haben. Folglich besitzt  $C$  Knoten  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , welche in  $G$  zu  $C$  benachbart sind. Wir legen in  $C$  einen Umlaufsinn fest und bezeichnen den in diesem Umlaufsinn auf  $u_i$  folgenden Knoten mit  $a_i$ .

Gibt es zwei Indizes  $i$  und  $j$  derart dass  $a_i$  mit  $a_j$  benachbart ist, so erhalten wir im Widerspruch zur Wahl von  $C$  einen längeren Kreis  $C'$  indem wir die Kanten  $a_i u_i$  und  $a_j u_j$  aus  $C$  streichen und die Kante  $a_i a_j$  sowie einen Weg von  $u_i$  durch  $H$  nach  $u_j$  einfügen.

Also sind die Knoten  $a_1, a_2, \dots, a_k$  unabhängig. Wäre ein  $a_i$  zu  $H$  benachbart, so gäbe es ein  $j$  mit  $a_i = u_j$  und damit wäre wiederum  $a_i$  zu  $a_j$  benachbart. Also ist keines der  $a_i$  zu Knoten aus  $H$  benachbart. Wir finden daher  $k + 1$  unabhängige (paarweise nicht benachbarte) Knoten in  $G$  und zwar die  $a_i$  zuzüglich eines beliebigen Knotens aus  $H$  und erhalten als Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Unabhängigkeitszahl von  $G$  größer als sein Zusammenhang ist.  $\square$

## 3 Extremale Graphentheorie

### 3.1 Einleitung

Hat ein Graph  $G$  keinen Untergraph isomorph zu einem Graphen  $H$ , so bezeichnen wir  $G$  als  $H$ -frei.

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel exemplarisch mit folgender Fragestellung: Gegeben ist ein schlichter Graph  $H$ . Wieviele Kanten kann  $H$ -freier Graph  $G$  auf  $n$  Knoten höchstens haben? Die gesuchte Anzahl bezeichnen wir mit  $\text{ex}(n, H)$ . Uns interessiert insbesondere auch das Aussehen der  $H$ -freien Graphen  $G$  auf  $n$  Knoten mit  $\text{ex}(n, H)$  Kanten.

Im Rahmen dieser Fragestellung macht es keinen Sinn, zwischen verschiedenen isomorphen Graphen zu unterscheiden. Daher betrachten wir in diesem Kapitel isomorphe Graphen als gleich.

### 3.2 Der Satz von Turan

Betrachten wir zunächst den Spezialfall  $H = K_r$ . Um  $K_r$ -Freiheit zu sichern bietet es sich an,  $r - 1$ -partite Graphen auf  $n$  Knoten zu betrachten. Um die Kantenzahl zu maximieren, seien beliebige zwei Knoten unterschiedlicher Partitions Mengen in den betrachteten Graphen verbunden. Unter diesen Voraussetzungen scheinen wiederum jene maximale Kantenzahl zu haben, bei denen sich die Partitions Mengen in ihrer Mächtigkeit um höchstens 1 unterscheiden.

Nach seinem Entdecker bezeichnen wir einen vollständigen  $r - 1$ -partite Graphen auf  $n$  Knoten, dessen Partitions Mengen sich in ihrer Mächtigkeit um höchstens 1 unterscheiden, mit  $T_{r-1}(n)$ , seine Kantenzahl  $t_{r-1}(n)$  und nennen ihn *Turángraph auf  $n$  Knoten*. Es sei erwähnt, dass diesem Kontext leere Partitions Mengen zulässig sind, weswegen der vollständige Graph auf  $n$  Knoten ( $K_n$ ) für  $n < r$  stets ein  $T_{r-1}(n)$  ist (und wie wir gleich sehen werden, der einzige).

Haben die größten Partitions Mengen eines  $T_{r-1}(n)$  die Größe  $k + 1$  und hat er genau  $\ell$  Partitions Mengen dieser Größe, so folgt  $n = (r - 1)k + \ell$  und  $1 \leq \ell \leq r - 1$ . Damit sind  $k$  und  $\ell$  aber für jedes  $n$  eindeutig festgelegt, weswegen  $T_{r-1}(n)$  (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt ist, weswegen auch  $t_{r-1}(n)$  eindeutig bestimmt ist.

Es ergibt sich somit die Vermutung, dass folgender Satz gilt:

**Theorem 17 (Turán, 1941)**  $T_{r-1}(n)$  ist der einzige  $K_r$ -freie Graph auf  $n$  Knoten mit  $\text{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n)$  Kanten.

Wir geben zwei Beweise. Die Idee des ersten Beweises ist Induktion nach  $n$  und Betrachtung eines extremalen  $K_r$ -freien Graphen  $G$ , wobei wir im Induktionsschritt die Voraussetzung für einen Graphen  $G - v$  anwenden, dessen Kantenzahl wir durch  $t_{r-1}(n - 1)$  nach oben abschätzen können. Dabei ist  $v$  mit möglichst kleiner Valenz gewählt, um auch die Zahl der zu  $v$  inzidenten Kanten ( $\text{val}_G(v)$ ) über  $T_{r-1}(n - 1)$  abschätzen zu können. Wir erhalten dann über die Existenz von  $T_r(n)$ , dass in allen Ungleichungen Gleichheit herrschen muss, was  $G - v = T_{r-1}(n - 1)$  und  $G = T_r(n)$  nach sich ziehen wird.

**Beweis von Theorem 17.** Vorbemerkung:

Da sich maximale und minimale Valenz in Turángraphen höchstens um 1 unterscheiden, ist die durchschnittliche Valenz eines Turángraphen um weniger als 1 größer als seine Minimalvalenz. Alle Graphen mit gleicher oder kleinerer Durchschnittsvalenz (insbesondere solche mit gleichvielen Knoten und höchstens gleichvielen Kanten) haben also eine Minimalvalenz, welche höchstens gleich der des entsprechenden Turángraphen ist.

Die Minimalvalenz eines Graphen  $G$  bezeichnen wir wieder mit  $\delta(G)$ .

Induktionsanfang: Falls  $n < r$  ist  $T_{r-1}(n) = K_n$  und die Behauptung ist trivial.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass  $T_{r-1}(n - 1)$  der einzige  $K_r$ -freie Graph auf  $n$  Knoten mit  $\text{ex}(n, K_r)$  Kanten ist, weswegen insbesondere  $\text{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n)$  gilt. Sei  $G$  ein  $K_r$ -freier Graph mit  $\text{ex}(n, K_r)$  Kanten. Wir müssen und werden zeigen, dass dann  $G = T_{r-1}n$  gilt.

Desweiteren sei  $v$  ein Knoten minimaler Valenz von  $G$ . Es folgt  $|E(G)| = |E(G - v)| + \text{val}_G(v)$  und da  $G - v$  wie  $G$  ein  $K_r$ -freier Graph ist, ergibt sich  $|E(G - v)| \leq t_{r-1}(n - 1)$ , wobei Gleichheit nur im Falle  $G - v = T_{r-1}(n - 1)$  eintritt. Insbesondere folgt mit der Vorbemerkung:  $|\delta(G - v)| \leq \delta(T_{r-1}(n - 1))$

Des weiteren gilt  $\text{val}_G(v) = \delta(G) \leq \delta(G - v) + 1$ , da die Valenzen der Knoten von  $G - v$  bei Übergang zu  $G$  höchstens um 1 wachsen.

Zusammengefasst erhalten wir

$$\begin{aligned} t_{r-1}(n) &\leq \text{ex}(n, K_r) \\ &= |E(G)| \\ &= |E(G - v)| + \text{val}_G(v) \\ &\leq t_{r-1}(n - 1) + \text{val}_G(v) \\ &\leq t_{r-1}(n - 1) + \delta(G - v) + 1 \\ &\leq t_{r-1}(n - 1) + \delta(T_{r-1}(n - 1)) + 1 \end{aligned}$$

Sei wie in der Einleitung dieses Kapitels  $n = k(r - 1) + \ell$  mit  $\ell \in \{1, 2, \dots, r - 1\}$ .

Falls  $\ell > 1$  erhalten wir  $T_{r-1}(n - 1)$  durch Löschen eines Knotens minimaler Valenz aus  $T_{r-1}(n)$ , wobei die Minimalvalenz um 1 sinkt. In diesem Fall ergibt sich also  $t_{r-1}(n) = t_{r-1}(n - 1) + \delta(T_{r-1}(n)) = t_{r-1}(n - 1) + \delta(T_{r-1}(n - 1)) + 1$ , weswegen in der vorhergehenden Ungleichungskette überall Gleichheit gelten muß. Also gilt  $t_{r-1}(n) = \text{ex}(n, K_r)$ ,  $|E(G - v)| = t_{r-1}(n - 1)$  (und damit  $G - v = T_{r-1}(n - 1)$ ) sowie  $\text{val}_G(v) = \delta(T_{r-1}(n - 1)) + 1 = \Delta(T_{r-1}(n - 1))$ . Da  $v$  in  $G$  wegen  $K_r$ -Freiheit nicht mit allen Partitions Mengen von  $G - v = T_{r-1}(n - 1)$  verbunden sein kann, muss es folglich zumindest mit allen maximalen Partitions Mengen und allen bis auf eine minimale Partitions Menge verbunden sein, was  $G = T_{r-1}(n)$  nach sich zieht.

Es bleibt der Fall  $\ell = 1$ . Hier erhalten wir zumindest  $t_{r-1}(n) = t_{r-1}(n - 1) + \delta(T_{r-1}(n - 1))$ , weswegen genau eine der betrachteten Ungleichungen aus der Zusammenfassung echt sein muß (die verglichenen Terme waren ganzzahlig). Wäre  $|E(G - v)| < t_{r-1}(n - 1)$ , so folgt  $\delta(G - v) < \delta(T_{r-1}(n - 1))$ , da  $T_{r-1}(n - 1)$  regulär ist. Dies würde aber zwei echte Ungleichungen zur Folge haben. Also gilt  $|E(G - v)| = t_{r-1}(n - 1)$  und mithin  $G - v = T_{r-1}(n - 1)$ . Daher muß wegen Kantenmaximalität und  $K_r$ -Freiheit von  $G$  der Knoten  $v$  in  $G$  mit allen bis auf eine Partitions Menge von  $G - v$  verbunden sein, was schließlich  $G = T_{r-1}(n)$  zur Folge hat.  $\square$

Der zweite Beweis ist beispielhaft für die extremale Graphentheorie. Die Idee ist, grob gesagt, zu zeigen, dass man die Kantenanzahl eines  $K_r$ -freien Graphen vergrößern kann, ohne einen  $K_r$  zu erzeugen, solange dieser nicht die Struktur hat, über welche die Turángraphen definiert wurden.

