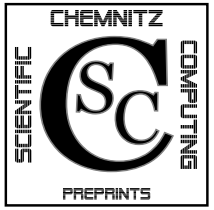
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Michael Weise Arnd Meyer

Grundgleichungen für transversal isotropes Materialverhalten

CSC/10-03



Chemnitz Scientific Computing Preprints

Chemnitz Scientific Computing Preprints – ISSN 1864-0087

Impressum:

Chemnitz Scientific Computing Preprints — ISSN 1864-0087
(1995–2005: Preprintreihe des Chemnitzer SFB393)

Herausgeber:
Professuren für
Numerische und Angewandte Mathematik
an der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Chemnitz

Postanschrift:
TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
09107 Chemnitz
Sitz:
Reichenhainer Str. 41, 09126 Chemnitz

`http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/`

08-07 M. Striebel, J. Rommes. Model order reduction of nonlinear systems: status, open issues, and applications. November 2008.

08-08 P. Benner, C. Effenberger. A rational SHIRA method for the Hamiltonian eigenvalue problem. December 2008.

09-01 R. Unger. Obstacle Description with Radial Basis Functions for Contact Problems in Elasticity. January 2009.

09-02 U.-J. Görke, S. Kaiser, A. Bucher, R. Kreißig. A fast and efficient algorithm to compute BPX- and overlapping preconditioner for adaptive 3D-FEM. February 2009.

09-03 J. Glänzel. Kurzvorstellung der 3D-FEM Software SPC-PM3AdH-XX. January 2009.

09-04 P. Benner, Th. Mach. On the QR Decomposition of H-Matrices. July 2009.

09-05 M. Meyer. Parameter identification problems for elastic large deformations - Part I: Model and solution of the inverse problem. October 2009.

09-06 M. Meyer. Parameter identification problems for elastic large deformations - Part II: Numerical solution and results. November 2009.

09-07 P. Benner, S. Hein. Model predictive control based on an LQG design for time-varying linearizations. November 2009.

09-08 U. Baur, C. A. Beattie, P. Benner, S. Gugercin. Interpolatory Projection Methods for Parameterized Model Reduction. November 2009.

09-09 J. Saak, S. Schlömer. RRQR-MEX - Linux and Windows 32bit Matlab Mex-Files for the rank revealing QR factorization. December 2009.

09-10 M. Köhler, J. Saak. Efficiency improving implementation techniques for large scale matrix equation solvers. December 2009.

09-11 P. Benner, H. Faßbender. On the numerical solution of large-scale sparse discrete-time Riccati equations. December 2009.

10-01 A. Meyer, P. Steinhorst. Modellierung und Numerik wachsender Risse bei piezoelektrischem Material. May 2010.

10-02 M. Balg, A. Meyer. Numerische Simulation nahezu inkompressibler Materialien unter Verwendung von adaptiver, gemischter FEM. June 2010.

The complete list of CSC and SFB393 preprints is available via
`http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/`

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Chemnitz Scientific Computing Preprints

Michael Weise Arnd Meyer

Grundgleichungen für transversal isotropes Materialverhalten

CSC/10-03

Zusammenfassung

In diesem Preprint werden Materialgleichungen zur Behandlung von transversal isotropem Materialverhalten zusammengetragen. Wir betrachten ein transversal isotropes Materialgesetz mit linear elastischem Verhalten. Die angegebenen Materialgleichungen bilden eine wesentliche Grundlage zur Lösung statischer Probleme mit der Methode der finiten Elemente. Es werden Gleichungen für den ebenen Verzerrungszustand und den ebenen Spannungszustand hergeleitet.

Diese Arbeit ist im Rahmen des Spitzentechnologieclusters „Energieeffiziente Produkt- und Prozessinnovationen in der Produktionstechnik“ (eniPROD) enstanden. eniPROD wird gefördert von der Europäischen Union aus Mitteln des Europäischen Fonds für regionale Entwicklung (EFRE) sowie aus Landesmitteln des Freistaates Sachsen.

CSC/10-03 ISSN 1864-0087 August 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
1.1 Notation 1
1.2 Grundlegende Begriffe 2

2 Energiefunktional **3**

3 Umrechnung der Materialkonstanten **5**

4 Elastizitätsmatrix **6**
4.1 Spezialfall: Fasern in 1-Richtung 9

5 Eigenwerte **11**

6 Ebener Verzerrungszustand **13**

7 Ebener Spannungszustand **17**

8 Anhang **23**
8.1 Nebenrechnungen 23
8.2 Beweise 27

Author's addresses:

Michael Weise, Arnd Meyer
TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik
D-09107 Chemnitz

`http://www.tu-chemnitz.de/~amey`
`http://www.tu-chemnitz.de/~wmicha`

Some titles in this CSC and the former SFB393 preprint series:

07-01 U. Baur, P. Benner. Gramian-Based Model Reduction for Data-Sparse Systems. February 2007.

07-02 A. Meyer. Grundgleichungen und adaptive Finite-Elemente-Simulation bei „Großen Deformationen". Februar 2007.

07-03 P. Steinhorst. Rotationssymmetrie für piezoelektrische Probleme. Februar 2007.

07-04 S. Beuchler, T. Eibner, U. Langer. Primal and Dual Interface Concentrated Iterative Substructuring Methods. April 2007.

07-05 T. Hein, M. Meyer. Simultane Identifikation voneinander unabhängiger Materialparameter - numerische Studien. Juni 2007.

07-06 A. Bucher, U.-J. Görke, P. Steinhorst, R. Kreißig, A. Meyer. Ein Beitrag zur adaptiven gemischten Finite-Elemente-Formulierung der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen. September 2007.

07-07 U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig Zur Numerik der inversen Aufgabe für gemischte (u/p) Formulierungen am Beispiel der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen. October 2007.

07-08 A. Meyer, P. Steinhorst. Betrachtungen zur Spektraläquivalenz für das Schurkomplement im Bramble-Pasciak-CG bei piezoelektrischen Problemen. Oktober 2007.

07-09 T. Hein, M. Meyer. Identification of material parameters in linear elasticity - some numerical results. November 2007.

07-10 T. Hein. On solving implicitly defined inverse problems by SQP-approaches. December 2007.

08-01 P. Benner, M. Döhler, M. Pester, J. Saak. PLiCMR - Usage on CHiC. July 2008.

08-02 T. Eibner. A fast and efficient algorithm to compute BPX- and overlapping preconditioner for adaptive 3D-FEM. June 2008.

08-03 A. Meyer. Hierarchical Preconditioners and Adaptivity for Kirchhoff-Plates. September 2008.

08-04 U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig. Ein numerischer Vergleich alternativer Formulierungen des Materialmodells der anisotropen Elastoplastizität bei großen Verzerrungen. September 2008.

08-05 U.-J. Görke, R. Landgraf, R. Kreißig. Thermodynamisch konsistente Formulierung des gekoppelten Systems der Thermoelastoplastizität bei großen Verzerrungen auf der Basis eines Substrukturkonzepts. Oktober 2008.

08-06 M. Meyer, J. Müller. Identification of mechanical strains by measurements of a deformed electrical potential field. November 2008.

Literatur

[Boe87] J. P. Boehler: *Applications of tensor functions in solid mechanics*, CISM Courses No. 292, Springer, 1987

[Bow09] A. F. Bower: *Applied Mechanics of Solids*, CRC, 2009
http://solidmechanics.org/

[Fio08] M. Fiolka: *Theorie und Numerik volumetrischer Schalenelemente zur Delaminationsanalyse von Faserverbundlaminaten*, Berichte des Instituts für Mechanik, Bericht 2/2008, Kassel University Press, 2008
http://www.upress.uni-kassel.de/online/frei/978-3-89958-397-7.volltext.frei.pdf

[SN03] J. Schröder, P. Neff: *Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions*, International Journal of Solids and Structures 40, Elsevier, 2003

[Spe84] A. J. M. Spencer: *Continuum theory of the mechanics of fibre-reinforced composites*, CISM Course No. 282, Springer, 1984

1 Einführung

Im Rahmen des Spitzentechnologieclusters „Energieeffiziente Produkt- und Prozessinnovationen in der Produktionstechnik“ (eniPROD) spielt das Thema Leichtbau eine wichtige Rolle. Eine häufig verwendete Materialklasse sind Faser-Kunststoff-Verbunde, welche transversal isotropem Materialverhalten unterliegen. Um Faser-Kunststoff-Verbunde numerisch simulieren zu können, sollen in diesem Artikel einige wesentliche Grundlagen zur Behandlung von transversal isotropem Materialverhalten zusammengetragen werden. Transversal isotropes Material wird lokal durch eine Ebene mit isotropem Materialverhalten und eine dazu senkrechte Richtung $\boldsymbol{a}$ mit abweichenden Materialeigenschaften charakterisiert. Das Materialverhalten ist invariant unter Rotation um die Achse $\boldsymbol{a}$. Es handelt sich um einen Spezialfall der Orthotropie, bei der richtungsabhängige Materialeigenschaften, aber im Gegensatz zur allgemeinen Anisotropie keine Kopplungen zwischen Dehnungen und Schubverzerrungen auftreten. Im Anwendungsfall eines unidirektional verstärkten Faser-Kunststoff-Verbundwerkstoffes beschreibt $\boldsymbol{a}$ die Richtung der zur Verstärkung eingebrachten Fasern, in dieser Richtung verhält sich das Material steifer als in der senkrecht dazu stehenden Ebene. Wir betrachten ein transversal isotropes Materialgesetz mit linear elastischem Verhalten. Dieses ist prinzipiell für die Simulation sowohl kleiner als auch großer Deformationen geeignet. Die Grenzen des Modells liegen jedoch bei Verzerrungen, die in der Realität zu plastischen Verformungen führen würden. Die angegebenen Materialgleichungen bilden eine wesentliche Grundlage zur Lösung statischer Probleme mit der Methode der finiten Elemente (FEM). Obwohl im Folgenden nicht näher darauf eingegangen wird, ist eine Ortsabhängigkeit der ausgezeichneten Richtung $\boldsymbol{a}$ zulässig.

Nach der Einführung einiger grundlegender Begriffe werden in den Abschnitten 2 und 3 das verwendete Energiefunktional vorgestellt und Umrechnungsformeln für die Materialkonstanten angegeben. Anschließend wird die für die FEM notwendige Elastizitätsmatrix hergeleitet. Im folgenden Abschnitt werden die Eigenwerte und Eigentensoren des Materialtensors untersucht. Die Abschnitte 6 und 7 enthalten Herleitungen der Gleichungen für den ebenen Verzerrungszustand und den ebenen Spannungszustand. Im Anhang befinden sich einige Nebenrechnungen und Beweise.