**Beweis von Theorem 17.** Sei  $G$  ein  $K_r$ -freier Graph mit  $n$  Knoten und  $\text{ex}(n, K_r)$  Kanten. Zu einem  $v \in G$  bezeichne  $X_v$  die Menge der Knoten  $x$  in  $G$ , die nicht adjazent zu  $v$  sind. Mit  $F_v$  wird  $X_v \cup v$  bezeichnet. Wir betrachten nun die Menge  $M$  aller solchen  $v$ , die unter allen Knoten aus  $F_v$  größte Valenz in  $G$  haben. Ein Knoten mit Maximalvalenz ist beispielsweise ein solcher. Sei nun  $v \in M$ .

Seien nun  $x$  und  $y$  beliebige Knoten von  $X_v$  und  $G'$  bzw.  $G''$  ergeben sich aus  $G$  durch Löschen aller Kanten inzident zu  $x$  gefolgt vom Verbinden von  $x$  mit allen Nachbarn von  $v$ , bzw. durch Löschen aller Kanten inzident zu  $x$  und  $y$  gefolgt vom Verbinden von  $x$  und  $y$  mit allen Nachbarn von  $v$ .

In  $G'$  sind  $x$  und  $v$  unabhängig, in  $G''$  sogar  $x, y$  und  $v$ . Ein eventueller  $K_r$  von  $G'$  kann also höchstens einen der Knoten  $x$  und  $v$  enthalten, ein eventueller  $K_r$  von  $G''$  entsprechend höchstens einen der Knoten  $x, y$  und  $v$ .

Wegen

$$G' - v \cong G' - x = G - x \subseteq G$$

und

$$G'' - v - x \cong G'' - v - y \cong G'' - x - y = G - x - y \subseteq G$$

sind  $G'$  und  $G''$  sogar gänzlich  $K_r$ -frei.

Nun ergibt sich

$$|E(G)| \geq |E(G')| = |E(G)| - \text{val}_G(x) + \text{val}_G(v)$$

, also  $\text{val}_G(x) \geq \text{val}_G(v)$  und mithin wegen der Wahl von  $v$ :

**Beobachtung 3.2.1** *Alle Knoten von  $X_v$  haben gleiche Valenz wie  $v$ .*

Weiter ergibt sich damit

$$|E(G)| \geq |E(G'')| \geq |E(G)| - (\text{val}_G(x) + \text{val}_G(y)) + 2\text{val}_G(v) = |E(G)|$$

wobei einerseits in der zweiten Ungleichung nur Gleichheit gilt, wenn  $x$  und  $y$  unabhängig sind, andererseits aber in allen Ungleichungen Gleichheit gelten muß, da ganz links und ganz rechts in der Kette das Gleiche steht. Also sind die Knoten von  $X_v$  unabhängig und wegen der Konstruktion von  $X_v$  und  $F_v$  ergibt sich

**Beobachtung 3.2.2**  *$F_v$  ist unabhängig.*

Wegen Beobachtung 3.2.1, Beobachtung 3.2.2 und der Konstruktion von  $F_v$  ergibt sich:

**Beobachtung 3.2.3** *Alle Knoten aus  $F_v$  haben die gleiche Nachbarschaft wie  $v$ , nämlich  $V(G) \setminus F_v$ .*

Insbesondere folgt:

**Beobachtung 3.2.4** *Aus  $u \in F_v$  folgt  $F_u = F_v$ .*

was zu

**Beobachtung 3.2.5**  *$P = \{F_v | v \in M\}$  bildet eine Partition von  $M$ .*

führt. Nun machen wir außerdem folgende Beobachtung:

**Beobachtung 3.2.6**  *$M = V(G)$ .*

Begründung (indirekt): Für ein  $w \in V(G) \setminus M$  kann  $F_w$  keinen Knoten  $v \in M$  enthalten, da sonst nach Beobachtungen 3.2.4 und 3.2.5  $F_w = F_v \subseteq M$  und damit  $w \in M$  folgen würde. Damit ist aber ein  $w \in V(G) \setminus M$  maximaler Valenz auch in  $F_w$  der Knoten maximaler Valenz, was nach Definition von  $M$  wiederum  $w \in M$  zur Folge hat. Also kann es ein solches  $w$  nicht geben.

Wegen der Beobachtungen 3.2.3, 3.2.5 und 3.2.6, sowie der  $K_r$ -Freiheit von  $G$  ergibt sich

**Beobachtung 3.2.7**  *$G$  ist ein vollständiger  $r - 1$ -partiter Graph, wobei eventuell leere Partitions Mengen auftreten.*

Sei  $v$  nun ein Knoten einer möglichst großen Partitionsmenge  $A$  von  $G$ , und  $B$  sei eine möglichst kleine Partitionsmenge von  $G$ . Dann liefert Löschen aller Kanten von  $v$  nach  $B$  gefolgt vom Verbinden von  $v$  mit allen Kanten aus  $A \setminus v$  wieder einen vollständigen  $r - 1$ -partiten Graphen, wobei die Kantenzahl um  $|A| - 1 - |B|$  gestiegen ist. Es folgt also

**Beobachtung 3.2.8** *Die Partitions Mengen von  $G$  unterscheiden sich in ihrer Mächtigkeit höchstens um 1.*

Beobachtungen 3.2.7 und 3.2.8 liefern aber  $G = T_{r-1}(n)$ . □

### 3.3 Asymptotisches Verhalten von $\text{ex}(n, H)$

Um das asymptotische Verhalten von  $\text{ex}(n, H)$  bestimmen zu können, ist folgender Satz hilfreich:

**Theorem 18 (Erdős, Stone, 1946)** *Zu jedem ganzen  $r \geq 2$ , jedem positiven ganzen  $s$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Zahl  $n_0$  derart, dass jeder Graph mit mehr als  $n_0$  Knoten und mindestens  $t_{r-1}(n) + \varepsilon n^2$  Kanten den  $T_r(rs)$  als Teilgraphen enthält.*

Den Beweis dieses Satzes bringen wir im nächsten Abschnitt. Wir wollen ihn hier verwenden, um folgendes Korollar zu zeigen:

**Korollar 19** *Für jeden Graphen  $H$  mit mindestens einer Kante gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, H)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(H) - 2}{\chi(H) - 1}$$

**Beweis von Korollar 19.** Zunächst kümmert uns das asymptotische Verhalten von  $t_{r-1}(n)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(r-1)(r-2) \left(\frac{n}{r-1} + O(1)\right)^2}{n^2 + O(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(r-1)(r-2) \left(\frac{n}{r-1}\right)^2 + O(n)}{n^2 + O(n)} \\ &= \frac{(r-1)(r-2)}{(r-1)^2} \\ &= \frac{r-1}{r-2} \end{aligned}$$

Damit ist das Korollar für  $H = K_r$  gezeigt.

Im weiteren sei  $r = \chi(H)$  gesetzt. Damit gilt  $H \not\subseteq T_{r-1}(n)$  für beliebige natürliche  $n$ , woraus  $t_{r-1}(n) \leq \text{ex}(n, H)$  folgt. Andererseits gilt  $H \subseteq T_r(rs)$  sofern  $s$  die Mächtigkeit der größten Farbklasse einer zulässigen  $r$ -Färbung von  $H$  ist. Also gilt  $\text{ex}(n, H) \leq \text{ex}(n, T_r(rs))$ . Nach Satz 18 gilt also für jedes  $\varepsilon > 0$  für hinreichend große  $n$ :

$$\text{ex}(n, T_r(rs)) < t_{r-1}(n) + \varepsilon n^2$$

. Zusammengefaßt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} &\leq \frac{\text{ex}(n, H)}{\binom{n}{2}} \\
&\leq \frac{\text{ex}(n, T_r(rs))}{\binom{n}{2}} \\
&< \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} + \varepsilon \frac{n^2}{\binom{n}{2}} \\
&= \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} + 2\varepsilon \frac{n}{n-1} \\
&\leq \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} + 3\varepsilon \text{ (für } n \geq 2).
\end{aligned}$$

Mit  $\frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}}$  konvergiert also auch  $\frac{\text{ex}(n, H)}{\binom{n}{2}}$  gegen  $\frac{r-2}{r-1}$ , also in der Tat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, H)}{\binom{n}{2}} = \frac{r-2}{r-1}$$

□

### 3.4 Das Regularitätslemma

In diesem Abschnitt ist  $G$  ein vorgegebener schlichter Graph auf  $n$  Knoten.  $V$  bezeichnet die Knotenmenge dieses Graphen und  $E$  seine Kantenmenge. Für disjunkte  $X, Y \subseteq V(G)$  sei  $||X, Y||$  die Anzahl der Kanten von  $G$ , welche Knoten aus  $X$  mit Knoten aus  $Y$  verbinden.  $G$  kann maximal  $|X||Y|$  solcher Kanten haben, was die *Kantendichte*  $d(X, Y)$  des Paares  $(X, Y)$  motiviert:

$$d(X, Y) := \frac{||X, Y||}{|X| \cdot |Y|}$$

Ein Paar  $(A, B)$  disjunkter Teilmengen von  $V$  heißt  $\varepsilon$ -*regulär*, sofern für jede Teilmenge  $X$  von  $A$  mit mindestens  $\varepsilon|A|$  Elementen und jede Teilmenge  $Y$  von  $B$  mit mindestens  $\varepsilon|B|$  Elementen die Kantendichte des Paares  $(X, Y)$  von der Kantendichte von  $(A, B)$  um höchstens  $\varepsilon$  abweicht. Wir bemerken, dass Paare einelementiger Mengen stets für beliebiges  $\varepsilon > 0$  auch  $\varepsilon$ -regulär sind.

$P = \{V_0, V_1, \dots, V_k\}$  mit ausgezeichnetener Menge  $V_0$  heißt  $\varepsilon$ -*regulär*, falls  $P$  eine Partition von  $V$  ist, für die gilt: Eigenschaften

1.  $|V_0| \leq \varepsilon|V|$  (eventuell ist  $V_0$  sogar leer).
2.  $|V_1| = \dots = |V_k|$  und
3. Alle bis auf  $\varepsilon k^2$  der Paare  $(V_i, V_j)$  mit  $1 \leq i < j \leq k$  sind  $\varepsilon$ -regulär.

### Lemma 3.4.1 (Regularitätslemma, Szemeredy, 1976)

$\forall \varepsilon > 0 \forall m \geq 1 \exists M \geq m \forall G, |V(G)| \geq m \exists \{V_0, V_1, \dots, V_k\}$   $\varepsilon$ -regulär mit  $m \leq k \leq M$ .

Es sei erwähnt, dass die Existenz irgendeiner  $\varepsilon$ -regulären Partition immer gesichert ist. Nimmt man  $V_0$  als leere Menge an, und wählt die anderen  $V_i$  einelementig, was zu  $k = n$  führt, so ist diese Partition  $\varepsilon$ -regulär für beliebiges  $\varepsilon > 0$ . Ebenso verhält es sich mit  $V_0 = \emptyset$ ,  $V_1 = V$  und  $k = 1$ . Da  $M$  im Regularitätslemma nicht von der Knotenzahl von  $G$  abhängt und  $m$  beliebig groß gewählt werden kann, verspricht uns das Regularitätslemma aber eine  $\varepsilon$ -reguläre Partition, welche beliebig viele beliebig große Partitions Mengen enthält, sofern nur  $n$  entsprechend groß ist. Dadurch muss die Kantendichte vieler Paare von Partitions Mengen ( $V_0$  mal ausgenommen) aber dicht unterhalb oder sogar oberhalb der Kantendichte des Gesamtgraphen liegen. Diese Erkenntnisse werden uns helfen, das Regularitätslemma später anzuwenden.

Kommen wir zunächst aber zum Beweis des Regularitätslemmas:

**Beweis von Lemma 3.4.1.** Beweisidee:

Wir führen eine geeignete Funktion  $q(P)$  (die wir *Qualität* von  $P$  nennen) für Partitionen  $P$  von  $V$  ein, die folgende Eigenschaften hat:

1. Für beliebige Partitionen gilt  $q(P) < 1$ .
2. Ist eine Partition  $P'$  Verfeinerung von  $P$  so gilt  $q(P') \geq q(P)$ .
3. Eine Partition  $\{V_1, \dots, V_k\}$  mit zu vielen hinreichend großen nicht  $\varepsilon$ -regulären Paaren  $(V_i, V_j)$  lässt sich so verfeinern, dass die Qualität der Partition dabei um  $f(\varepsilon) > 0$  steigt, wobei die Zahl der Partitions Mengen nur Abhängig von ihrer Anzahl in der Ausgangspartition wächst.

Die dritte Eigenschaft liefert dann also wiederholt Verfeinerungen einer hinreichend großen Ausgangspartition, bis genügend viele Paare aus großen Partitions Mengen  $\varepsilon$ -regulär sind. Bei der Verfeinerung sollten wir darauf achten, dass die "hinreichend großen" Partitions Mengen alle gleichgroß werden, und der Rest nicht zu groß wird, da wir ihn in der Ausnahmemenge ("Mülleimer")  $V_0$  ansammeln wollen. Dazu können wir die zweite Eigenschaft ausnutzen. Da wegen der ersten Eigenschaft nur beschränkt (d.h. unabhängig von  $n$ ) viele Verfeinerungen nötig werden, wird auch die Zahl der Partitions Mengen beschränkt bleiben.

Gehen wir nun ins Detail:

**Die Qualität einer Partition:** Wir definieren für disjunkte Teilmengen  $A, B$  von  $V$ :

$$q(A, B) := \frac{||A, B||^2}{n^2|A| \cdot |B|} = \frac{|A||B|}{n^2}(d(A, B))^2,$$

für Partitionen  $\mathcal{A}$  von  $A$  und  $\mathcal{B}$  von  $B$ :

$$q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sum_{(A', B') \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} q(A', B')$$

und für Partitionen  $P = \{C_1, \dots, C_k\}$  von  $V$ :

$$q(P) := \sum_{i < j} q(C_i, C_j) .$$

**Eigenschaften von  $q$ :**

$$\begin{aligned} q(\{C_1, \dots, C_k\}) &= \sum_{i < j} q(C_i, C_j) && \text{(Definition } q(P)) \\ &= \sum_{i < j} \frac{\|C_i, C_j\|^2}{n^2 |C_i| \cdot |C_j|} && \text{(Definition } q(A, B)) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i < j} \frac{(|C_i| \cdot |C_j|)^2}{|C_i| \cdot |C_j|} && \text{(Maximale Zahl } C_i C_j\text{-Kanten)} \\ &= \frac{\binom{n}{2}}{n^2} && \text{(Maximale Kantenzahl)} \\ &< 1 \end{aligned}$$

liefert in der Tat:

**Beobachtung 3.4.2** Für jede Partition  $P$  gilt  $q(P) \leq 1$

Sei  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$  und  $\mathcal{D} = D_1, \dots, D_\ell$ .

$$\begin{aligned} q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &= \sum_{i,j} q(C_i, D_j) && \text{(Definition von } q(\mathcal{C}, \mathcal{D})) \\ &= n^{-2} \sum_{i,j} \frac{\|C_i, D_j\|^2}{|C_i| \cdot |D_j|} && \text{(Definition von } q(C_i, D_j)) \\ &\geq n^{-2} \frac{\left( \sum_{i,j} \|C_i, D_j\| \right)^2}{\sum_{i,j} |C_i| \cdot |D_j|} && \text{(Cauchy Schwartz)}^1 \\ &= \frac{\|\mathcal{C}, \mathcal{D}\|^2}{n^2 \left( \sum_i |C_i| \right) \left( \sum_j |D_j| \right)} && \text{(Zähler Zusammenfassen und Nenner Ausklammern)} \\ &= q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) && \text{(Nenner Zusammenfassen und Definition } q(\mathcal{C}, \mathcal{D})) \end{aligned}$$

liefert:

**Beobachtung 3.4.3** Für disjunkte Teilmengen  $C$  und  $D$  von  $V$  sowie Partitionen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  von  $C$  bzw.  $D$  gilt:

$$q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq q(C, D).$$

---

<sup>1</sup>Die Ungleichung von Cauchy Schwartz

$$\left( \sum a_i^2 \right) \left( \sum b_i^2 \right) \geq \left( \sum a_i b_i \right)^2$$

geht mit  $a_i = \sqrt{\mu_i}$  und  $b_i = \frac{e_i}{\sqrt{\mu_i}}$  über in

$$\sum \frac{e_i^2}{\mu_i} \geq \frac{(\sum e_i)^2}{\sum \mu_i}.$$

Sei  $P = \{C_1, \dots, C_k\}$  und für  $i = 1 \dots k$  sei  $\mathcal{C}_i$  die Teilpartition von  $C_i$  in  $P'$ .

$$\begin{aligned}
q(P) &= \sum_{i < j} q(C_i, C_j) && \text{(Definition von } q(P)\text{)} \\
&\leq \sum_{i < j} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) && \text{(Beobachtung 3.4.3)} \\
&= q(P') - \sum_i q(C_i) && \text{(Definition } q(P') \text{ abzüglich fehlender Summanden)} \\
&\leq q(P') && \text{(fehlende Summanden nicht negativ)}
\end{aligned}$$

liefert in der Tat:

**Beobachtung 3.4.4** *Sind  $P$  und  $P'$  Partitionen von  $V$  und ist  $P'$  eine Verfeinerung von  $P$ , so gilt  $q(P') \geq q(P)$ .*

Sind  $C$  und  $D$  wieder disjunkte Teilmengen von  $V$  und ist  $(C, D)$  nicht  $\varepsilon$ -regulär, so gibt es definitionsgemäß  $C_1 \subset C$  und  $D_1 \subseteq D$  mit  $|C_1| > \varepsilon|C|$  und  $|D_1| > \varepsilon|D|$  derart, dass  $\eta := |d(C_1, D_1) - d(C, D)| > \varepsilon$  gilt. Sei  $C_2 = C \setminus C_1$  und  $D_2 = D \setminus D_1$ , sowie  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\}$  und  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$  gesetzt.

$$\begin{aligned}
n^2q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &= n^2q(C_1, D_1) + \sum_{i+j>2} n^2q(C_i, D_j) && \text{(Definition von } q(\mathcal{C}, \mathcal{D})\text{)} \\
&\geq \frac{|C_1||D_1|^2}{|C_1||D_1|} + \frac{(|C||D| - |C_1||D_1|)^2}{|C||D| - |C_1||D_1|} && \text{(Cauchy-Schwartz-Trick)} \\
&= |C_1||D_1|(d(C, D) \pm \eta)^2 + \frac{(|C||D|d(C, D) - |C_1||D_1|(d(C, D) \pm \eta))^2}{|C||D| - |C_1||D_1|} && \text{(Definition } \eta\text{)} \\
&= |C_1||D_1|(d(C, D) \pm \eta)^2 + \frac{(d(C, D)(|C||D| - |C_1||D_1|) \mp |C_1||D_1|\eta)^2}{|C||D| - |C_1||D_1|} && \text{(Sortieren)} \\
&= \eta^2 \left( |C_1||D_1| + \frac{|C_1|^2|D_1|^2}{|C||D| - |C_1||D_1|} \right) + |C||D|d(C, D)^2 && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= \frac{|C_1||D_1||C||D|}{|C||D| - |C_1||D_1|} \eta^2 + n^2q(C, D) && \text{(Definition } q(C, D)\text{)} \\
&\geq |C||D|\varepsilon^4 + n^2q(C, D) && (\eta^2 \geq \varepsilon^2 \geq 0), |C_1| \geq \varepsilon|C| \text{ und } |D_1| \geq \varepsilon|D|
\end{aligned}$$

Das liefert:

**Beobachtung 3.4.5** *Ist  $\varepsilon > 0$  und sind  $C, D \subseteq V$  disjunkt aber nicht  $\varepsilon$ -regulär, so gibt es Partitionen  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\}$  von  $C$  und  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$  von  $D$  derart, dass  $q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq q(C, D) + \varepsilon^4 \frac{|C||D|}{n^2}$  gilt.*

Betrachten wir nun eine Partition  $P = \{C_1, C_2, \dots, C_k, C_{k+1}, \dots, C_{k+r}\}$  mit gleichgroßen  $C_i$  für  $i \leq k$  und  $|C_0| \leq \varepsilon n$  wobei  $C_0$  die Vereinigung der Partitions Mengen mit Index größer  $k$  ist, und nehmen an, dass mehr als  $\varepsilon k^2$  der Paare  $(C_i, C_j)$  mit  $i < j \leq k$  nicht  $\varepsilon$ -regulär sind. Mit  $c$  bezeichnen wir die Größe der Partitions Mengen  $C_i, i \leq k$  und mit  $\mathcal{C}_0$  die Partition  $\{C_{k+1}, \dots, C_{k+r}\}$  von  $C_0$ . Es folgt  $kc \geq n(1 - \varepsilon)$ . Sei weiterhin  $\varepsilon < \frac{1}{4}$ . Wir definieren zunächst Partitionen  $\mathcal{C}_{ij}$  von  $C_i$  und  $\mathcal{C}_{ji}$  von  $C_j$  ( $0 < i < j \leq k$ ) wie folgt:

- Wenn  $(C_i, C_j)$  ein  $\varepsilon$ -reguläres Paar ist, sei  $\mathcal{C}_{ij} = \{C_i\}$  und  $\mathcal{C}_{ji} = \{C_j\}$ .