1.1 Notation

Im Folgenden werden einstufige Tensoren mit fett gedruckten Kleinbuchstaben, zweistufige Tensoren mit fett gedruckten Großbuchstaben und vierstufige Tensoren in Frakturschrift dargestellt. Zwei nebeneinander geschriebene Tensoren bezeichnen deren Tensorprodukt, in anderen Veröffentlichungen wird dafür oft „$\otimes$“

Tabelle 1: Verwendete Zeichen

$\boldsymbol{a} \in \mathcal{T}_1$	– Tensor erster Stufe
$\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}_2$	– Tensor zweiter Stufe
$\mathfrak{A} \in \mathcal{T}_4$	– Tensor vierter Stufe
$\alpha \in \mathbb{R}$	– Skalar
$a \in \mathbb{R}^3$	– Vektor
$A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$	– Matrix

verwendet. Das Überschieben bzw. doppelte Überschieben von Tensoren wird durch „·“ bzw. „:“ dargestellt. Skalare werden durch kleine griechische Buchstaben, Vektoren durch kleine lateinische Buchstaben und Matrizen durch große lateinische Buchstaben gekennzeichnet, vergleiche auch Tabelle 1. Um die Konsistenz mit anderen Veröffentlichungen nicht zu verlieren gibt es auch Ausnahmen von dieser Regel. Beispiele dafür sind die skalaren Werte E, G, D, E_a, G_a und D_1, die einstufigen Tensoren $\boldsymbol{G}^i$ und $\boldsymbol{G}_i$ sowie die Vektoren $\underline{E}$ und $\underline{T}$.

1.2 Grundlegende Begriffe

Die unverformte Ausgangskonfiguration Ω_0 sei ein dreidimensionales Gebiet, welches gemäß

$$\Omega_0 = \{\boldsymbol{x}(\eta) : \eta = [\eta^1, \eta^2, \eta^3]^T \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3\}$$

parametrisiert sei. Man definiert die kovariante Tensorbasis $\boldsymbol{G}_i$, die kontravariante Tensorbasis $\boldsymbol{G}^i$ sowie den Gradientenoperator Grad in Ω_0 durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_i &= \tfrac{\partial}{\partial \eta^i}\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{G}^i \cdot \boldsymbol{G}_j &= \delta_{ij}, \\ \mathrm{Grad} &= \boldsymbol{G}^i \tfrac{\partial}{\partial \eta^i}. \end{aligned}$$

Bei dieser Schreibweise kommt die Einsteinsche Summenkonvention zur Anwendung, das heißt $\boldsymbol{G}^i \frac{\partial}{\partial \eta^i}$ steht als Abkürzung für $\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{G}^i \frac{\partial}{\partial \eta^i}$.

Unter Deformation versteht man eine Abbildung der Art

$$\boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \quad \forall\, t \in [0, t_{end}], \boldsymbol{x} \in \Omega_0.$$

Dabei wird ein materieller Punkt in der Zeit t aus seiner Ausgangslage $\boldsymbol{x}$ um $\boldsymbol{u}$ nach $\boldsymbol{y}$ verschoben, $\boldsymbol{u}$ wird als Verschiebung bezeichnet. Wir interessieren uns nicht für dynamische, sondern nur für statische Betrachtungen und vernachlässigen daher im Folgenden die Zeitabhängigkeit,

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

8.2 Beweise

Lemma 1. *Die Menge der antisymmetrischen zweistufigen Tensoren $\mathcal{T}_2^a$ ist invariant unter $\mathfrak{C}$.*

Beweis. Wir betrachten einen beliebigen antisymmetrischen Tensor $\boldsymbol{X} \in \mathcal{T}_2^a$, das heißt $\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{X}^T$. Es gilt

$$\mathfrak{C} : \boldsymbol{X} = 2\mu\boldsymbol{X} + 2(\mu_a - \mu)(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A})$$

und wegen

$$\begin{aligned} -\Big(2\mu\boldsymbol{X} + 2(\mu_a - \mu)(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A})\Big)^T &= 2\mu\boldsymbol{X} + 2(\mu_a - \mu)(-\boldsymbol{X}^T\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}^T) \\ &= 2\mu\boldsymbol{X} + 2(\mu_a - \mu)(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}) \end{aligned}$$

ist der entstehende Tensor offenbar ebenfalls antisymmetrisch. □

Lemma 2. *Es sei $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{T}_1$. Dann bildet die Menge*

$$\begin{aligned} M_1 = \{&\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2), \\ &\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_1)\} \end{aligned}$$

eine Orthonormalbasis in $\mathcal{T}_2^s$

Beweis. Offenbar sind alle Elemente der Menge symmetrisch. Wir bezeichnen zur Vereinfachung der Notation $\boldsymbol{a}$ mit $\boldsymbol{b}_3$. Mit der Voraussetzung, dass $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ orthonormal ist, folgt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i : \boldsymbol{b}_j\boldsymbol{b}_j &= 0 \quad \forall i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j, \\ \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i : \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_j\boldsymbol{b}_k + \boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_j) &= 0 \quad \forall i, j, k \in \{1,2,3\}, j \neq k, \\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_j + \boldsymbol{b}_j\boldsymbol{b}_i) : \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_l + \boldsymbol{b}_l\boldsymbol{b}_k) &= 0 \quad \forall i, j, k, l \in \{1,2,3\}, i \neq j, k \neq l, \\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2) : \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2) &= \tfrac{1}{2}(1 + 0 + 0 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass M_1 orthogonal ist. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i\| &= \sqrt{\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i : \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i} = \sqrt{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i} = 1, \\ \|\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_j + \boldsymbol{b}_j\boldsymbol{b}_i)\| &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(0 + \mathrm{tr}\,\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i + \mathrm{tr}\,\boldsymbol{b}_j\boldsymbol{b}_j + 0)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+1)} = 1, \end{aligned}$$

damit ist die betreffende Menge orthonormal. Alle sechs Elemente sind symmetrisch und die Dimension von $\mathcal{T}_2^s$ ist sechs, deshalb muss M_1 eine Orthonormalbasis von $\mathcal{T}_2^s$ sein. □

Mit der Beziehung

$$\tfrac{1}{4}\tau^2 - \tfrac{1}{4}\delta^2\tau = \tfrac{1}{4}\tau(\tau - \delta^2) = \tfrac{1}{4}\tau\big(8(\lambda+\alpha)^2\big) = 2(\lambda+\alpha)^2\tau$$

erhält man

$$\begin{aligned} 1/\|\tilde{v}_i\| &= \frac{\sqrt{2}(\lambda+\alpha)\sqrt{\tau}}{2(\lambda+\alpha)^2\tau}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\sqrt{2\tau}}{2(\lambda+\alpha)\tau}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}. \end{aligned}$$

Für die erste Komponente von v_i folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(\lambda+\alpha)/\|\tilde{v}_i\| &= \sqrt{2}(\lambda+\alpha)\frac{\sqrt{2\tau}}{2(\lambda+\alpha)\tau}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\sqrt{\tau}}{\tau}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 \pm \frac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}}, \end{aligned}$$

für die zweite Komponente folgt

$$\begin{aligned} (-\tfrac{1}{2}\delta \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\tau})/\|\tilde{v}_i\| &= (\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\tau} - \tfrac{1}{2}\delta)\frac{\sqrt{2\tau}}{2(\lambda+\alpha)\tau}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}} \\ &= (\pm\tfrac{1}{2}\tau - \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau})\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}\frac{\sqrt{2}}{2(\lambda+\alpha)\tau} \\ &= \pm(\tfrac{1}{2}\tau \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau})\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}\frac{\sqrt{2}}{2(\lambda+\alpha)\tau} \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2(\lambda+\alpha)\tau}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2(\lambda+\alpha)\tau}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}\sqrt{\tfrac{1}{4}\tau^2 - \tfrac{1}{4}\delta^2\tau} \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2(\lambda+\alpha)\tau}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}\sqrt{2(\lambda+\alpha)^2\tau} \\ &= \pm\frac{\sqrt{\tau}}{\tau}\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 \mp \frac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}}. \end{aligned}$$

Man erhält die normierten Eigenvektoren

$$v_{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{1 \pm \frac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}} \\ \pm\sqrt{1 \mp \frac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}} \end{bmatrix}$$

und die normierten Eigentensoren

$$\boldsymbol{V}_{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 \pm \frac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}}\boldsymbol{A} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 \mp \frac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}}\boldsymbol{B}.$$

Man definiert den Verzerrungstensor $\boldsymbol{E}$ durch

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{Grad}\boldsymbol{u} + \mathrm{Grad}\boldsymbol{u}^T + \mathrm{Grad}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{Grad}\boldsymbol{u}^T\right),$$

für die Berechnung von Problemen mit kleinen Deformationen vernachlässigt man den quadratischen Anteil und benutzt

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) := \frac{1}{2}\left(\mathrm{Grad}\boldsymbol{u} + \mathrm{Grad}\boldsymbol{u}^T\right). \tag{2}$$

In beiden Fällen ist der Verzerrungstensor symmetrisch. Die Aufgabenstellung der numerischen Verformungssimulation besteht darin, unter Beachtung von Randbedingungen ein Zielfunktional $\varphi(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))$ über $\boldsymbol{u}$ zu minimieren, welches die Systemenergie modelliert.

2 Energiefunktional

Wir betrachten das Energiefunktional $\varphi(\boldsymbol{E})$, welches von der spezifischen Formänderungsenergie $\psi(\boldsymbol{E})$ gemäß

$$\varphi(\boldsymbol{E}) = \int_{\Omega_0} \psi(\boldsymbol{E})\,\mathrm{d}\Omega_0 \tag{3}$$

abhängt. Durch Ableitung nach $\boldsymbol{E}$ erhalten wir den zweistufigen Spannungstensor

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{E}} \tag{4}$$

und den vierstufigen Materialtensor

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\boldsymbol{E}}, \tag{5}$$

der auch als Elastizitätstensor bezeichnet wird. Für lineare Materialgesetze, d.h. $\boldsymbol{T}$ linear abhängig von $\boldsymbol{E}$, ψ quadratisch in $\boldsymbol{E}$, gilt weiterhin

$$\boldsymbol{T} = \mathfrak{C} : \boldsymbol{E}, \quad \psi = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{T} : \boldsymbol{E}$$

und

$$\varphi(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \boldsymbol{T} : \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\Omega_0 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \boldsymbol{E} : \mathfrak{C} : \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\Omega_0. \tag{6}$$

Für linear elastisches, isotropes Materialverhalten lautet die zugehörige spezifische Formänderungsenergie

$$\psi_{iso} = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu\,\mathrm{tr}\boldsymbol{E}^2 \tag{7}$$

und damit folgt

$$\boldsymbol{T}_{iso} = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} \tag{8}$$

mit den Lamé-Konstanten λ und μ, die durch

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,, \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \tag{9}$$

aus den gebräuchlicheren Materialkonstanten Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν berechnet werden können.

Wir betrachten nun transversal isotropes Materialverhalten mit der ausgezeichneten Richtung $\boldsymbol{a}$. Wir setzen im Folgenden

$$\|\boldsymbol{a}\| = 1, \quad \boldsymbol{A} := \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}.$$

Nach [Boe87] und [Spe84] hängt das transversal isotrope Materialmodell von den fünf Invarianten

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{E}, \mathrm{tr}\boldsymbol{E}^2, \mathrm{tr}\boldsymbol{E}^3, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}^2\cdot\boldsymbol{a}$$

ab.