- Anderenfalls seien  $\mathcal{C}_{ij}$  und  $\mathcal{C}_{ji}$  jeweils zweielementige Partitionen von  $C_i$  und  $C_j$  gemäß Beobachtung 3.4.5, also derart, dass gilt:

$$q(\mathcal{C}_{ij}, \mathcal{C}_{ji}) \geq q(C_i, C_j) + \varepsilon^4 \frac{|C_i||C_j|}{n^2} = q(C_i, C_j) + \frac{\varepsilon^4 c^2}{n^2} \geq \frac{\varepsilon^4 (1-\varepsilon)^2}{k^2} \geq \frac{\varepsilon^4}{2k^2} \quad (\boxtimes)$$

Für jedes  $i \leq k$  sei  $\mathcal{C}_i$  die eindeutig bestimmte Partition von  $C_i$ , bei welcher je zwei Elemente von  $C_i$  genau dann in einer Partitionsmenge liegen, wenn sie auch in jeder Partition  $\mathcal{C}_{ij}$  mit  $0 < j \leq k, j \neq i$  in der gleichen Partitionsmenge liegen. Es folgt  $|\mathcal{C}_i| \leq 2^k$ .

Wir erhalten Partition

$$Q = \bigcup_{i=0}^k \mathcal{C}_i$$

als Verfeinerung von  $P$  mit  $k + r \leq |Q| \leq k2^k + r$ , welche höhere Qualität hat:

$$\begin{aligned} q(Q) &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) + \sum_{1 \leq i} q(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_i) + \sum_i q(\mathcal{C}_i) && \text{(Definitionen } q(P), q(\mathcal{A}, \mathcal{B})\text{)} \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k q(\mathcal{C}_{ij}, \mathcal{C}_{ji}) + \sum_{i=1}^k q(\mathcal{C}_0, \{C_i\}) + q(\mathcal{C}_0) && \text{(Beobachtung 3.4.3)} \\ &\geq \varepsilon k^2 \frac{\varepsilon^4}{2k^2} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k q(C_i, C_j) + \sum_{i=1}^k q(\mathcal{C}_0, \{C_i\}) + q(\mathcal{C}_0) && (\varepsilon k^2 \text{ mal } (\boxtimes) \text{ anwenden)} \\ &= q(P) + \frac{1}{2}\varepsilon^5 && \text{(Zusammenfassen)} \end{aligned}$$

Die Qualität der Partition ist in der Tat unabhängig von  $n$  gewachsen. Allerdings sind die Partitions Mengen außerhalb  $C_0$  nicht mehr gleichgroß. Wir zerlegen daher die Partitions Mengen weiter in möglichst gleichgroße Stücken: Sei dazu  $\{C'_1, C'_2, \dots, C'_\ell\}$  ein System möglichst vieler disjunkter Mengen der Größe  $c' = \lfloor \frac{c}{4^k} \rfloor$  derart, dass jedes der  $C_i$  in einer Partitionsmenge von  $Q$  enthalten ist. Die restlichen Elemente Knoten aus  $V$  sammeln wir in einer Menge  $C'_0$ , zu der  $C'_0$  die Partition in lauter einelementige Teilmengen bildet. Dann ist die Partition  $P^* = C'_0 \cup \{C'_1, C'_2, \dots, C'_\ell\}$  in der Tat eine Verfeinerung von  $Q$  und wir erhalten mit Beobachtung 3.4.4:

$$q(P^*) \geq q(Q) \geq q(P) + \frac{\varepsilon^5}{2}.$$

Für die Größe von  $C'_0$  ergibt sich folgende Abschätzung:

$$|C'_0| \leq |C_0| + d|Q| \leq |C_0| + \frac{c}{4^k} k 2^k = |C_0| + \frac{ck}{2^k} \leq |C_0| + \frac{n}{2^k}.$$

Da jede Partitionsmenge von  $P$  der Größe  $c$  höchstens  $4^k$  Partitions Mengen von  $P^*$  der Größe  $c'$  aufnehmen kann, aber jedes  $C_i, 1 \leq i \leq k$  auch mindestens eine solche enthält, folgt außerdem  $k \leq \ell \leq k4^k$ .

Zusammengefasst ergibt sich folgende Beobachtung:

**Beobachtung 3.4.6** *Gilt  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$  und ist  $P = C_1, C_2, \dots, C_k \cup C_0$  eine Partition von  $V$ , wobei  $C_0$  eine Partition einer Menge  $C_0$  mit  $|C_0| \leq \varepsilon n$  ist und  $|C_1| = |C_2| = \dots = |C_k|$  gilt, und ist  $P' = \{C_0, \dots, C_k\}$  keine  $\varepsilon$ -reguläre Partition, so gibt es eine Partition  $P^* = \{C'_1, \dots, C'_\ell\} \cup C'_0$  von  $V$  mit  $k \leq \ell \leq k4^k$  derart, dass  $C'_0$  nur  $|C_0| + \frac{n}{2^k}$  Knoten umfasst, alle darin nicht enthaltenen Partitions Mengen gleichgroß sind, und  $q(P^*) \geq q(p) + \frac{1}{2}\varepsilon^5$  gilt.*

Starten wir mit einer Partition  $P_0$  mit  $k_0$  gleichgroßen sowie eventuell weiteren Partitions-  
mengen, so können wir Beobachtung 3.4.6 solange iteriert auf  $P = P_i$  mit  $k = k_i$  anwenden  
um  $P_{i+1} = P^*$  mit  $k_{i+1} = l$  zu bestimmen, bis

- entweder die aus  $P = P_i$  gemäß Beobachtung 3.4.6 abgeleitete Partition  $P'$   $\varepsilon$ -regulär  
ist,
- oder das entsprechende  $C_0$  zu viele Knoten (mehr als  $\varepsilon n^2$ ) enthält.

Wegen Beobachtung 3.4.2 tritt der erste Fall nach spätestens  $2\varepsilon^{-5}$  Iterationen ein (sofern  
nicht vorher der zweite Fall eintritt).

Ist  $P$  zu Beginn so gewählt, dass  $|C_0| < k_0$  gilt, also  $c = \lfloor \frac{n}{k_0} \rfloor$ , so tritt der zweite Fall  
frühestens nach

$$\frac{(\varepsilon n - k_0)}{\frac{n}{2^{k_0}}} = 2^{k_0} \left( \varepsilon - \frac{k_0}{n} \right)$$

Schritten auf (man beachte, dass die Zahl der Partitions-mengen wächst und  $k_0$  daher stets  
eine untere Abschätzung für  $k_i$  bleibt).

Wir müssen also  $k_0$  nur so wählen, dass

$$2^{k_0} \left( \varepsilon - \frac{k_0}{n} \right) > \frac{2}{\varepsilon^5}$$

gilt und  $k_0 \geq m$  ist, was mit  $k_0 = \max\{m, 3, 3 + 6\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil\}$  im Falle  $n > 2\frac{k_0}{\varepsilon}$  gelingt. Da im  
Falle  $n < M$  die Aussage des Regularitätslemmas trivial ist, sollten wir daher  $M \geq 2\frac{k_0}{\varepsilon}$   
wählen.

Bildet  $f$  die Zahl  $k$  auf die Zahl  $k4^k$  ab, so haben wir nach  $i$  Iterationen eine Partition  
 $P_i$  mit  $k_i \leq f^i(k_0)$ .

Daher ist  $M = \max\{f^i(k_0), 2\frac{k_0}{\varepsilon}\}$  mit  $i = \lfloor \frac{2}{\varepsilon^5} \rfloor$  in der Tat eine obere Schranke für die  
Zahl der Partitions-mengen einer geeigneten  $\varepsilon$ -regulären Partition von  $V$ , welche nur von  $\varepsilon$   
und  $m$  abhängt.  $\square$

### 3.5 Anwenden des Regularitätslemmas

Zunächst beobachten wir, dass in einem  $\varepsilon$ -regulären Paar  $(A, B)$  für “große” Teilmen-  
gen von  $A$  die Zahl der Knoten mit “wenigen” Nachbarn in “großen” Teilmengen von  $B$   
“klein” ist:

Sei also  $(A, B)$  ein  $\varepsilon$ -reguläres Paar mit Dichte  $d$  und  $Y \subseteq B$  eine “große” Teilmenge  
von  $B$ , genauer gelte  $|Y| \geq \varepsilon|B|$ .

In  $X$  sammeln wir nun alle Knoten aus  $A$  mit “wenigen” Nachbarn in  $Y$ , genauer all  
jene Knoten mit weniger als  $|Y|(d - \varepsilon)$  Nachbarn.

Damit ist  $d(X, Y) = \frac{||X, Y||}{|X| \cdot |Y|} \leq \frac{|X||Y|(d - \varepsilon)}{|X| \cdot |Y|} = d - \varepsilon$ , weicht also um mehr als  $\varepsilon$  von  
 $d(A, B)$  ab. Nach Definition der  $\varepsilon$ -Regularität für Paare ist also  $|X| < \varepsilon|A|$ , also “klein”.  
Zusammengefasst ergibt sich:

**Beobachtung 3.5.1** Ist  $(A, B)$  ein  $\varepsilon$ -reguläres Paar disjunkter Teilmengen von  $V(G)$  und gilt  $Y \subseteq B$  mit  $|Y| \geq \varepsilon|B|$ , so haben alle bis auf höchstens  $\varepsilon|A|$  Knoten von  $A$  mindestens  $|Y|(d - \varepsilon)$  Nachbarn in  $Y$ .

Als nächstes führen wir zu einer  $\varepsilon$ -regulären Partition  $P = \{V_0, V_1, \dots, V_k\}$  von  $V(G)$  mit Ausnahmemenge  $V_0$  und  $|V_1| = \dots = |V_k| =: \ell$  und einer vorgegebenen Kantendichte  $d$  mit  $0 < d \leq 1$  den *Regularitätsgraphen*  $R$  mit Parametern  $\varepsilon, \ell, d$  ein, der sich wie folgt ergibt:

$$V(R) = P \setminus \{V_0\}$$

und

$$E(R) = \{\{A, B\} \subseteq P \mid (A, B) \text{ ist } \varepsilon\text{-regulär mit Dichte } d(A, B) \geq d\}$$

Wir ziehen also Knotenmengen der Größe  $\ell$  auf Knoten zusammen, wobei Kanten aber nur erhalten bleiben, wenn das entsprechende Knotenmengenpaar  $\varepsilon$ -regulär mit hinreichend großer Kantendichte ist.

Blasen wir die Knoten  $r$  von  $R$  wieder auf, diesmal aber nur zu Knotenmengen  $M_r$  der Größe  $s = \lfloor \varepsilon \ell \rfloor$ , wobei nun Knoten  $a$  und  $b$  verbunden werden, wenn  $a \in M_x$  und  $b \in M_y$  liegen, wobei  $x$  und  $y$  in  $R$  verbunden waren, also, wenn die entsprechenden Knoten in  $R$  verbunden waren.

$R(s)$  ist (für kleine  $\varepsilon$ ) ein vereinfachtes Modell des Graphen  $G$ . Wir wollen nun untersuchen, wie gut das Modell ist, also wann jeder Untergraph  $H$  aus  $R(s)$  auch isomorph zu einem Untergraphen  $H'$  aus  $G$  ist. Dabei interessiert uns eine brauchbare hinreichende Bedingung.

Sei  $H$  also Untergraph von  $R$ . Die Knoten von  $H$  bezeichnen wir mit  $h_i, i = 1 \dots |V(H)|$ . Wir betrachten eine Schrittweise Konstruktion, die im  $i$ -ten Schritt den Knoten  $h'_i$  festlegt. Mit  $Y_j^i$  bezeichnen wir dabei die in Schritt  $i$  noch für  $h_j$  in Frage kommenden Knoten. Diese sollen in derjenigen Partitionsmenge von  $P$  liegen, aus der  $h_j$  hervorgegangen ist, und müssen zu allen schon festgelegten  $h'_k$  benachbart sein für die  $h_j$  zu  $h_k$  benachbart war, um in Frage zu kommen.

Daher sei zu Beginn  $Y_j^1$  jeweils die Partitionsmenge von  $P$ , aus der  $h_j$  hervorging. In Schritt  $i$  ergeben sich durch Festlegen von  $h'_i$  nur Einschränkungen für die Mengen  $Y_j^i$  für die  $h_j$  mit  $h_i$  benachbart ist. Für diese Mengen müssen wir  $Y_j^{i+1} = Y_j^i \cap N_G(h'_i)$  setzen, sie also für den nächsten Schritt auf die Nachbarschaft von  $h'_i$  einschränken.

Da in jedem Schritt  $i$  die Menge  $Y_i^i$  noch Elemente enthalten soll, achten wir darauf,  $h'_i$  möglichst clever zu wählen. Dazu möchten wir Beobachtung 3.5.1 verwenden, weswegen  $Y_i^i$  sogar noch wenigstens mehr Elemente enthalten sollte. Für jeden (noch nicht festgelegten) Nachbarn  $h_j$  von  $h_i$  müssen wir höchstens  $\varepsilon|Y_i^i|$  Elemente von  $Y_i^i$  vermeiden, weil sie nur "wenige" Nachbarn in  $Y_j^i$  haben. Insgesamt müssen wir also höchstens  $\Delta(H)\varepsilon|Y_i^i|$  wegen zu weniger Nachbarn vermeiden. Ebenso könnte es sein, dass schon Knoten aus  $|Y_i^i|$  als  $h'_k$  in früheren Schritten festgelegt wurden. Diese dürfen wir auch nicht zu  $h'_i$  machen. Wir erhalten die Forderung  $(1 - \Delta(H)\varepsilon)|Y_i^i| > s$ , welche absichert, dass unser Vorgehen nicht an Schritt  $i$  scheitert. Wir verschärfen diese mit  $\ell\varepsilon > s$  noch zu

$$(1 - \Delta(H)\varepsilon)|Y_i^i| > \ell\varepsilon.$$

Scheitert es gar nicht, so haben wir in der Tat einen Graphen  $H'$  isomorph zu  $H$  konstruiert, der Untergraph von  $G$  ist.

Wie groß sind die  $Y_j^i$  also mindestens? Nur in jedem Schritt, in dem zu einem Nachbarn  $h_k$  von  $h_j$  das  $h'_k$  festgelegt wurde, sinkt die Zahl der Elemente. Das tritt aber höchstens  $\Delta(H)$  mal auf. Zudem beschränkt uns die Auswahl von  $h'_k$  gemäß Beobachtung 3.5.1 die Größe von  $Y_j^{i+1}$  durch  $(d - \varepsilon)|Y_j^i|$  nach unten, sodass wegen  $|Y_j^1| = \ell$

$$|Y_j^i| \geq \ell(d - \varepsilon)^\Delta$$

eine gültige Abschätzung darstellt.

Unser Verfahren hat also sicher Erfolg, wenn

$$\ell(d - \varepsilon)^\Delta(1 - \Delta(H)\varepsilon) > \ell\varepsilon$$

gilt. Das führt zu

$$(d - \varepsilon)^\Delta(1 - \Delta(H)\varepsilon) > \varepsilon,$$

was für hinreichend kleine  $\varepsilon$  offenbar erfüllt ist, da für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die linke Seite gegen  $d^\Delta$  geht. Zusammengefasst ergibt sich also folgendes Lemma:

**Lemma 3.5.2** *Für  $d \in (0, 1]$  und alle  $\Delta \geq 0$  gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$  mit der folgenden Eigenschaft:*

*Ist  $G$  irgendein Graph sowie  $H$  ein Graph mit  $\Delta(H) \leq \Delta$  und  $R$  irgendein Regularitätsgraph von  $G$  mit Parametern  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\ell$  und  $d$ , dann gibt es zu jedem  $H \subseteq R(\lfloor \ell\varepsilon_0 \rfloor)$  einen zu  $H$  isomorphen Graphen  $H'$  mit  $H' \subseteq G$ .*

Um dieses Lemma anwenden zu können benötigen wir aber wenigstens Untergraphen von  $R$ . Der einzige bis hierhin lückenlos bewiesene Satz, der uns feste Untergraphen garantiert, ist der Satz 17 von Turán. Dazu muss der betrachtete Graph aber hinreichend viele Kanten haben.

Also interessieren wir uns für die Kantenanzahl  $m_R = |E(R)|$  eines Regularitätsgraphen  $R$  mit Parametern  $\varepsilon$ ,  $\ell$  und  $d$ . Sei dazu  $m_G$  die Kantenanzahl von  $G$ ,  $n$  die Knotenanzahl von  $G$  und  $k$  die Knotenanzahl von  $R$ . Wir erhalten aufgeschlüsselt auf die Kanten innerhalb der Ausnahmemenge, die Kanten, welche die Ausnahmemenge verlassen, die Kanten zwischen nicht  $\varepsilon$ -regulären Paaren normaler Partitions Mengen, die Kanten zwischen  $\varepsilon$ -regulären Paaren mit Kantendichte  $< d$ , die Kanten innerhalb normaler Partitions Mengen, sowie die Kanten zwischen den verbleibenden  $\varepsilon$ -regulären Paaren (mit Kantendichte  $\geq d$ ) folgende Abschätzung für  $m_G$ :

$$m_G \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^2 + \varepsilon n k \ell + \varepsilon k^2 \ell^2 + \frac{1}{2}k^2 d \ell^2 + \frac{1}{2}k \ell^2 + m_R \ell^2.$$

Mit  $k \ell < n$  erhalten wir

$$m_G \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^2 + \varepsilon n^2 + \varepsilon n^2 + \frac{1}{2}d n^2 + \frac{n^2}{2k} + m_R \frac{n^2}{k^2}.$$

Nach Division durch  $n^2$  ergibt sich

$$\frac{m_G}{n^2} \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\varepsilon + \frac{d}{2} + \frac{1}{2k} + \frac{m_R}{k^2}.$$

Sei  $\varepsilon_{ES} > 0$  eine positive Konstante. Es soll später die Rolle des Epsilon entsprechend dem Satz von Erdős und Stone, den es noch herzuleiten gilt, spielen.

Wir können nun  $\varepsilon$ ,  $d$  und  $m$  so klein, aber fest wählen, dass  $\frac{\varepsilon^2}{2} + 2\varepsilon + \frac{d}{2} + \frac{1}{2m}$  kleiner ist als  $\frac{\varepsilon_{ES}}{2}$ . Das Regularitätslemma liefert uns dann eine  $\varepsilon$ -reguläre Partition, deren Regularitätsgraph  $R$  zur Dichte  $d$  eine "Kantendichte" (hier ist damit  $\frac{|E|}{|V|^2}$  für Graphen mit Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E$  gemeint) liefert, die um höchstens  $\frac{\varepsilon_{ES}}{2}$  von jener von  $G$  nach unten abweicht. Für hinreichend großes  $n$  können wir sogar erzwingen, dass der Parameter  $l$  dieses Regularitätsgraphen einen beliebig großen festen Wert übersteigt.

Nun konvergiert die kritische Kantendichte  $\frac{t_{r-1}(n)}{n^2}$ , ab der ein  $K_r$  erzwungen wird, gegen einen festen Wert  $t(r) = \frac{r-2}{r-1}$ .

Wir betrachten nun Graphen  $G$ , deren Kantendichte die kritische Kantendichte um  $\varepsilon_{ES}$  übersteigt.

Wählen wir  $m$  hinreichend groß, dass die kritische Kantendichte für Graphen mit  $m$  Knoten wiederum um höchstens  $\frac{\varepsilon_{ES}}{2}$  von der kritischen Kantendichte von Graphen mit mehr als  $m$  Knoten abweicht, so hat  $R$  damit sicher einen  $K_r$  als Regularitätsgraphen. Damit hat  $G$  einen  $T_r(rs)$  als Untergraph, sofern nur der Parameter  $l$  von  $R$  hinreichend groß wird. Man beachte, dass die Maximalvalenz des  $T_r(rs)$  von  $n$  unabhängig ist. Um großes  $l$  zu erzwingen müssen wir nur entsprechend dem Regularitätslemma  $n > \frac{Ml}{1-\varepsilon}$ , also hinreichend groß wählen. Damit ergibt sich als Konsequenz in der Tat der Satz von Erdős und Stone (Satz 18).