Üblicherweise wird im Maschinenbau die spezifische Formänderungsenergie

$$\begin{aligned} \psi_{ti} = {} & \tfrac{1}{2}\lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu\,\mathrm{tr}\boldsymbol{E}^2 + \alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a})\mathrm{tr}\boldsymbol{E} \\ & + 2(\mu_a - \mu)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}^2\cdot\boldsymbol{a}) + \tfrac{1}{2}\beta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a})^2 \\ \Big(= {} & \tfrac{1}{2}\lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu\,\mathrm{tr}\boldsymbol{E}^2 + \alpha\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{tr}\boldsymbol{E} \\ & + 2(\mu_a - \mu)\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}^2) + \tfrac{1}{2}\beta[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E})]^2 \Big) \end{aligned} \tag{10}$$

verwendet, wie sie zum Beispiel in [Fio08], Kapitel 3.5.2 angegeben wird. Man erhält den Spannungstensor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{ti} = {} & \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + \alpha[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{I} + (\mathrm{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}] \\ & + 2(\mu_a - \mu)(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}) + \beta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{11}$$

und den Elastizitätstensor

$$\mathfrak{C}_{ti} = \lambda\boldsymbol{I}\boldsymbol{I} + 2\mu\mathfrak{I} + \alpha(\boldsymbol{A}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}) + 2(\mu_a - \mu)\hat{\mathfrak{C}} + \beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}. \tag{12}$$

Dabei ist $\boldsymbol{I}$ der zweistufige Einheitstensor, $\mathfrak{I}$ der vierstufige Einheitstensor und $\hat{\mathfrak{C}}$ ein vierstufiger Tensor mit

$$\hat{\mathfrak{C}} : \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}. \tag{13}$$

Die Formeln (10), (11) und (12) werden als Invariantendarstellung der spezifischen Formänderungsenergie bezeichnet. Im Folgenden schreiben wir nur noch $\boldsymbol{T}$ und $\mathfrak{C}$ statt $\boldsymbol{T}_{ti}$ und $\mathfrak{C}_{ti}$.

Neben dieser klassischen Variante gibt es noch weitere Möglichkeiten, eine spezifische Formänderungsenergie zu definieren. Weiterführende Überlegungen dazu findet man zum Beispiel in [SN03].

aus der zweiten Zeile von $M - \phi_i I$ ablesen. Durch Normierung erhält man die beiden bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmten normierten Eigenvektoren, wir betrachten deshalb im Weiteren nur $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$ und berechnen $v_1 = \tilde{v}_1/\|\tilde{v}_1\|, v_2 = \tilde{v}_2/\|\tilde{v}_2\|$. Da die Tensoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ in $\mathcal{T}_2^s$ normiert sind, erhält man die gesuchten normierten Eigentensoren von $\mathfrak{C}$ aus den normierten Eigenvektoren von M durch

$$\boldsymbol{V}_i = v_i^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

Zur Berechnung der v_i führen wir zunächst die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \delta &:= -\lambda + 2\alpha + \beta + 4(\mu_a - \mu), \\ \tau &:= \delta^2 + 8(\lambda + \alpha)^2 \end{aligned}$$

von (44) ein und betrachten

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\lambda+\alpha) \\ -(\lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_a - 2\mu - \phi_i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\lambda+\alpha) \\ \phi_i - (\lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_a - 2\mu) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\lambda+\alpha) \\ \frac{3}{2}\lambda+\alpha+\frac{1}{2}\beta+2\mu_a \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2+8(\lambda+\alpha)^2} - (\lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_a - 2\mu) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\lambda+\alpha) \\ \frac{1}{2}\lambda - \alpha - \frac{1}{2}\beta - 2(\mu_a - \mu) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\tau} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\lambda+\alpha) \\ -\frac{1}{2}\delta \pm \frac{1}{2}\sqrt{\tau} \end{bmatrix}, \\ \|\tilde{v}_i\|^2 &= 2(\lambda+\alpha)^2 + \tfrac{1}{4}\delta^2 + \tfrac{1}{4}\tau \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau} \\ &= 2(\lambda+\alpha)^2 + \tfrac{1}{4}\delta^2 + \tfrac{1}{4}\Big(\delta^2 + 8(\lambda+\alpha)^2\Big) \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau} \\ &= 4(\lambda+\alpha)^2 + \tfrac{1}{2}\delta^2 \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau} \\ &= \tfrac{1}{2}\tau \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}, \\ 1/\|\tilde{v}_i\| &= 1/\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \mp \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\tau \mp \frac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}}{\frac{1}{2}\tau \mp \frac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\tau \mp \frac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}\Big(\frac{1}{2}\tau \pm \frac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}\Big)}{\Big(\frac{1}{2}\tau \mp \frac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}\Big)\Big(\frac{1}{2}\tau \pm \frac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}\Big)} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\tau \mp \frac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{1}{2}\tau \pm \frac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{1}{2}\tau \pm \frac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}}{\frac{1}{4}\tau^2 - \frac{1}{4}\delta^2\tau} \\ &\qquad \Big[\text{Da } \tau > \delta^2 \text{ ist, folgt } \tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau} > 0 \text{ und} \\ &\qquad\quad \text{damit } \tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau} = \Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}\tau \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}\Big)^2.\Big] \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\tau^2 - \frac{1}{4}\delta^2\tau}\sqrt{\frac{1}{2}\tau \pm \frac{1}{2}\delta\sqrt{\tau}}}{\frac{1}{4}\tau^2 - \frac{1}{4}\delta^2\tau}. \end{aligned}$$

erhält man die in den Formeln (34) bis (39) und (46) verwendeten Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}:(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}) &= 2\mu(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a})+2(\mu_a-\mu)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a})\\
&= 2\mu_a(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}),\\
\mathfrak{C}:(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_1) &= 2\mu(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_1),\\
\mathfrak{C}:(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2) &= \lambda(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I})+2\mu(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2)\\
&= 2\mu(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2),\\
\mathfrak{C}:\boldsymbol{A} &= \lambda\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I}+4(\mu_a-\mu)\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A}\\
&= (\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu)\boldsymbol{A}+(\lambda+\alpha)\boldsymbol{I}\\
&= (\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu)\boldsymbol{A}+\sqrt{2}(\lambda+\alpha)\boldsymbol{B},\\
\mathfrak{C}:\boldsymbol{B} &= \tfrac{2}{\sqrt{2}}\lambda\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{B}+\tfrac{2}{\sqrt{2}}\alpha\boldsymbol{A}\\
&= \sqrt{2}\lambda(\boldsymbol{A}+\sqrt{2}\boldsymbol{B})+2\mu\boldsymbol{B}+\sqrt{2}\alpha\boldsymbol{A}\\
&= \sqrt{2}(\lambda+\alpha)\boldsymbol{A}+2(\lambda+\mu)\boldsymbol{B},\\
\mathfrak{C}:(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_1) &= 2\mu(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_1),\\
\mathfrak{C}:(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}) &= 2\mu(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a})+2(\mu_a-\mu)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a})\\
&= 2\mu_a(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}).
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\phi_{1/2}$ aus (41) betrachten wir

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix}\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu & \sqrt{2}(\lambda+\alpha)\\ \sqrt{2}(\lambda+\alpha) & 2(\lambda+\mu)\end{bmatrix},\\
\det(M-\phi I) &= (\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu-\phi)(2\lambda+2\mu-\phi)-2(\lambda+\alpha)^2\\
&= \phi^2-(3\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a)\phi\\
&\quad +(\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu)(2\lambda+2\mu)-2(\lambda+\alpha)^2 \stackrel{!}{=} 0,\\
\phi_{1/2} &= \tfrac{1}{2}(3\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(3\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a)^2\ldots}\\
&\quad \overline{\ldots-(\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu)(2\lambda+2\mu)+2(\lambda+\alpha)^2}\\
&= \tfrac{3}{2}\lambda+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+2\mu_a+\tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+4\alpha^2+\beta^2+16\mu_a^2+16\mu^2\ldots}\\
&\quad \overline{\ldots-4\lambda\alpha-2\lambda\beta-8\lambda\mu_a+8\lambda\mu+4\alpha\beta+16\alpha\mu_a-16\alpha\mu\ldots}\\
&\quad \overline{+8\beta\mu_a-8\beta\mu-32\mu_a\mu+8(\lambda+\alpha)^2}\\
&= \tfrac{3}{2}\lambda+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+2\mu_a\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\big(-\lambda+2\alpha+\beta+4(\mu_a-\mu)\big)^2+8(\lambda+\alpha)^2}.
\end{aligned}$$

Die zugehörigen, noch nicht normierten Eigenvektoren kann man wahlweise als

$$\tilde{v}_i = \begin{bmatrix}\sqrt{2}(\lambda+\alpha)\\ -(\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu-\phi_i)\end{bmatrix}$$

aus der ersten Zeile von $M-\phi_i I$ oder als

$$\hat{v}_i = \begin{bmatrix}(2\lambda+2\mu-\phi_i)\\ -\sqrt{2}(\lambda+\alpha)\end{bmatrix}$$

3 Umrechnung der Materialkonstanten

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die fünf Materialkonstanten $\lambda, \mu, \mu_a, \alpha, \beta$ aus der so genannten Invariantendarstellung durch die üblichen Ingenieurskonstanten und umgekehrt auszudrücken. Man benötigt die Werte

$$\begin{aligned}
E_a &- \text{ Elastizitätsmodul in } \boldsymbol{a}\text{-Richtung},\\
E &- \text{ Elastizitätsmodul in Isotropieebene},\\
\nu_{ab} &- \text{ Querkontraktionszahl}\\
&\quad (\text{Zugrichtung } \boldsymbol{a}, \text{ Kontraktion in Isotropieebene}),\\
\nu_{ba} &- \text{ Querkontraktionszahl}\\
&\quad (\text{Zug in Isotropieebene, Kontraktion in Richtung } \boldsymbol{a}),\\
\nu &- \text{ Querkontraktionszahl}\\
&\quad (\text{Zug und Kontraktion in Isotropieebene}),\\
G_a &- \text{ Schubmodul bei Schub in Richtung } \boldsymbol{a},\\
G &- \text{ Schubmodul in Isotropieebene}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Als Isotropieebene wird dabei die zu $\boldsymbol{a}$ senkrechte Ebene bezeichnet. Durch die mechanisch begründeten Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{E_a}{\nu_{ab}} &= \frac{E}{\nu_{ba}} \quad (\text{Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix}),\\
G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{Schubmodul bei Isotropie})
\end{aligned} \tag{15}$$

reduziert sich die Zahl der unabhängigen Parameter auf fünf. Es gelten die Umrechnungsformeln