## 4 Die Probabilistische Methode

Wollen wir die Existenz eines Objektes mit gewünschter Eigenschaft nachweisen, so können wir ein Zufallsexperiment starten, um es eventuell zufällig zu erzeugen. Liefert unser Zufallsexperiment mit positiver Wahrscheinlichkeit ein Objekt mit der gewünschten Eigenschaft, so existiert dieses offenbar.

Wir müssen also einen Wahrscheinlichkeitsraum definieren, in welchem das Auftreten der gewünschten Eigenschaft ein Ereignis  $A$  ist.  $P(A)$  bezeichne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$ . Unser Existenznachweis geht dann über in die Aufgabe  $P(A) > 0$  zu zeigen.

### 4.1 Beispiel: Ramsey-Zahlen

Mit  $R(p, q)$  bezeichnen wir die kleinste Zahl  $n$  derart, dass jeder Graph mit  $n$  Knoten eine Clique der Größe  $p$  oder eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $q$  (oder beides) hat. Gemäß Ramseys Theorem(1930) existiert  $R(p, q)$  (und ist nicht etwa unendlich). Beispielsweise ist  $R(3, 3) = 6$ .

Wir wollen nun eine untere Schranke  $r$  für  $R(p, p)$  herleiten. Dazu würfeln wir für jede mögliche Kante unabhängig mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  aus, ob sie in unserem Zufallsgraphen enthalten ist, oder nicht. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer konkreten  $p$ -Clique ist dann  $2^{-\binom{p}{2}}$ , ebenso jene für das Auftreten einer unabhängigen Menge der Größe  $p$ . Da es aber nur  $\binom{r}{p}$  mögliche  $p$ -Cliquen und ebensoviele mögliche unabhängige Mengen der Größe  $p$  gibt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der ausgewürfelte Graph überhaupt eine  $p$ -Clique oder eine unabhängige Menge der Größe  $p$  hat, höchstens  $\binom{r}{p}2^{1-\binom{p}{2}}$ . Es folgt:

**Theorem 20 (Erdős, 1947)** Aus  $\binom{r}{p}2^{1-\binom{p}{2}} < 1$  folgt  $R(p, p) > r$ .

## 4.2 Die Linearität des Erwartungswertes

Wir betrachten im Folgenden nur endliche diskrete Wahrscheinlichkeitsräume, also Wahrscheinlichkeitsräume mit nur endlich vielen Ereignissen.

Eine *Zufallsvariable* ist eine Funktion, die jedem Element des Wahrscheinlichkeitsraumes eine reelle Zahl zuordnet.

Der *Erwartungswert*  $E(X)$  einer ganzzahligen Zufallsvariablen ist (im diskreten Wahrscheinlichkeitsraum) das gewichtete Mittel  $\sum_k kP(X = k)$ .

Das *Schubfachprinzip des Erwartungswertes* ist die Tatsache, daß ein Element des Wahrscheinlichkeitsraumes existiert, für welches der Wert von  $X$  mindestens so klein (oder mindestens so groß) ist, wie  $E(X)$ .

Die Linearität des Erwartungswertes ist durch folgendes Lemma gegeben:

**Lemma 4.2.1** Wenn  $X$  sowie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  Zufallsvariablen des gleichen Wahrscheinlichkeitsraumes sind und  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  gilt, so folgt  $E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$  sowie  $E(aX) = aE(X)$  für beliebiges reelles  $a$ .

**Beweis von Lemma 4.2.1.** Im diskreten Wahrscheinlichkeitsraum liefert jedes Element den gleichen Beitrag zur linken wie zur rechten Seite.  $\square$

Um den Erwartungswert einer Zufallsvariablen zu bestimmen, nutzt man häufig Indikatorvariablen. Eine *Indikatorvariable* ist eine Zufallsvariable, die bei Eintreten eines bestimmten Ereignisses (des durch sie *indizierten Ereignisses*) den Wert 1 annimmt und ansonsten nur den Wert 0.

Der Erwartungswert einer Indikatorvariablen ist offenbar gerade die Wahrscheinlichkeit des indizierten Ereignisses.

In diesem Sinne war die Größe  $2^{-\binom{p}{2}}$  der Erwartungswert der Indikatorvariablen für das Auftreten einer konkreten  $p$ -Clique oder einer konkreten unabhängigen Menge der Größe  $p$  und  $\binom{r}{p}2^{1-\binom{p}{2}}$  mithin der Erwartungswert für die Anzahl von  $p$ -Cliquen oder unabhängigen Mengen der Größe  $p$ . Satz 20 läßt sich daher auch mit dem Schubfachprinzip des Erwartungswertes folgern.

### 4.3 Beispiel: Turniergraph

In einem Turnier mit  $n$  Teilnehmern  $T_1, T_2, \dots, T_n$  tritt jeder gegen jeden einmal zum Zweikampf an. Ein Unentschieden ist als Ausgang des Zweikampfes ausgeschlossen.

Aus den Ergebnissen der Zweikämpfe möchte man gerne eine Rangfolge der Turnierteilnehmer ablesen. Eine Rangfolge sei *zulässig*, wenn jeder Teilnehmer gegen den in der Rangfolge direkt nachfolgenden Teilnehmer gewonnen hat. Diese Einschränkung liefert in der Regel aber keine eindeutig bestimmte Rangfolge. Wie viele verschiedene Rangfolgen sind für den selben Turnierausgang höchstens zulässig? Diese Anzahl nennen wir  $ZR(n)$ . Wir wollen nun  $ZR(n)$  nach unten abschätzen.

**0. Modellierung** Ein Turniergraph ist ein vollständiger Graph, in dem jeder Kante eine Richtung zugewiesen ist (vom Verlierer zum Sieger, die Teilnehmer des Turnieres sind die Knoten). Eine zulässige Rangfolge der Teilnehmer geht dabei in einen gerichteten Hamiltonweg über. Hamilton-Wege liefern (beim durchlaufen von vorne nach hinten) Permutationen der Knoten; unterschiedliche Hamiltonwege liefern unterschiedliche Permutationen.

**1. Randomisierung** Einen zufälligen Turniergraph erhält man, wenn man unabhängig voneinander jeder Kante  $\{T_i, T_j\}$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  die Richtung von  $T_i$  nach  $T_j$  gibt, und anderenfalls (also ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ ) die andere Richtung.

**2. Bestimmung des Erwartungswertes der interessierenden Größe:** Damit eine gegebene der  $n!$  Permutationen der Knoten von  $G$  aus einem gerichteten Hamiltonweg hervorgeht, müssen die  $n - 1$  Kanten zwischen in dieser Permutation aufeinanderfolgenden Knoten jeweils die richtige Richtung haben. Das tritt also mit Wahrscheinlichkeit  $2^{1-n}$  ein. Die diese Permutation zählende Indikatorvariable hat also den Erwartungswert  $2^{1-n}$ . Mit der Linearität des Erwartungswertes folgt:

$$E(\# \text{ gerichteter Hamiltonwege}) = n!2^{1-n}.$$

**3. Auswertung:** Aus dem Schubfachprinzip des Erwartungswertes folgt also:

**Theorem 21** (Szele, 1943) *Es gibt einen Turniergraphen auf  $n$  Knoten mit  $\lceil n!2^{1-n} \rceil$  Hamiltonwegen.*

Wir haben also eventuell  $\lceil n!2^{1-n} \rceil$  oder mehr zulässige Rangfolgen.

### 4.4 Nachträgliche Korrektur

Manchmal ist es schwer, eine gewünschte Eigenschaft direkt zufällig zu erzeugen. Hier findet die Methode der nachträglichen Korrektur (engl.: “alteration principle”, “two step method”, in speziellen Fällen auch “deletion method”) ihre Anwendung. Hier erzeugt man zunächst ein zufälliges Objekt, aus dem man durch eine deterministische Nachkorrektur erst das Objekt mit der gewünschten Eigenschaft ableitet.

Wir betrachten ein Beispiel. Eine *dominierende Menge* ist eine Menge  $S$  von Knoten eines Graphen derart, dass jeder Knoten des Graphen, der nicht in  $S$  enthalten ist, einen Nachbarn in  $S$  hat.

Ein Knoten  $v$  *dominiert* einen Knoten  $w$  in  $G$ , wenn er entweder selbst  $w$ , oder zu  $w$  benachbart ist.

Eine Menge von Knoten *dominiert* einen Graphen einen Knoten dieses Graphen, wenn dieser in ihr enthalten ist, oder einen Nachbarn in ihr hat.

Uns interessieren nun obere Schranken für die Größe möglichst kleiner dominierender Mengen. Unser Lösungsansatz besitzt nun folgende Schritte:

**Randomisieren** Sei  $G$  der betrachtete Graph. Wir wählen uns mit einer zufälligen Teilmenge  $S_0$  seiner Knoten, indem wir jeden Knoten unabhängig mit fester Wahrscheinlichkeit  $p$  in sie "hineinwürfeln".

**Nachträgliche Korrektur** Vielleicht haben wir so eine dominierende Menge erzeugt, vielleicht aber auch nicht. Sei  $T$  also die Menge derjenigen Knoten, die nicht von  $S_0$  dominiert wird. Dann ist aber sicher  $S = S_0 \cup T$  eine dominierende Menge.

**Ermitteln des Erwartungswertes:** Seien  $s_v$  und  $t_v$  die Indikatorvariablen dafür, dass  $v \in S_0$  bzw.  $v \in T$  gilt.

Es ergibt sich offenbar  $E(s_v) = p$ . Da  $v$  genau dann in  $T$  ist, wenn  $v$  sowie alle seine Nachbarn nicht in  $S_0$  sind, was jeweils unabhängig mit Wkt.  $1 - p$  auftritt, ergibt sich  $E(t_v) = (1 - p)^{1+|N_G(v)|}$ . Nun können wir  $E(|S|)$  bestimmen und abschätzen.

$$\begin{aligned}
 E(|S|) &= E(|S_0| + |T|) && (S_0 \text{ und } T \text{ disjunkt}) \\
 &= E(|S_0|) + E(|T|) && (\text{Linearität des Erwartungswertes}) \\
 &= E\left(\sum_{v \in V(G)} s_v\right) + E\left(\sum_{v \in V(G)} t_v\right) && (\text{Indikatorvariablen zählen}) \\
 &= \sum_{v \in V(G)} E(s_v) + \sum_{v \in V(G)} E(t_v) && (\text{Linearität des Erwartungswertes}) \\
 &= np + \sum_{v \in V(G)} (1 - p)^{1+|N_G(v)|} && (\text{Erwartungswerte einsetzen}) \\
 &\leq n(p + (1 - p)^{k+1}) && k \text{ stehe für die Minimalvalenz } \delta(G)
 \end{aligned}$$

**Justieren von  $p$ :** Unsere Abschätzung hängt nun noch von  $p$  ab. Wir suchen nun eine Wahrscheinlichkeit  $p$  für die der Erwartungswert - oder zumindest unsere Schranke für ihn - möglichst klein wird.

Da  $f(p) := n(p + (1 - p)^{k+1})$  konvex in  $[0, 1]$  ist und an beiden Intervallgrenzen den gleichen Wert  $n$  annimmt, müssen wir zum Minimieren nur die Ableitung nach  $p$  gleich Null setzen, was auf  $p = 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}$  und damit auf

$$E(|S|) \leq n \left( 1 - \frac{k}{k+1} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \right) \leq n \frac{1 + \ln(k+1)}{k+1}$$

führt. Die letzte Ungleichung ist zwar schwer zu beweisen, aber eigentlich nur kosmetischer Natur.

**Auswertung** Mit dem Schubfachprinzip des Erwartungswertes ergibt sich die Existenz einer dominierenden Menge aus höchstens  $E(|S|)$  Knoten und mit unserer Abschätzung also:

**Theorem 22 (Alon, 1990)** Wenn  $G$  ein Graph auf  $n$  Knoten mit Minimalgrad  $k$  ist, so besitzt  $G$  eine dominierende Menge mit höchstens  $n \left( 1 + \ln(k+1) \right) \frac{n}{k+1}$  Elementen.

In einem  $k$ -regulären Graphen dominiert jeder Knoten genau  $k + 1$  Knoten, weswegen seine dominierenden Mengen alle wenigstens  $\frac{n}{k+1}$  Knoten enthalten müssen. Unsere obere Schranke liegt erstaunlich dicht an dieser unteren Schranke!

## 4.5 Von der Existenz zum Algorithmus

Bisher haben wir nur die Existenz “kleiner” dominierender Mengen gezeigt. Wie findet man aber solche Mengen? Um zu einem Algorithmus zu kommen, der uns eine entsprechend kleine dominierende Menge liefert, wählen wir nun die Wahrscheinlichkeiten  $p_v$ , mit denen ein konkreter Knoten  $v$  in  $S_0$  aufgenommen wird, unabhängig voneinander variabel. Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes erhalten wir als Erwartungswert von  $E(|S|)$  eine multilineare Funktion in den  $n$  gewählten variablen Wahrscheinlichkeiten.

Nun entscheiden wir sukzessive für jeden Knoten, ob er zu  $S_0$  gehört, oder nicht, indem wir die ihm zugeordnete Wahrscheinlichkeit auf 0 absenken, oder aus 1 erhöhen, je nachdem, was  $|E(S)|$  nicht verkleinert. Wegen der Multilinearität wird das Minimum von  $|E(S)|$  ja für einen dieser Werte angenommen.

Am Ende dieser  $n$  Schritte haben wir  $S_0$  so festgelegt, dass die nachträgliche Korrektur eine dominierende Menge liefert, die genau die Größe des entstandenen Erwartungswertes hat.

Konkretisieren wir diese Überlegungen:

$$\begin{aligned} E(|S_0|) &= \sum_{v \in V(G)} p_v \\ E(|T|) &= \sum_{v \in V(G)} (1 - p_v) \prod_{w \in N_G(v)} (1 - p_w) \\ E(|S|) &= \sum_{v \in V(G)} \left( p_v + (1 - p_v) \prod_{w \in N_G(v)} (1 - p_w) \right) \end{aligned}$$

Zum Ermitteln von  $E(|S|)$  benötigen wir höchstens  $n\Delta(G)$  Multiplikationen,  $n$  Subtraktionen (ermitteln der  $1 - p_v$ ) und  $2n - 1$  Additionen, sodass wir eine Funktionswertermittlung mit einem Aufwand von  $O(\Delta n)$  annehmen können. In jedem Schritt muss aber nur ein Funktionswert ermittelt werden (und einer zu Beginn), was einen Gesamtaufwand von  $O(\Delta n^2)$  liefert.

Starten wir mit  $p_v = 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}$ , erhalten wir nach  $n$  Schritten also sicher eine Menge  $S_0$ , deren nachträgliche Korrektur eine dominierende Menge  $S$  mit höchstens  $\left(1 - \frac{k}{k+1} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}\right) \leq n \frac{1 + \ln(k+1)}{k+1}$  Elementen.

## 4.6 Die Markov-Ungleichung

**Lemma 4.6.1 (Markov-Ungleichung)** Wenn  $X$  nur nichtnegative Werte annimmt, dann folgt

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

Ist insbesondere  $X$  ganzzahlig, so folgt mit  $E(X) \rightarrow 0$  auch  $P(X = 0) \rightarrow 1$ .

**Beweis von Lemma 4.6.1.** Wir verwenden und beweisen das Lemma für den diskreten Fall: Hier gilt:

$$E(X) = \sum_{k \geq 0} kP(X = k) \geq \sum_{k \geq t} kP(X = k) \geq t \sum_{k \geq t} P(X = k) = tP(X \geq t).$$

□

Betrachten wir ein Beispiel als Anwendung: Wir wollen zeigen, dass die chromatische Zahl keine lokale Eigenschaft ist, d.h. dass Graphen, die in jeder beliebigen beschränkten Umgebung eines beliebigen Knotens zweifärbbar aussehen (die betrachteten Umgebungen sind kreisfrei), dennoch beliebig große chromatische Zahl haben können.

In unserem Sinne sieht ein Graph lokal zweifärbbar aus, wenn seine *Taillenweite* (Länge eines kürzesten Kreises) hinreichend gross ist: Bei Taillenweite  $2r+1$  sehen die Umgebungen jedes Knotens bis Abstand  $r$  wie Bäume aus.

Da die *chromatische Zahl*  $\chi(G)$  auch als Minimalzahl *unabhängiger Mengen* (Knotenmengen, zwischen deren Elementen keine Kanten des Graphen verlaufen), welche  $V(G)$  überdecken, aufgefaßt werden kann (die Farbklassen sind solche unabhängigen Mengen), können wir hohe chromatische Zahl aus verhältnismässig kleiner *Unabhängigkeitszahl*  $\alpha(G)$  (maximale Mächtigkeit einer unabhängigen Menge) folgern. Wir haben dann die Abschätzung  $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ .

Um die angestrebte Aussage

**Theorem 23 (Erdős, 1959)** Zu jedem  $k \geq 3$  und  $g \geq 3$  gibt es einen Graphen mit Taillenweite  $g$  und chromatischer Zahl  $k$ .

zu beweisen, genügt es daher, folgendes Lemma zu zeigen:

**Lemma 4.6.2** Zu natürlichen Zahlen  $k$  und  $g$  gibt es stets einen Graphen mit  $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \geq k$  und Taillenweite mindestens  $g$ .

Das liefert uns einen Graphen mit eventuell zu großer chromatischer Zahl und eventuell zu großer Taillenweite. Diese Schönheitsfehler lassen sich allerdings reparieren, indem man eine Komponente bestehend aus einem Kreis der Länge  $g$  hinzunimmt, nachdem man aus  $G$  so lange Kanten gelöscht hat, bis die chromatische Zahl gleich  $k$  ist. Das klappt, da beim Löschen einer Kante die chromatische Zahl um höchstens 1 wächst, aber keine kurzen Kreise entstehen, und der hinzugenommene Kreis höchstens chromatische Zahl 3 hat.

### Beweis von Lemma 4.6.2.

**Randomisieren:** Zu gegebener Knotenanzahl  $n$  erzeugen wir einen Graphen  $G_0$   $G$  mit  $V(G) = \{1, \dots, n\}$  in dem die Kanten  $\{i, j\}$  unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit  $p$  auftreten.

**Nachträgliche Korrektur:** Da die Unabhängigkeitszahl schwerer kontrollierbar scheint, konzentrieren wir uns hier auf die Korrektur der Tailenweite und hoffen, die Unabhängigkeitszahl mittels hinreichend hoher Kantenwahrscheinlichkeit in die Knie zwingen zu können. Wir wählen aus jedem kurzen Kreis von  $G_0$  (Kreis kürzer  $g$ ) einen Knoten und löschen diesen, um  $G$  zu erzeugen.

**Strategie bei der Wahl offener Konstanten:** Wir sollten  $p$  hinreichend groß wählen, um große unabhängige Mengen zu vermeiden, aber hinreichend klein, um die erwartete Zahl kurzer Kreise so klein zu halten, dass  $|V(G)|$  immer noch so stark wie möglich in  $n$  wächst. Mit  $X$  bezeichnen wir die Zahl der kurzen Kreise. Um hinreichend oft einen hinreichend großen Graphen  $G$  mit großer Tailenweite zu erzeugen, müssen wir also  $P(X \geq \frac{n}{2})$  klein halten (größtmögliche Größenordnung für die Zahl der verbleibenden kurzen Kreise). Über die Markov-Ungleichung gelingt uns dies im Falle  $E(X) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  zumindest für große  $n$ .