$$\begin{aligned}
E_a &= -(\lambda\mu-4\lambda\mu_a-\beta\lambda+2\mu^2-\beta\mu-2\alpha\mu-4\mu_a\mu+\alpha^2)/(\lambda+\mu),\\
E &= -4\mu(\lambda\mu-4\lambda\mu_a-\beta\lambda+2\mu^2-\beta\mu-2\alpha\mu-4\mu_a\mu+\alpha^2)/D_1,\\
\nu_{ab} &= (\lambda+\alpha)/(2\lambda+2\mu),\\
\nu_{ba} &= 2\mu(\lambda+\alpha)/D_1,\\
\nu &= -(\alpha^2+2\lambda\mu-\beta\lambda-4\lambda\mu_a)/D_1,\\
G_a &= \mu_a,\\
G &= \mu,\\
D_1 &= 4\lambda\mu_a+\beta\lambda-4\mu^2+4\alpha\mu+2\beta\mu+8\mu_a\mu-\alpha^2
\end{aligned} \tag{16}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda &= E(\nu+\nu_{ab}\nu_{ba})/D = E(\nu+\tfrac{E}{E_a}\nu_{ab}^2)/D,\\
\alpha &= E(\nu_{ab}(1+\nu-\nu_{ba})-\nu)/D = E(\nu_{ab}(1+\nu-\tfrac{E}{E_a}\nu_{ab})-\nu)/D,\\
\beta &= \Big(E_a(1-\nu^2)-E(\nu+\nu_{ab}\nu_{ba})-2E(\nu_{ab}(1+\nu-\nu_{ba})-\nu)\Big)/D-4G_a+2G\\
&= \Big(E_a(1-\nu^2)-E(\nu+\tfrac{E}{E_a}\nu_{ab}^2)-2E(\nu_{ab}(1+\nu-\tfrac{E}{E_a}\nu_{ab})-\nu)\Big)/D\\
&\quad -4G_a+\tfrac{E}{(1+\nu)},\\
\mu_a &= G_a,\\
\mu &= G=\tfrac{E}{2(1+\nu)},\\
D &= 1-\nu^2-2\nu_{ab}\nu_{ba}-2\nu_{ab}\nu_{ba}\nu = (1+\nu)(1-\nu-2\nu_{ab}\nu_{ba})\\
&= 1-\nu^2-2\tfrac{E}{E_a}\nu_{ab}^2-2\tfrac{E}{E_a}\nu_{ab}^2\nu
\end{aligned} \tag{17}$$

aus [Fio08], Kapitel 3.5.2.

Das isotrope Materialgesetz ist im transversal isotropen als Spezialfall enthalten. Setzt man

$$\begin{aligned}
E &= E_a,\\
\nu &= \nu_{ab}=\nu_{ba},\\
G &= G_a,
\end{aligned}$$

so folgt

$$\lambda = \frac{E(\nu+\nu^2)}{(1+\nu)(1-\nu-2\nu^2)} = \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

wie im isotropen Fall bei (9) und

$$\alpha=\beta=\mu_a-\mu=0,$$

das heißt alle von $\boldsymbol{a}$ abhängigen Terme verschwinden aus dem Materialgesetz.

4 Elastizitätsmatrix

Wir nutzen nun die Symmetrieeigenschaften des Materialtensors $\mathfrak{C}$ sowie die Symmetrie von $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{E}$ und gehen zur Matrixschreibweise über, auch Voigtsche Notation genannt. Die Koordinaten von $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{E}$ in der kanonischen Einheitsbasis seien a_i, t_{ij} und e_{ij}, $i,j=1,2,3$. Man definiert die Vektoren

$$\begin{aligned}
\underline{E} &:= [e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{12}, 2e_{23}, 2e_{13}]^T, && \text{(Verzerrungsvektor)}\\
\underline{T} &:= [t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{12}, t_{23}, t_{13}]^T && \text{(Spannungsvektor)}
\end{aligned} \tag{18}$$

(Achtung: die Reihenfolge der jeweils letzten drei Terme ist in der Literatur nicht einheitlich) und bildet die symmetrische Matrix $C \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ so, dass

$$\boldsymbol{E} : \mathfrak{C} : \boldsymbol{E} = \underline{T}^T \underline{E} = \underline{E}^T C\, \underline{E} \tag{19}$$

8 Anhang

8.1 Nebenrechnungen

Alle Formeln dieses Abschnitts, in denen der Index i auftritt, gelten für $i=1,2$. Tritt zusätzlich der Index j auf, so gelten sie für die beiden Fälle $i=1$, $j=2$ und $i=2$, $j=1$. Über doppelt auftretende Indizes wird *nicht* summiert. Es werden die Abkürzungen

$$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{aa},\ \boldsymbol{B} := \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2)$$

mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{A}+\sqrt{2}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$$

benutzt, vergleiche (37).

Aus der Konstruktion von $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ als Orthonormalbasis in $\mathcal{T}_1$ folgen die Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} &= 1,\\
\operatorname{tr}\boldsymbol{A} &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{aa}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 1,\\
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{aa}\cdot\boldsymbol{aa} = \boldsymbol{aa} = \boldsymbol{A},\\
\boldsymbol{I}:\boldsymbol{A} &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} = 1,\\
\boldsymbol{A}:\boldsymbol{A} &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} = 1,\\
\hat{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{A},\\
\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_i &= 1,\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_i &= \boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_2 = 0,\\
\boldsymbol{I}:\boldsymbol{ab}_i &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{ab}_i) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_i = 0,\\
\boldsymbol{I}:\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a} &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{a} = 0,\\
\boldsymbol{A}:\boldsymbol{ab}_i &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{aa}\cdot\boldsymbol{ab}_i) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{ab}_i) = 0,\\
\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a} &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{aa}\cdot\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}) = 0,\\
\boldsymbol{I}:\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i &= 1,\\
\boldsymbol{I}:\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_j &= 0,\\
\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i &= \boldsymbol{A}:\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_j = 0,\\
\hat{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{ab}_i &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{ab}_i+\boldsymbol{ab}_i\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{aa}\cdot\boldsymbol{ab}_i+\boldsymbol{ab}_i\cdot\boldsymbol{aa} = \boldsymbol{ab}_i+0 = \boldsymbol{ab}_i,\\
\hat{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{aa}\cdot\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{aa} = 0+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a},\\
\hat{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i &= \hat{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_j = 0.
\end{aligned}$$

Mit dem Materialtensor von (12),

$$\mathfrak{C} = \lambda\boldsymbol{II}+2\mu\mathfrak{I}+\alpha(\boldsymbol{AI}+\boldsymbol{IA})+2(\mu_a-\mu)\hat{\mathfrak{C}}+\beta\boldsymbol{AA},$$

der Berechnung der für das Energiefunktional irrelevanten Verzerrungskoordinate e_{33} zur Anwendung. Diese erhält man als

$$\begin{aligned} e_{33} &= \Big(-\tfrac{\lambda+\alpha}{\phi_1\phi_2}\hat{a} + (\tfrac{\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu}{2\phi_1\phi_2} - \tfrac{1}{4\mu})\hat{b}\Big)^T \underline{\tilde{T}} \\ &= \Big(-\tfrac{E\nu_{ab}(1+\nu)}{D}\tfrac{D}{E_a E(1+\nu)}\hat{a} + (\tfrac{E_a(1-\nu^2)}{2D}\tfrac{D}{E_a E(1+\nu)} - \tfrac{1+\nu}{2E})\hat{b}\Big)^T \underline{\tilde{T}} \\ &= \Big(-\tfrac{\nu_{ab}}{E_a}\hat{a} + (\tfrac{1-\nu}{2E} - \tfrac{1+\nu}{2E})\hat{b}\Big)^T \underline{\tilde{T}} \\ &= \Big(-\tfrac{\nu_{ab}}{E_a}\hat{a} - \tfrac{\nu}{E}\hat{b}\Big)^T \underline{\tilde{T}} \\ &= \Big(-\tfrac{\nu_{ab}}{E_a}\hat{a} - \tfrac{\nu}{E}\hat{b}\Big)^T \tilde{C}\underline{\tilde{E}}. \end{aligned}$$

gilt. Diese Matrix wird als Elastizitätsmatrix, ihre Inverse als Nachgiebigkeitsmatrix bezeichnet. Sie wird unter anderem benötigt, um die Elementsteifigkeitsmatrizen für die FEM zu bestimmen. Wir betrachten im Folgenden die einzelnen Summanden des Materialtensors $\mathfrak{C}$ bzw. von $\boldsymbol{E} : \mathfrak{C} : \boldsymbol{E}$ und bilden die zugehörigen Anteile der Matrix C.

1) $\lambda \boldsymbol{I}\boldsymbol{I}$ **bzw.** $\lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})^2$

Mit

$$C_1 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

folgt offenbar

$$\underline{E}^T C_1 \underline{E} = \underline{E}^T \Big(\lambda[\mathrm{tr}\boldsymbol{E}, \mathrm{tr}\boldsymbol{E}, \mathrm{tr}\boldsymbol{E}, 0, 0, 0]^T\Big) = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})^2.$$

2) $2\mu\mathfrak{I}$ **bzw.** $2\mu\,\mathrm{tr}\boldsymbol{E}^2$

Die Matrix

$$C_2 = \mathrm{diag}(2\mu, 2\mu, 2\mu, \mu, \mu, \mu) \tag{21}$$

erfüllt

$$\underline{E}^T C_2 \underline{E} = 2\mu(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{12}^2 + 2e_{23}^2 + 2e_{13}^2) = 2\mu\,\mathrm{tr}\boldsymbol{E}^2.$$

3) $\alpha(\boldsymbol{A}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{A})$ **bzw.** $2\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a})\mathrm{tr}\boldsymbol{E}$

Der Vektor

$$\hat{e} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T \tag{22}$$

realisiert im Skalarprodukt mit $\underline{E}$ die Bildung von $\mathrm{tr}\boldsymbol{E}$, der Vektor

$$\hat{a} = [a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_1a_2, a_2a_3, a_1a_3]^T \tag{23}$$

realisiert im Skalarprodukt mit $\underline{E}$ die Bildung von $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}$. Also gilt

$$\underline{E}^T \hat{a}\,\hat{e}^T \underline{E} = \underline{E}^T \hat{e}\,\hat{a}^T \underline{E} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a})\mathrm{tr}\boldsymbol{E}$$

und mit der Bedingung, dass C symmetrisch ist, folgt

$$C_3 = \alpha(\hat{a}\,\hat{e}^T + \hat{e}\,\hat{a}^T). \tag{24}$$

4) $2(\mu_a-\mu)\hat{\mathfrak{C}}$ **bzw.** $4(\mu_a-\mu)\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}^2)$

Da $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{E}$ symmetrisch sind, gilt

$$\boldsymbol{E}:\hat{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}:(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^2\cdot\boldsymbol{A})=2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}^2).$$

Wir bilden den Vektor v zu $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}$,

$$v=\begin{bmatrix}2a_1a_ke_{k1}\\2a_2a_ke_{k2}\\2a_3a_ke_{k3}\\a_2a_ke_{k1}+a_1a_ke_{k2}\\a_3a_ke_{k2}+a_2a_ke_{k3}\\a_3a_ke_{k1}+a_1a_ke_{k3}\end{bmatrix}$$

unter Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention. Damit gilt

$$\underline{E}^Tv=2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}^2).$$

Die Matrix C_4 hat also die Gestalt

$$C_4=2(\mu_a-\mu)\begin{bmatrix}2a_1^2&0&0&a_1a_2&0&a_1a_3\\&2a_2^2&0&a_1a_2&a_2a_3&0\\&&2a_3^2&0&a_2a_3&a_1a_3\\S&&&\frac{a_1^2+a_2^2}{2}&\frac{a_1a_3}{2}&\frac{a_2a_3}{2}\\&Y&&&\frac{a_2^2+a_3^2}{2}&\frac{a_1a_2}{2}\\&&M&&&\frac{a_1^2+a_3^2}{2}\end{bmatrix}.\tag{25}$$

5) $\beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$ **bzw.** $\beta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a})^2$

Mit dem Vektor $\hat{a}$ von (23) folgt

$$\underline{E}^T\hat{a}\,\hat{a}^T\underline{E}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}),$$

also erhält man

$$C_5=\beta\,\hat{a}\,\hat{a}^T.\tag{26}$$

Die gesamte Matrix C ergibt sich aus der Summe dieser Anteile,

$$C=C_1+C_2+C_3+C_4+C_5.\tag{27}$$

Damit lässt sich die Formänderungsenergie mit allen Abhängigkeiten als

$$\varphi=\int_{\Omega_0}\psi\Big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\Big)\,\mathrm{d}\Omega_0=\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\underline{E}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))^TC(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}))\,\underline{E}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\Omega_0\tag{28}$$

schreiben.

Mit den Umformungen

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\det(C_{sub}^{-1})}\Big(\tfrac{\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu}{2\phi_1\phi_2}+\tfrac{1}{4\mu}\Big)&=\tfrac{2\mu\phi_1\phi_2}{\lambda+2\mu}\Big(\tfrac{\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu}{2\phi_1\phi_2}+\tfrac{1}{4\mu}\Big)\\&=\mu\tfrac{\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu}{\lambda+2\mu}+\tfrac{\phi_1\phi_2}{2\lambda+4\mu}\\&=\tfrac{\mu(\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu)+(\lambda+\mu)(\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu)-(\lambda+\alpha)^2}{\lambda+2\mu}\\&=\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu-\tfrac{(\lambda+\alpha)^2}{\lambda+2\mu},\\\tfrac{1}{\det(C_{sub}^{-1})}\tfrac{\lambda+\alpha}{\phi_1\phi_2}&=\tfrac{2\mu\phi_1\phi_2}{\lambda+2\mu}\tfrac{\lambda+\alpha}{\phi_1\phi_2}\\&=\tfrac{2\mu(\lambda+\alpha)}{\lambda+2\mu},\\\tfrac{1}{\det(C_{sub}^{-1})}\tfrac{2(\lambda+\mu)}{\phi_1\phi_2}&=\tfrac{2\mu\phi_1\phi_2}{\lambda+2\mu}\tfrac{2(\lambda+\mu)}{\phi_1\phi_2}\\&=\tfrac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\end{aligned}$$

folgt schließlich der reduzierte Materialtensor

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{C}}=&\Big(\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu-\tfrac{(\lambda+\alpha)^2}{\lambda+2\mu}\Big)\boldsymbol{aaaa}+\tfrac{2\mu(\lambda+\alpha)}{\lambda+2\mu}(\boldsymbol{aabb}+\boldsymbol{bbaa})\\&+\tfrac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\boldsymbol{bbbb}+\mu_a(\boldsymbol{abab}+\boldsymbol{abba}+\boldsymbol{baab}+\boldsymbol{baba}).\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Abkürzungen aus (53) und mit den folgenden Umrechnungen auf Ingenieurskonstanten (vergleiche (17) und (32))

$$\begin{aligned}\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu-\tfrac{(\lambda+\alpha)^2}{\lambda+2\mu}&=\tfrac{E_a(1-\nu^2)}{D}-\tfrac{E^2\nu_{ab}^2(1+\nu)^2}{D^2}\tfrac{D}{E(1-\nu_{ab}\nu ba)}\\&=\tfrac{E_a}{D}\Big(1-\nu^2-\tfrac{\nu_{ab}\nu_{ba}(1+\nu)^2}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}}\Big)\\&=\tfrac{E_a}{D}\tfrac{D}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}}\\&=\tfrac{E_a}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}},\\\tfrac{2\mu(\lambda+\alpha)}{\lambda+2\mu}&=\tfrac{E}{1+\nu}\tfrac{E\nu_{ab}(1+\nu)}{D}\tfrac{D}{E(1-\nu_{ab}\nu_{ba})}\\&=\tfrac{E\nu_{ab}}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}},\\\tfrac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}&=\tfrac{2E}{1+\nu}\tfrac{E(1+\nu)}{2D}\tfrac{D}{E(1-\nu_{ab}\nu_{ba})}\\&=\tfrac{E}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}}\end{aligned}$$

ergibt sich die reduzierte 3×3-Elastizitätsmatrix $\tilde{C}$ als

$$\begin{aligned}\tilde{C}=&\Big(\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu-\tfrac{(\lambda+\alpha)^2}{\lambda+2\mu}\Big)\hat{a}\,\hat{a}^T+\tfrac{2\mu(\lambda+\alpha)}{\lambda+2\mu}(\hat{a}\,\hat{b}^T+\hat{b}\,\hat{a}^T)\\&+\tfrac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\hat{b}\,\hat{b}^T+4\mu_a\hat{c}\,\hat{c}^T\\=&\tfrac{E_a}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}}\hat{a}\,\hat{a}^T+\tfrac{E\nu_{ab}}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}}(\hat{a}\,\hat{b}^T+\hat{b}\,\hat{a}^T)\\&+\tfrac{E}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}}\hat{b}\,\hat{b}^T+4G_a\,\hat{c}\,\hat{c}^T\end{aligned}\tag{56}$$

mit

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{T}}&=\tilde{C}\underline{\tilde{E}},\\\tilde{\boldsymbol{E}}:\mathfrak{C}:\tilde{\boldsymbol{E}}&=\tilde{\boldsymbol{E}}:\tilde{\mathfrak{C}}:\tilde{\boldsymbol{E}}=\underline{\tilde{E}}^T\tilde{C}\underline{\tilde{E}}.\end{aligned}$$

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass beim ESZ, im Gegensatz zum 3D-Fall und zum EVZ, die Materialkonstante ν nicht benötigt wird. Sie kommt nur noch bei

mit

$$\begin{aligned}\phi_1\phi_2 &= \Big(\tfrac{1}{2}\delta + 2(\lambda+\mu) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tau}\Big)\Big(\tfrac{1}{2}\delta + 2(\lambda+\mu) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tau}\Big)\\ &= \tfrac{1}{4}\delta^2 + 2(\lambda+\mu)\delta + 4(\lambda+\mu)^2 - \tfrac{1}{4}\tau\\ &= \tfrac{1}{4}\delta^2 + 2(\lambda+\mu)\delta + 4(\lambda+\mu)^2 - \tfrac{1}{4}\Big(\delta^2 + 8(\lambda+\alpha)^2\Big)\\ &= 2(\lambda+\mu)\Big(\delta + 2(\lambda+\mu)\Big) - 2(\lambda+\alpha)^2.\end{aligned}$$

Der Tensor $\tilde{\mathfrak{C}}^{-1}$ hat also die Form

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{C}}^{-1} = &\tfrac{2}{\phi_1\phi_2}(\lambda+\mu)\boldsymbol{aaaa} - \tfrac{1}{\phi_1\phi_2}(\lambda+\alpha)(\boldsymbol{aabb}+\boldsymbol{bbaa})\\ &+\Big(\tfrac{1}{2\phi_1\phi_2}(\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu)+\tfrac{1}{4\mu}\Big)\boldsymbol{bbbb}\\ &+\tfrac{1}{4\mu_a}(\boldsymbol{abab}+\boldsymbol{abba}+\boldsymbol{baab}+\boldsymbol{baba}).\end{aligned}$$

Um diesen Tensor zu invertieren, betrachtet man seine Wirkung in der Basis von $\mathbb{V}$ aus (55) und erhält eine Matrix, die wir mit $\tilde{C}^{-1}$ bezeichnen. Aus deren Inverse $\tilde{C}$ kann man die gesuchte Inverse $\tilde{\mathfrak{C}}$ des Tensors $\tilde{\mathfrak{C}}^{-1}$ folgern,

$$\tilde{\mathfrak{C}}^{-1} : \begin{bmatrix}\boldsymbol{aa}\\ \boldsymbol{bb}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ba})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2(\lambda+\mu)}{\phi_1\phi_2} & -\frac{\lambda+\alpha}{\phi_1\phi_2} & 0\\ -\frac{\lambda+\alpha}{\phi_1\phi_2} & \frac{\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu}{2\phi_1\phi_2}+\frac{1}{4\mu} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{aa}\\ \boldsymbol{bb}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ba})\end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}^{-1} := \begin{bmatrix}C_{sub}^{-1} & 0\\ 0\ \ 0 & \frac{1}{2\mu_a}\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}\frac{2(\lambda+\mu)}{\phi_1\phi_2} & -\frac{\lambda+\alpha}{\phi_1\phi_2} & 0\\ -\frac{\lambda+\alpha}{\phi_1\phi_2} & \frac{\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu}{2\phi_1\phi_2}+\frac{1}{4\mu} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_a}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix}C_{sub} & 0\\ 0\ \ 0 & 2\mu_a\end{bmatrix}.$$

Mit der Determinanten

$$\begin{aligned}\det(C_{sub}^{-1}) &= \frac{2(\lambda+\mu)}{\phi_1\phi_2}\Big(\frac{\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu}{2\phi_1\phi_2}+\frac{1}{4\mu}\Big) - \frac{(\lambda+\alpha)^2}{\phi_1^2\phi_2^2}\\ &= \frac{(\lambda+\mu)(\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu)-(\lambda+\alpha)^2}{\phi_1^2\phi_2^2} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu\phi_1\phi_2}\\ &= \frac{\frac{1}{2}\phi_1\phi_2}{\phi_1^2\phi_2^2} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu\phi_1\phi_2} = \frac{1}{2\phi_1\phi_2} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu\phi_1\phi_2}\\ &= \frac{\lambda+2\mu}{2\mu\phi_1\phi_2}\end{aligned}$$

erhält man C_{sub} als

$$C_{sub} = \frac{1}{\det(C_{sub}^{-1})}\begin{bmatrix}\frac{\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu}{2\phi_1\phi_2}+\frac{1}{4\mu} & \frac{\lambda+\alpha}{\phi_1\phi_2}\\ \frac{\lambda+\alpha}{\phi_1\phi_2} & \frac{2(\lambda+\mu)}{\phi_1\phi_2}\end{bmatrix}.$$

4.1 Spezialfall: Fasern in 1-Richtung

Für den Spezialfall $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}E_a &= E_1,\\ E &= E_2 = E_3,\\ \nu_{ab} &= \nu_{12} = \nu_{13},\\ \nu_{ba} &= \nu_{21} = \nu_{31},\\ \nu &= \nu_{23} = \nu_{32},\\ G_a &= G_{12} = G_{13},\\ G &= G_{23}\end{aligned} \tag{29}$$

zusätzlich zur unabhängig von der transversalen Isotropie stets geltenden Symmetriebedingung

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad i,j=1,2,3. \tag{30}$$

Dabei gibt der erste Index der Querkontraktionszahlen die Zugrichtung und der zweite Index die Kontraktionsrichtung an. Dies entspricht der in englischer Literatur üblichen Reihenfolge, in deutschen Veröffentlichungen ist die Bedeutung oft umgekehrt.