**Abschätzung  $P(X \geq \frac{n}{2})$  nach oben** Jeder mögliche Kreis der Länge  $i$  tritt mit Wahrscheinlichkeit  $p^i$  auf, da er ja  $i$  Kanten hat. Es gibt genau  $\binom{n}{i} \frac{i!}{2i} \leq n^i$  mögliche Kreise der Länge  $i$  (Auswahl der  $i$  Knoten und Erzeugen einer Permutation liefert gerichteten Weg, schließen zum Kreis und vergessen der Richtungen liefert daraus jeden Kreis  $2i$  mal), weswegen wir

$$E(X) \leq \sum_{i=3}^{g-1} \frac{(pn)^i}{2i}.$$

und damit aus der Markov-Ungleichung

$$P\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{2}{n} E(X) \leq \sum_{i=3}^{g-1} \frac{(pn)^i}{ni} \leq \sum_{i=3}^{g-1} p^i n^{i-1}.$$

erhalten. **Abschätzung von  $P(\alpha(G) \geq r)$  nach oben:** Eine Menge mit  $r$  Elementen ist mit Wahrscheinlichkeit  $(1-p)^{\binom{r}{2}}$  unabhängig. Ist  $\alpha(G) \geq r$  so hat  $G$  sicher mindestens eine der  $\binom{n}{r}$  möglichen unabhängigen Mengen der Größe  $r$ . Es folgt unter Verwendung von  $\binom{n}{r} < n^r$  und  $1-p < e^{-p}$ :

$$P(\alpha(G) \geq r) \leq \binom{n}{r} (1-p)^{\binom{r}{2}} < \left(ne^{-p\frac{r-1}{2}}\right)^r = (e^r)^{\ln(n) - p\frac{r-1}{2}}.$$

**Justierung der Parameter  $p$ ,  $n$  und  $r$ :** Wir wollen  $P(\alpha(G) \leq r$  und  $X \leq \frac{n}{2})$  positiv haben, wobei  $r$  eine geringere Größenordnung als  $n$  haben soll. Nun gilt

$$P\left(\alpha(G) < r \text{ und } X < \frac{n}{2}\right) \leq 1 - P(\alpha(G) \geq r) - P\left(X \geq \frac{n}{2}\right).$$

Uns genügt es dazu, wenn die beiden Wahrscheinlichkeiten  $P(\alpha(G) \geq r)$  und  $P(X \geq \frac{n}{2})$  mit  $n$  gegen unendlich gegen Null gehen. Nach unseren Abschätzungen soll also  $(e^r)^{\ln(n)-p^{\frac{r-1}{2}}}$  ebenso wie jeder der  $g-3$  Summanden  $p^i n^{i-1}$  von  $\sum_{i=3}^{g-1} p^i n^{i-1}$  gegen Null gehen. Damit der erste Term gegen 0 geht, muss lediglich  $\ln(n) - p^{\frac{r-1}{2}}$ , also  $\ln(n) - p^{\frac{r}{2}}$  ( $p$  ist beschränkt) gegen unendlich gehen, was beispielsweise mit  $r = \left\lceil \frac{3 \ln(n)}{p} \right\rceil$  gelingt.

Wählen wir  $p = n^c$  so erhalten wir für  $c$  aus den Forderungen  $p^i n^{i-1} \rightarrow 0$  die Abschätzungen  $ci + (i-1) < 0$ , also  $c < \frac{1-i}{i} = \frac{1}{i} - 1$ , jeweils für  $i = 3, \dots, g-1$ . Da die rechte Seite der letzten Ungleichung streng monoton in  $i$  und  $i < g$  ist, liefert  $c = \frac{1}{g} - 1$ , und damit  $p = n^{\frac{1}{g}-1}$  das gewünschte Verhalten von  $P(X \geq \frac{n}{2})$ . Es ergibt sich damit  $r = \left\lceil \frac{3 \ln(n)}{n^{\frac{1}{g}-1}} \right\rceil = \left\lceil 3n^{1-\frac{1}{g}} \ln(n) \right\rceil$ , was offenbar tatsächlich eine geringere Größenordnung hat als  $n$ .

**Auswertung** Für hinreichend großes  $n$  ist die Wahrscheinlichkeit, das wir zufällig einen Graphen  $G$  mit mehr als  $\frac{n}{2}$  Knoten, Unabhängigkeitszahl kleiner  $\left\lceil 3n^{1-\frac{1}{g}} \ln(n) \right\rceil$  und Tailenweite mindestens  $g$  konstruieren, wenn wir  $p = n^{\frac{1}{g}-1}$  wählen (in der Tat liegt  $p$  so zwischen Null und Eins), positiv. Also gibt es solche Graphen. Da aber  $\frac{\frac{n}{2}}{\left\lceil 3n^{1-\frac{1}{g}} \ln(n) \right\rceil}$  offenbar die gleiche Größenordnung hat, wie  $\frac{n^{\frac{1}{g}}}{\ln(n)}$ , und daher gegen unendlich geht, ist der Beweis erbracht.  $\square$

## 4.7 Eine schwere DeMO-Aufgabe

Am Montag, dem 23.6.2003 wurde in der Bundesrunde der Deutschlandweiten Mathematikolympiade für Schüler der Klassen 11 bis 13 eine Aufgabe gestellt, die von keinem der Teilnehmer gelöst werden konnte. Damit zählt sie zu den schwersten Matheolympiadeaufgaben der Vergangenheit überhaupt. Hier die Aufgabe:

**Aufgabe 431343** Gegeben ist ein Quadratgitter aus  $N \times N$  Kästchen;  $N$  sei eine ungerade Zahl größer oder gleich 3. Die Raupe Nummersatt sitzt in dem Kästchen genau in der Mitte des Gitters. Jedes der übrigen Kästchen enthält eine positive ganze Zahl. Über die Verteilung der Zahlen ist nur bekannt, dass sich in keinen zwei Feldern die gleiche Zahl befindet.

Nummersatt möchte durch dieses Zahlenmeer einen Weg nach draußen finden. Sie kann dabei von einem Kästchen stets nur zu einem entlang einer Seite angrenzenden Kästchen weiterwandern und muss jede Zahl fressen, durch deren Kästchen ihr Weg führt. Jede Zahl  $n$  wiegt  $\frac{1}{n}kg$ , und Nummersatt kann insgesamt nicht mehr als  $2kg$  Zahlen fressen.

Man untersuche

a) für  $N = 2003$ ,

b) für alle ungeraden Zahlen  $N \geq 3$ ,

ob die Zahlen im Gitter so ungünstig verteilt sein können, dass Nummersatt keinen Weg nach draußen finden kann, auf dem höchstens  $2kg$  Zahlen liegen.

Für andere Aufgaben und Informationen zur DeMO siehe <http://www.mathematikolympiaden.de>

Wir wollen nun diese Aufgabe mit Hilfe der probabilistischen Methode lösen: Die Antwort lautet in jedem Falle: "Nein, es gibt immer einen Weg nach draußen, auf dem Nummersatt weniger als  $2kg$  Zahlen frißt. Das ergibt sich aus folgendem Lemma:

**Lemma 4.7.1** *Für jedes  $N$  gibt es ein Feld  $N$  Schritte von Nummersatts Startposition entfernt derart, dass es einen kürzesten Weg (also über  $N$  Felder) gibt, auf denen insgesamt weniger als  $2kg$  Zahlen liegen.*

Da alle Felder mit Abstand  $N$  zu Nummersatts Startposition außerhalb des betrachteten Quadratgitters liegen, ergibt sich sofort die Behauptung. Beweisen wir also das Lemma:

**Beweis von Lemma 4.7.1.**

**Randomisieren** Wir wollen kürzeste Wege der Länge  $N$  von Nummersatts Startposition  $O$  aus so auswürfeln, dass die Wahrscheinlichkeit  $p_d$  ein konkretes Feld im Abstand  $d$  zu  $O$  leerzufressen in der Tat nur von  $d$  abhängt. Da auf jedem kürzesten Weg genau ein solches Feld liegt, summieren sich diese Wahrscheinlichkeiten zu  $4dp_d = 1$ , womit sich  $p_d = \frac{1}{4d}$  ergibt.

Für Wege der Länge 1 geht das, indem wir einfach mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$  nach links, unten, rechts bzw. oben starten. Angenommen uns gelingt dies für Wege der Länge  $\ell$ , wie (mit welchen Wahrscheinlichkeiten wohin) müssen wir dann von einem Feld  $(\ell - i, i)$  weitergehen? Wir betrachten nur den Fall  $i > 0$  und  $\ell \geq i$ . Der von diesem Fall abgedeckte Bereich sowie seine Bilder nach Drehung um  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  bzw.  $270^\circ$  um  $O$  deckt jedes mögliche Feld ab, sodass wir das Vorgehen mittels der genannten Drehungen auf die restlichen Felder übertragen können. In diesem Fall entscheiden wir uns nur zwischen dem Weitergehen nach rechts und dem nach oben. Entsprechend wird das Feld  $(\ell, 1)$  auch nur vom Feld  $(\ell - 1, 1)$  betreten. Damit wir hier mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4(\ell+1)}$  landen, müssen wir von  $(\ell - i, i)$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{\ell}{\ell+1}$  nach rechts gehen. Also gehen wir mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{\ell+1}$  nach von diesem Feld aus nach oben. Nun können wir diese Überlegung für das Feld  $(\ell - 1, 2)$  vom Feld  $(\ell - 2, 2)$  aus durchführen. Von hier müssen wir damit mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{\ell-1}{\ell+1}$  nach rechts gehen und entsprechend mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{\ell+1}$  nach oben. Analog leitet man her, dass man vom Feld  $(\ell - i, i)$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{\ell+1-i}{\ell+1}$  nach rechts und mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{i}{\ell+1}$  nach oben gehen muss.

Für  $i = \ell$  ergibt sich dann, dass man mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{\ell}{\ell+1}$  nach oben geht, wesegen auch die Besuchswahrscheinlichkeit für das Feld  $(0, \ell + 1)$  wieder  $\frac{1}{4(\ell+1)}$  ist.

**Abschätzen des Erwartungswertes  $E$  der Masse gefressener Zahlen** Hier interessiert uns natürlich nicht mehr die Art und Weise, wie ein konkreter Weg zu Stande kommt, sondern nur die "Leerfresswahrscheinlichkeit" der Felder.

Es ergibt sich nach Linearität des Erwartungswertes (wobei  $n(F)$  die auf Feld  $F$  stehende Zahl ist und  $d(F, O)$  die Zahl der Schritte auf einem kürzesten Weg von  $F$  nach  $O$  bezeichnet):

$$E = \sum d(F, O) \leq d \frac{1}{4d(F, O)} \frac{1}{n(F)}$$

Nach dem Satz über gleich und ungleich geordnete Folgen wird dieser Erwartungswert am größten, wenn die ersten Faktoren der Summanden genauso geordnet sind, wie die zweiten Faktoren, weswegen wir ihn durch den Fall nach oben Abschätzen können, wo die kleinsten Zahlen am dichtesten an  $O$  stehen. Da es genau  $d^2 + (d - 1)^2 - 1$  Zahlen mit Abstand kleiner  $d$  zu  $O$  gibt, haben in diesem Fall alle Zahlen mit Abstand  $d$  zu  $O$  mindestens die Größe  $d^2 + (d - 1)^2 \geq d^2$ . Es ergibt sich also die Abschätzung

$$E \leq \sum_{d=1} N \frac{1}{4d} \left( 4d \frac{1}{d^2} \right) = \sum_{d=1} N \frac{1}{d^2} < \frac{\pi^2}{6} < 2.$$

**Auswertung.** Da die Raupe bei zufälligem Vorgehen entsprechend des in der Randomisierung angegebenen Verfahrens in Erwartung weniger als  $2kg$  Zahlen frisst, gibt es nach Schubfachprinzip des Erwartungswertes tatsächlich einen kürzesten Weg der Länge  $n$ , auf dem weniger als  $2kg$  Zahlen liegen.  $\square$