Mit den Konstanten der Invariantendarstellung erhält man die Elastizitätsmatrix

$$C = \begin{bmatrix}\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu & \lambda+\alpha & \lambda+\alpha & 0 & 0 & 0\\ \lambda+\alpha & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda+\alpha & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu_a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_a\end{bmatrix}. \tag{31}$$

Um diese Matrix mit den Ingenieurskonstanten angeben zu können, werden die

Umformungen aus (17) benutzt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
D &= 1-\nu^2-2\nu_{ab}\nu_{ba}-2\nu_{ab}\nu_{ba}\nu \\
&= (1+\nu)(1-\nu-2\nu_{ab}\nu_{ba}), \\
\lambda &= E(\nu+\nu_{ab}\nu_{ba})/D, \\
\mu_a &= G_a, \\
\mu &= G = \tfrac{E}{2(1+\nu)} \quad \Big(= E(1-\nu-2\nu_{ab}\nu_{ba})/(2D)\Big), \\
\lambda+\alpha &= \Big(E(\nu+\nu_{ab}\nu_{ba})+E(\nu_{ab}(1+\nu-\nu_{ba})-\nu)\Big)/D \\
&= E(\nu_{ab}+\nu_{ab}\nu)/D, \\
\lambda+2\mu &= \Big(E(\nu+\nu_{ab}\nu_{ba})+E(1-\nu-2\nu_{ab}\nu_{ba})\Big)/D \\
&= E(1-\nu_{ab}\nu_{ba})/D, \\
\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu &= E(\nu+\nu_{ab}\nu_{ba})/D+2E(\nu_{ab}(1+\nu-\nu_{ba})-\nu)/D \\
&\quad +E_a(1-\nu^2)/D-E(\nu+\nu_{ab}\nu_{ba})/D \\
&\quad -2E(\nu_{ab}(1+\nu-\nu_{ba})-\nu)/D \\
&\quad -4G_a+2G+4G_a-2G \\
&= E_a(1-\nu^2)/D
\end{aligned} \tag{32}$$

und es entstehen die Elastizitätsmatrix

$$C = \begin{bmatrix}
E_a(1-\nu^2)/D & E(\nu_{ab}+\nu_{ab}\nu)/D & E(\nu_{ab}+\nu_{ab}\nu)/D & 0 & 0 & 0 \\
E(\nu_{ab}+\nu_{ab}\nu)/D & E(1-\nu_{ab}\nu_{ba})/D & E(\nu+\nu_{ab}\nu_{ba})/D & 0 & 0 & 0 \\
E(\nu_{ab}+\nu_{ab}\nu)/D & E(\nu+\nu_{ab}\nu_{ba})/D & E(1-\nu_{ab}\nu_{ba})/D & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & G_a & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_a
\end{bmatrix}$$

sowie die Nachgiebigkeitsmatrix

$$C^{-1} = \begin{bmatrix}
1/E_a & -\nu_{ab}/E_a & -\nu_{ab}/E_a & 0 & 0 & 0 \\
-\nu_{ab}/E_a & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\
-\nu_{ab}/E_a & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/G_a & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_a
\end{bmatrix}.$$

Diese stimmen mit den im Maschinenbau gebräuchlichen Matrizen überein (siehe z.B. [Bow09], Kap. 3.2.14 mit $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_3$), oft werden in der Nachgiebigkeitsmatrix die Terme unterhalb der Diagonale unter Verwendung der Symmetriebedingung anders angegeben ($-\nu_{ba}/E$ statt $-\nu_{ab}/E_a$).

Man erhält

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_6^+ &= \tfrac{1}{4\mu_a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a}), \\
\mathfrak{C}_5^+ &= \tfrac{1}{4\mu_a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}), \\
\mathfrak{C}_4^+ &= \tfrac{1}{4\mu}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b}), \\
\mathfrak{C}_3^+ &= \tfrac{1}{4\mu}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3), \\
\mathfrak{C}_{1/2}^+ &= \tfrac{1}{2\phi_{1/2}}(1\pm\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} \\
&\quad \pm\tfrac{1}{2\phi_{1/2}}\sqrt{1-\tfrac{\delta^2}{\tau}}\Big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)+\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\Big) \\
&\quad +\tfrac{1}{4\phi_{1/2}}(1\mp\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3).
\end{aligned}$$

sowie die Projektionen auf $\mathbb{A}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{C}}_6^+ &= 0, \\
\tilde{\mathfrak{C}}_5^+ &= \mathfrak{C}_5^{-1}, \\
\tilde{\mathfrak{C}}_4^+ &= 0, \\
\tilde{\mathfrak{C}}_3^+ &= \tfrac{1}{4\mu}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}, \\
\tilde{\mathfrak{C}}_{1/2}^+ &= \tfrac{1}{2\phi_{1/2}}(1\pm\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\pm\tfrac{\sqrt{2}}{4\phi_{1/2}}\sqrt{1-\tfrac{\delta^2}{\tau}}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) \\
&\quad +\tfrac{1}{4\phi_{1/2}}(1\mp\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}, \\
\tilde{\mathfrak{C}}^{-1} &= \tilde{\mathfrak{C}}_1^+ + \tilde{\mathfrak{C}}_2^+ + \tilde{\mathfrak{C}}_3^+ + \tilde{\mathfrak{C}}_5^+.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen die Komponenten von $\tilde{\mathfrak{C}}_1^+ + \tilde{\mathfrak{C}}_2^+$ und erhalten (vergleiche (52))

$$\begin{aligned}
&\Big(\tfrac{1}{2\phi_1}(1+\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})+\tfrac{1}{2\phi_2}(1-\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\Big)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{\phi_1+\phi_2}{\phi_1\phi_2}+\tfrac{\phi_2-\phi_1}{\phi_1\phi_2}\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}\Big)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} \\
&\qquad = \tfrac{1}{2\phi_1\phi_2}(\delta+4(\lambda+\mu)-\delta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} \\
&\qquad = \tfrac{2}{\phi_1\phi_2}(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big(\tfrac{\sqrt{2}}{4\phi_1}\sqrt{1-\tfrac{\delta^2}{\tau}}-\tfrac{\sqrt{2}}{4\phi_2}\sqrt{1-\tfrac{\delta^2}{\tau}}\Big)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) \\
&\qquad = \tfrac{\phi_2-\phi_1}{\phi_1\phi_2}\sqrt{\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{8}\tfrac{\delta^2}{\tau}}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) \\
&\qquad = -\tfrac{1}{\phi_1\phi_2}\sqrt{\tfrac{1}{8}\tau-\tfrac{1}{8}\delta^2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) \\
&\qquad = -\tfrac{1}{\phi_1\phi_2}\sqrt{\tfrac{1}{8}(\delta^2+8(\lambda+\alpha^2))-\tfrac{1}{8}\delta^2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) \\
&\qquad = -\tfrac{1}{\phi_1\phi_2}(\lambda+\alpha)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}), \\
&\Big(\tfrac{1}{4\phi_1}(1-\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})+\tfrac{1}{4\phi_2}(1+\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\Big)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} \\
&\qquad = \tfrac{1}{4\phi_1\phi_2}\Big((\phi_1+\phi_2)-(\phi_2-\phi_1)\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}\Big)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} \\
&\qquad = \tfrac{1}{4\phi_1\phi_2}\Big(\delta+4(\lambda+\mu)+\delta\Big)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} \\
&\qquad = \tfrac{1}{2\phi_1\phi_2}(\lambda+2\alpha+\beta+4\mu_a-2\mu)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b},
\end{aligned}$$

mit den Koordinaten

$$b_1 = -a_2, \quad b_2 = a_1, \quad b_3 = a_3 = 0.$$

Es wird vorausgesetzt, dass alle Spannungen in 3-Richtung gleich null sind, das heißt man arbeitet mit dem 2D-Spannungstensor

$$\tilde{\boldsymbol{T}} \in \mathbb{V} = \operatorname{span}\left\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}, \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{a})\right\}. \tag{55}$$

Daraus folgt *nicht*, dass

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_0 := \mathfrak{C}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{T}}$$

aus dem gleichen Raum stammt. Allerdings ist nur die Projektion von $\tilde{\boldsymbol{E}}_0$ auf $\mathbb{V}$ für das Energiefunktional relevant, da in $\tilde{\boldsymbol{T}} : \tilde{\boldsymbol{E}}_0$ mit $\tilde{\boldsymbol{T}} \in \mathbb{V}$ alle Anteile von $\tilde{\boldsymbol{E}}_0$ außerhalb von $\mathbb{V}$ annulliert werden. Diese Projektion bezeichnen wir mit $\tilde{\boldsymbol{E}}$. Wie beim EVZ wird im Folgenden gezeigt, dass

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \in \mathbb{V}_0 = \operatorname{span}\left\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}, \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}), \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\right\}$$

gilt, $\tilde{\boldsymbol{E}}_0$ besitzt also keine Anteile im verbleibenden Raum

$$\operatorname{span}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a}), \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b})\right\}.$$

Analog zum EVZ kann man eine reduzierte 3×3-Elastizitätsmatrix konstruieren. Sie wird aus dem Tensor $\tilde{\mathfrak{C}}$ mit

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \tilde{\mathfrak{C}} : \tilde{\boldsymbol{E}}$$

gewonnen. Dieser Tensor ist nicht identisch mit dem reduzierten Materialtensor $\tilde{\mathfrak{C}}$ des EVZ, sondern wird wie folgt gebildet. Man bestimmt die Projektion von $\mathfrak{C}^{-1}$ bzw. $\mathfrak{C}_s^{-1}$ auf $\mathbb{A}$ aus (50) und bezeichnet sie mit $\tilde{\mathfrak{C}}^{-1}$. Dieser Tensor erfüllt

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \tilde{\mathfrak{C}}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{T}}.$$

Durch anschließendes Invertieren erhält man den gesuchten Tensor $\tilde{\mathfrak{C}}$.

Zunächst bildet man die Bestandteile der Inverse,

$$\mathfrak{C}_s^{-1} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\phi_i} \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{V}_i = \sum_{i=1}^{6} \mathfrak{C}_i^{+}$$

mit

$$\mathfrak{C}_i^{+} := \frac{1}{\phi_i} \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{V}_i.$$

5 Eigenwerte

Wir bestimmen nun die Eigenwerte des Materialtensors $\mathfrak{C}$ bezüglich doppelten Überschiebens mit symmetrischen Tensoren zweiter Stufe. Im Raum der einstufigen Tensoren $\mathcal{T}_1$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{T}_1} := \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$$

und die Norm

$$\|\boldsymbol{a}\|_{\mathcal{T}_1} := \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle_{\mathcal{T}_1}} = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}.$$

Im Raum der zweistufigen Tensoren $\mathcal{T}_2$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle_{\mathcal{T}_2} := \boldsymbol{A}^T : \boldsymbol{A}$$

und die Norm

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathcal{T}_2} := \sqrt{\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle_{\mathcal{T}_2}} = \sqrt{\boldsymbol{A}^T : \boldsymbol{A}}.$$

Für symmetrische Tensoren gilt

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathcal{T}_2^s} = \sqrt{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}}.$$

Die Mengen der symmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_2^s$ und der antisymmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_2^a$ bilden jeweils einen $\mathfrak{C}$-invarianten Unterraum der Dimensionen sechs bzw. drei (Beweis der Invarianz von $\mathcal{T}_2^a$ siehe Anhang 8.2). Da wir $\mathfrak{C}$ nur auf symmetrische Tensoren anwenden, untersuchen wir nur die Eigenwerte dieses Unterraums.

Wir wählen zwei Tensoren $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ so, dass die Menge

$$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$$

eine Orthonormalbasis in $\mathcal{T}_1$ bildet. Dann ist die Menge

$$\begin{aligned} &\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2), \\ &\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_1)\} \end{aligned} \tag{33}$$

eine Orthonormalbasis in $\mathcal{T}_2^s$ (Beweis siehe Anhang 8.2).

Unter Anwendung von (12) und Ausnutzung der Orthogonalität folgt

$$\mathfrak{C} : (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}) = 2\mu_a(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}), \quad i = 1, 2, \tag{34}$$

sowie

$$\mathfrak{C} : (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_1) = 2\mu(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_1) \tag{35}$$

und

$$\mathfrak{C} : (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2) = 2\mu(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2), \tag{36}$$

für eine ausführliche Berechnung dieser Terme siehe Anhang 8.1. Also sind $2\mu_a$ und 2μ jeweils doppelte Eigenwerte von $\mathfrak{C}$ mit den angegebenen Eigentensoren. Um die normierten Eigentensoren zu erhalten, müssen die obigen Tensoren mit $\sqrt{2}/2$ skaliert werden.

Die verbleibenden beiden Eigenwerte können aus dem noch nicht betrachteten invarianten Unterraum $\operatorname{span}\{\boldsymbol{aa}, \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2)\}$ ermittelt werden. Mit

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{aa},\ \boldsymbol{B} := \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2),\ \boldsymbol{A} + \sqrt{2}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} \tag{37}$$

erhalten wir

$$\mathfrak{C} : \boldsymbol{A} = (\lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_a - 2\mu)\boldsymbol{A} + \sqrt{2}(\lambda + \alpha)\boldsymbol{B} \tag{38}$$

und

$$\mathfrak{C} : \boldsymbol{B} = \sqrt{2}(\lambda + \alpha)\boldsymbol{A} + 2(\lambda + \mu)\boldsymbol{B}. \tag{39}$$

Die beiden gesuchten Eigenwerte sind die Eigenwerte der Matrix M, die durch

$$\mathfrak{C} : \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_a - 2\mu & \sqrt{2}(\lambda + \alpha)\\ \sqrt{2}(\lambda + \alpha) & 2(\lambda + \mu)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix} =: M\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix} \tag{40}$$

definiert wird. Als Lösungen der Gleichung

$$\det(M - \phi I) = 0$$

erhält man

$$\phi_{1/2} = \frac{3}{2}\lambda + \alpha + \frac{1}{2}\beta + 2\mu_a \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\lambda + 2\alpha + \beta + 4(\mu_a - \mu)\right)^2 + 8(\lambda + \alpha)^2}, \tag{41}$$

die ausführliche Berechnung befindet sich im Anhang 8.1 ab Seite 24.

Der Materialtensor $\mathfrak{C}$ besitzt also die Eigenwerte

$$\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3 = \phi_4 = 2\mu,\ \phi_5 = \phi_6 = 2\mu_a \tag{42}$$

bezüglich des doppelten Überschiebens mit symmetrischen Tensoren zweiter Stufe. Dazu gehören die entsprechenden normierten Eigentensoren

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \frac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}}\boldsymbol{A} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \frac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}}\boldsymbol{B},\\
\boldsymbol{V}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \frac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}}\boldsymbol{A} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \frac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}}\boldsymbol{B},\\
\boldsymbol{V}_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2),\\
\boldsymbol{V}_4 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_1),\\
\boldsymbol{V}_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}),\\
\boldsymbol{V}_6 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}).
\end{aligned} \tag{43}$$

Diese Vektoren erfüllen die Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\hat{a}^T\underline{\bar{E}} &= \boldsymbol{aa} : \bar{\boldsymbol{E}},\\
\hat{b}^T\underline{\bar{E}} &= \boldsymbol{bb} : \bar{\boldsymbol{E}},\\
\hat{c}^T\underline{\bar{E}} &= \boldsymbol{ab} : \bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{ba} : \bar{\boldsymbol{E}}
\end{aligned}$$

unter Ausnutzung der Symmetrie und der Null-Komponenten von $\bar{\boldsymbol{E}}$. Man erhält die reduzierte 3×3-Elastizitätsmatrix $\bar{C}$ als

$$\begin{aligned}
\bar{C} &= (\lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_a - 2\mu)\hat{a}\,\hat{a}^T + (\lambda + \alpha)(\hat{a}\,\hat{b}^T + \hat{b}\,\hat{a}^T)\\
&\quad + (\lambda + 2\mu)\hat{b}\,\hat{b}^T + 4\mu_a\hat{c}\,\hat{c}^T\\
&= \tfrac{E_a}{D}(1 - \nu^2)\,\hat{a}\,\hat{a}^T + \tfrac{E}{D}(\nu_{ab} + \nu_{ab}\nu)(\hat{a}\,\hat{b}^T + \hat{b}\,\hat{a}^T)\\
&\quad + \tfrac{E}{D}(1 - \nu_{ab}\nu_{ba})\,\hat{b}\,\hat{b}^T + 4G_a\,\hat{c}\,\hat{c}^T
\end{aligned} \tag{54}$$

(zur Umrechnung in Ingenieurskonstanten vergleiche (32)) mit

$$\begin{aligned}
\underline{\bar{T}} &= \bar{C}\underline{\bar{E}},\\
\bar{\boldsymbol{E}} : \mathfrak{C} : \bar{\boldsymbol{E}} &= \bar{\boldsymbol{E}} : \bar{\mathfrak{C}} : \bar{\boldsymbol{E}} = \underline{\bar{E}}^T\bar{C}\underline{\bar{E}}.
\end{aligned}$$

Die für das Energiefunktional irrelevante Spannungskoordinate t_{33} ergibt sich durch analoge Überlegungen als

$$\begin{aligned}
t_{33} &= \left((\lambda + \alpha)\hat{a} + \lambda\hat{b}\right)^T\underline{\bar{E}}\\
&= \left(\tfrac{E}{D}(\nu_{ab} + \nu_{ab}\nu)\hat{a} + \tfrac{E}{D}(\nu + \nu_{ab}\nu_{ba})\hat{b}\right)^T\underline{\bar{E}}.
\end{aligned}$$

7 Ebener Spannungszustand

Analog zum EVZ spricht man von einem ebenen Spannungszustand (ESZ), wenn in einer Richtung alle Spannungskomponenten gleich null sind. Wir setzen diese Richtung wieder als $\boldsymbol{e}_3$, so dass $t_{13} = t_{23} = t_{33} = 0$ gilt. Ein ESZ tritt näherungsweise auf, wenn ein Körper, der eine sehr kleine Ausdehnung in 3-Richtung relativ zu seiner Ausdehnung in der 1-2-Ebene besitzt, in Richtung der 1-2-Ebene unabhängig von der 3-Koordinate belastet wird. Da seine Oberfläche spannungsfrei ist, nimmt man auf Grund der geringen Dicke an, dass die Spannungskomponenten in 3-Richtung auch im Inneren vernachlässigbar klein sind. Wie beim EVZ kann das ursprüngliche 3D-Problem durch ein reduziertes 2D-Problem approximiert werden. Wir leiten im Folgenden die reduzierte Elastizitätsmatrix für den ESZ mit Faserverstärkung in der 1-2-Ebene her.

Wie im vorangegangenen Abschnitt benutzen wir

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b} := \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{a},$$

und

$$\bar{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{C}}_1 + \bar{\mathfrak{C}}_2 + \bar{\mathfrak{C}}_3 + \bar{\mathfrak{C}}_5.$$

Zur weiteren Vereinfachung benutzen wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_2 &= \sqrt{\tau}, \\ \phi_1 + \phi_2 &= 3\lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_a \\ &= \delta + 4(\lambda + \mu), \end{aligned}$$

welche aus (41) und (44) folgen. Man bestimmt die Anteile von $\bar{\mathfrak{C}}_1 + \bar{\mathfrak{C}}_2$ als

$$\begin{aligned} &\Big(\tfrac{1}{2}\phi_1(1 + \tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}) + \tfrac{1}{2}\phi_2(1 - \tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\Big)\boldsymbol{aaaa} \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}\Big((\phi_1 + \phi_2) + (\phi_1 - \phi_2)\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}\Big)\boldsymbol{aaaa} \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}(\delta + 4(\lambda + \mu) + \delta)\boldsymbol{aaaa} \\ &\qquad = (\lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_a - 2\mu)\boldsymbol{aaaa}, \\ &\Big(\tfrac{\sqrt{2}}{4}\phi_1\sqrt{1 - \tfrac{\delta^2}{\tau}} - \tfrac{\sqrt{2}}{4}\phi_2\sqrt{1 - \tfrac{\delta^2}{\tau}}\Big)(\boldsymbol{aabb} + \boldsymbol{bbaa}) \\ &\qquad = (\phi_1 - \phi_2)\sqrt{\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}\tfrac{\delta^2}{\tau}}(\boldsymbol{aabb} + \boldsymbol{bbaa}) \\ &\qquad = \sqrt{\tfrac{1}{8}\tau - \tfrac{1}{8}\delta^2}(\boldsymbol{aabb} + \boldsymbol{bbaa}) \\ &\qquad = \sqrt{\tfrac{1}{8}(\delta^2 + 8(\lambda + \alpha^2)) - \tfrac{1}{8}\delta^2}(\boldsymbol{aabb} + \boldsymbol{bbaa}) \\ &\qquad = (\lambda + \alpha)(\boldsymbol{aabb} + \boldsymbol{bbaa}), \\ &\Big(\tfrac{1}{4}\phi_1(1 - \tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}) + \tfrac{1}{4}\phi_2(1 + \tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\Big)\boldsymbol{bbbb} \\ &\qquad = \tfrac{1}{4}\Big((\phi_1 + \phi_2) - (\phi_1 - \phi_2)\tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau}\Big)\boldsymbol{bbbb} \\ &\qquad = \tfrac{1}{4}\Big(\delta + 4(\lambda + \mu) - \delta\Big)\boldsymbol{bbbb} \\ &\qquad = (\lambda + \mu)\boldsymbol{bbbb} \end{aligned} \tag{52}$$

und erhält

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{C}} &= \bar{\mathfrak{C}}_1 + \bar{\mathfrak{C}}_2 + \bar{\mathfrak{C}}_3 + \bar{\mathfrak{C}}_5 \\ &= (\lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_a - 2\mu)\boldsymbol{aaaa} + (\lambda + \alpha)(\boldsymbol{aabb} + \boldsymbol{bbaa}) \\ &\quad + (\lambda + \mu)\boldsymbol{bbbb} + \mu\boldsymbol{bbbb} + \mu_a(\boldsymbol{abab} + \boldsymbol{abba} + \boldsymbol{baab} + \boldsymbol{baba}) \\ &= (\lambda + 2\alpha + \beta + 4\mu_a - 2\mu)\boldsymbol{aaaa} + (\lambda + \alpha)(\boldsymbol{aabb} + \boldsymbol{bbaa}) \\ &\quad + (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{bbbb} + \mu_a(\boldsymbol{abab} + \boldsymbol{abba} + \boldsymbol{baab} + \boldsymbol{baba}). \end{aligned}$$

Aus diesem reduzierten Materialtensor lässt sich nun die reduzierte Elastizitätsmatrix für den ebenen Verzerrungszustand bestimmen. Wir verwenden wieder die Bezeichnungen aus Abschnitt 4, streichen dabei jedoch die nicht benötigten Komponenten. Analog zum reduzierten Vektor $\hat{a}$ führen wir $\hat{b}$ und $\hat{c}$ wie folgt ein,

$$\underline{\bar{E}} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \end{bmatrix},\ \underline{\bar{T}} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{12} \end{bmatrix},\ \hat{a} = \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_1 a_2 \end{bmatrix},\ \hat{b} = \begin{bmatrix} a_2^2 \\ a_1^2 \\ -a_1 a_2 \end{bmatrix},\ \hat{c} = \begin{bmatrix} -a_1 a_2 \\ a_1 a_2 \\ \frac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2) \end{bmatrix}. \tag{53}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \delta &= -\lambda + 2\alpha + \beta + 4(\mu_a - \mu), \\ \tau &= \delta^2 + 8(\lambda + \alpha)^2. \end{aligned} \tag{44}$$

Auf dem Unterraum der antisymmetrischen Tensoren zweiter Stufe besitzt $\mathfrak{C}$ drei weitere Eigenwerte,

$$\phi_7 = 2\mu,\ \phi_8 = \phi_9 = 2\mu_a, \tag{45}$$

mit den zugehörigen Eigentensoren

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_7 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_1), \\ \boldsymbol{V}_8 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}), \\ \boldsymbol{V}_9 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}), \end{aligned} \tag{46}$$

welche für die Mechanik nicht relevant sind und hier nur der Vollständigkeit halber angegeben werden. Der Tensor $\mathfrak{C}$ kann durch die Spektralzerlegung

$$\mathfrak{C} = \sum_{i=1}^{9} \phi_i\, \boldsymbol{V}_i\, \boldsymbol{V}_i$$

dargestellt werden, den aus mechanischer Sicht relevanten Anteil bildet

$$\mathfrak{C}_s := \sum_{i=1}^{6} \phi_i\, \boldsymbol{V}_i\, \boldsymbol{V}_i. \tag{47}$$

Die Inverse von $\mathfrak{C}_s$ über $\mathcal{T}_2^s$ hat die Form

$$\mathfrak{C}_s^{-1} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\phi_i}\, \boldsymbol{V}_i\, \boldsymbol{V}_i.$$

6 Ebener Verzerrungszustand

Falls in einem Körper alle Verzerrungskomponenten in einer Richtung gleich null sind, spricht man von einem ebenen Verzerrungszustand (EVZ). Wir legen diese Richtung als $\boldsymbol{e}_3$ fest, d.h. $e_{13} = e_{23} = e_{33} = 0$. Ein solcher Zustand tritt näherungsweise auf, wenn ein Körper, der eine sehr große Ausdehnung in 3-Richtung relativ zu seiner Ausdehnung in der 1-2-Ebene besitzt, in Richtung der 1-2-Ebene unabhängig von der 3-Koordinate belastet wird. Die Verzerrungskomponenten in 3-Richtung sind dabei im Vergleich zu den Verzerrungen in der 1-2-Ebene vernachlässigbar klein und werden gleich null angenommen. Das ursprüngliche 3D-Problem kann durch ein reduziertes 2D-Problem approximiert werden. Wir leiten

im Folgenden die reduzierte Elastizitätsmatrix für den EVZ mit Faserverstärkung in der 1-2-Ebene her.

Wir setzen

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b} := \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{a}, \tag{48}$$

damit ist die Menge

$$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_3\}$$

ein Rechtssystem und eine orthonormale Einheitsbasis. Für die Koordinaten von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ in der Einheitsbasis folgt

$$b_1 = -a_2, \quad b_2 = a_1, \quad b_3 = a_3 = 0.$$

Es wird vorausgesetzt, dass alle Verzerrungen in 3-Richtung gleich null sind, das heißt man arbeitet mit dem 2D-Verzerrungstensor

$$\bar{\boldsymbol{E}} \in \mathbb{V} := \operatorname{span}\left\{\boldsymbol{aa}, \boldsymbol{bb}, \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba})\right\}.$$

Daraus folgt *nicht*, dass

$$\bar{\boldsymbol{T}}_0 := \mathfrak{C} : \bar{\boldsymbol{E}}$$

aus dem gleichen Raum stammt. Allerdings ist nur die Projektion von $\bar{\boldsymbol{T}}_0$ auf $\mathbb{V}$ für das Energiefunktional relevant, da in $\bar{\boldsymbol{T}}_0 : \bar{\boldsymbol{E}}$ mit $\bar{\boldsymbol{E}} \in \mathbb{V}$ alle Anteile von $\bar{\boldsymbol{T}}_0$ außerhalb von $\mathbb{V}$ annulliert werden. Diese Projektion bezeichnen wir mit $\bar{\boldsymbol{T}}$. Im Folgenden wird unter anderem gezeigt, dass

$$\bar{\boldsymbol{T}}_0 \in \mathbb{V}_0 := \operatorname{span}\left\{\boldsymbol{aa}, \boldsymbol{bb}, \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}), \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\right\}$$

gilt, $\bar{\boldsymbol{T}}_0$ besitzt also keine Anteile im verbleibenden Raum

$$\operatorname{span}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{ae}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a}), \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{be}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b})\right\}.$$

Da das Energiefunktional nur noch von je drei statt wie im 3D-Fall von je sechs Spannungen und Verzerrungen abhängt, kann eine reduzierte 3×3-Elastizitätsmatrix verwendet werden. Diese wird aus dem reduzierten Materialtensor $\bar{\mathfrak{C}}$ mit der Eigenschaft

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \bar{\mathfrak{C}} : \bar{\boldsymbol{E}}$$

gewonnen.

Nur solche Anteile von $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}_s$, die eine der Formen

$$\boldsymbol{xyaa}, \boldsymbol{xybb}, \boldsymbol{xyab}, \boldsymbol{xyba} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \text{ beliebig}) \tag{49}$$

besitzen, werden beim doppelten Überschieben mit $\bar{\boldsymbol{E}} \in \mathbb{V}$ nicht annulliert. Nur Anteile aus

$$\begin{aligned}\mathbb{A} := \operatorname{span}\{&\boldsymbol{aaaa}, \boldsymbol{bbbb}, \boldsymbol{aabb}, \boldsymbol{bbaa},\\ &\boldsymbol{abab}, \boldsymbol{abba}, \boldsymbol{baba}, \boldsymbol{baab}\}\end{aligned} \tag{50}$$

bilden auf $\mathbb{V}$ ab und treten auf – weitere auf $\mathbb{V}$ abbildende Anteile wie z.B. $\boldsymbol{aaab}$ treten in der weiteren Betrachtung bei (51) nicht auf. Das heißt $\bar{\mathfrak{C}}$ ist die Projektion von $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}_s$ auf $\mathbb{A}$. Alle weiteren auftretenden Anteile in (51), die von einer der Formen (49) sind, bilden offenbar auf $\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\}$ ab. Aus diesen Anteilen des Materialtensors entstehen beim doppelten Überschieben mit $\bar{\boldsymbol{E}}$ die für die Verformungsenergie irrelevanten Spannungskomponenten

$$\bar{\boldsymbol{T}}_0 - \bar{\boldsymbol{T}} \in \mathbb{V}_0 \backslash \mathbb{V} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\}.$$

Um den Tensor $\bar{\mathfrak{C}}$ zu gewinnen, betrachtet man die Projektionen $\bar{\mathfrak{C}}_i$ der einzelnen Komponenten

$$\mathfrak{C}_i := \phi_i \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{V}_i$$

auf $\mathbb{A}$. Man erhält

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_6 &= 2\mu_a \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{ae}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a}) \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{ae}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a})\\
&= \mu_a(\boldsymbol{ae}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a})(\boldsymbol{ae}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a})\\
&= \mu_a(\boldsymbol{ae}_3\boldsymbol{ae}_3 + \boldsymbol{ae}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{aae}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{ae}_3\boldsymbol{a}),\\
\mathfrak{C}_5 &= 2\mu_a \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}) \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba})\\
&= \mu_a(\boldsymbol{abab} + \boldsymbol{abba} + \boldsymbol{baab} + \boldsymbol{baba}),\\
\mathfrak{C}_4 &= 2\mu \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{be}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b}) \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{be}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b})\\
&= \mu(\boldsymbol{be}_3\boldsymbol{be}_3 + \boldsymbol{be}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{bbe}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{be}_3\boldsymbol{b}),\\
\mathfrak{C}_3 &= 2\mu \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{bb} - \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3) \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{bb} - \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)\\
&= \mu(\boldsymbol{bbbb} - \boldsymbol{bbe}_3\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{bb} + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3),\\
\mathfrak{C}_{1/2} = &\quad \tfrac{1}{2}\phi_{1/2}(1 \pm \tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\boldsymbol{aaaa}\\
&\pm \tfrac{1}{2}\phi_{1/2}\sqrt{1 - \tfrac{\delta^2}{\tau}}\Big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{aa}(\boldsymbol{bb} + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{bb} + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{aa}\Big)\\
&+ \tfrac{1}{2}\phi_{1/2}(1 \mp \tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{bbbb} + \boldsymbol{bbe}_3\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{bb} + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3).
\end{aligned} \tag{51}$$

Daraus folgen die Projektionen auf $\mathbb{A}$ als

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{C}}_6 &= 0,\\
\bar{\mathfrak{C}}_5 &= \mathfrak{C}_5,\\
\bar{\mathfrak{C}}_4 &= 0,\\
\bar{\mathfrak{C}}_3 &= \mu\boldsymbol{bbbb},\\
\bar{\mathfrak{C}}_{1/2} = &\quad \tfrac{1}{2}\phi_{1/2}(1 \pm \tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\boldsymbol{aaaa} \pm \tfrac{\sqrt{2}}{4}\phi_{1/2}\sqrt{1 - \tfrac{\delta^2}{\tau}}(\boldsymbol{aabb} + \boldsymbol{bbaa})\\
&+ \tfrac{1}{4}\phi_{1/2}(1 \mp \tfrac{\delta\sqrt{\tau}}{\tau})\boldsymbol{bbbb}
\end{aligned}$$