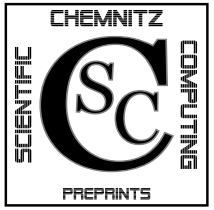
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Martina Balg Arnd Meyer

Numerische Simulation nahezu inkompressibler Materialien unter Verwendung von adaptiver, gemischter FEM

CSC/10-02



Chemnitz Scientific Computing Preprints

Chemnitz Scientific Computing Preprints – ISSN 1864-0087

Impressum:

Chemnitz Scientific Computing Preprints — ISSN 1864-0087
(1995–2005: Preprintreihe des Chemnitzer SFB393)

Herausgeber:
Professuren für
Numerische und Angewandte Mathematik
an der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Chemnitz

Postanschrift:
TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
09107 Chemnitz
Sitz:
Reichenhainer Str. 41, 09126 Chemnitz

http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Chemnitz Scientific Computing Preprints

Martina Balg Arnd Meyer

Numerische Simulation nahezu inkompressibler Materialien unter Verwendung von adaptiver, gemischter FEM

CSC/10-02

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die Simulation der Deformation von Bauteilen, welche aus nahezu inkompressiblem Material bestehen. Dabei soll sich das Material sowohl linear als auch nichtlinear elastisch verhalten können. Zusätzlich soll die Belastung des Bauteils beliebig gewählt werden können, dass heißt, es sollen kleine als auch große Deformationen möglich sein.

Diese Arbeit ist im Rahmen des Spitzentechnologieclusters „Energieeffiziente Produkt- und Prozessinnovationen in der Produktionstechnik“ (eniPROD) enstanden. eniPROD wird gefördert von der Europäischen Union aus Mitteln des Europäischen Fonds für regionale Entwicklung (EFRE) sowie aus Landesmitteln des Freistaats Sachsen.

Europa fördert Sachsen. EFRE Europäischer Fonds für regionale Entwicklung

eniPROD

CSC/10-02 ISSN 1864-0087 **June 2010**

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 3
   1.1. Inhalt . . . 3
   1.2. Notation . . . 3

2. Grundlagen 5
   2.1. Geometrie . . . 5
   2.2. Kinematik . . . 6
   2.3. Gleichgewichtsbedingung . . . 8

3. Aufgabenstellung für linear elastisches Material unter kleinen Deformationen 10
   3.1. Inkompressibilität . . . 10
   3.2. Spannungstensor . . . 11
   3.3. Gemischte Variationsformulierung . . . 12

4. Gemischte Methode der finiten Elemente 15

5. Herleitung der Fehlerschätzung 17

6. Aufgabenstellung für nichtlinear elastisches Material unter großen Deformationen 20
   6.1. Inkompressibilität . . . 20
   6.2. Kinematik . . . 20
   6.3. Spannungstensor aus der freien Energiedichte . . . 21
      6.3.1. Zerlegungsansatz nach Flory . . . 22
      6.3.2. Darstellung der Spannung und der Energiedichte . . . 23
      6.3.3. Ableitung . . . 25
   6.4. Gemischte Variationsformulierung . . . 27

7. Lösungsstrategie 31
   7.1. Newton-Verfahren . . . 31
   7.2. Newton-Gleichung . . . 32
   7.3. Gemischte Methode der finiten Elemente . . . 38

A. Anhang 41
   A.1. . . . 41
   A.2. . . . 42

Literaturverzeichnis 45

Literatur

[1] Schwab, Christoph: *p- and hp- Finite Element Methods, Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Oxford: Clarendon Press, 1998.

[2] Braess, Dietrich: *Finite Elemente; Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Berlin: Springer, 2007

[3] Meyer, Arnd: *Grundgleichungen und adaptive Finite - Elemente - Simulation bei "großen Deformationen"*. Chemnitz: Scientific Computing Preprints, 2007 (CSC/07-02)

[4] Stein, Erwin (ed.); Ramm, Ekkehard; ... [et al.]: *Error controlled adaptive finite elements in solid mechanics*. Chichester, New York [u.a.]: Wiley, 2003

[5] Verführt, Rüdiger: *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. Chichester, Stuttgart [u.a.]: Wiley-Teubner, 1996

[6] Bucher, Anke; Görke Uwe-Jens; Steinhorst, Peter; Kreissig, Reiner; Meyer, Arnd: *Ein Beitrag zur adaptiven gemischten Finite-Elemente-Formulierung der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen*. Chemnitz: Scientific Computing Preprints, 2007 (CSC/07-06)

[7] Wriggers, Peter: *Nonlinear Finite Element Methods*. Berlin, Heidelbert: Springer, 2008

[8] Rüter, Marcus; Stein, Erwin: *Analysis, finite element computation and error estimation in transversely isotropic nearly incompressible finite elasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190: 519-541, 2000

[9] Flory, P. J.: *Thermodynamic relations for high elastic materials*. Transactions of the Faraday Society, 57:829–838, 1961

[10] Meyer, Marcus: *Parameter identifcation problems for elastic large deformations - Part I: model and solution of the inverse problem*. Chemnitz: Scientific Computing Preprints, 2009 (CSC/09-05)

[11] Meyer, Arnd; Steidten, Torsten: *Improvements and Experiments on the Bramble-Psaciak Type CG for Mixed Problems in Elasticity*. Chemnitz: Preprint-Reihe des Chemnitzer SFB 393, 2001 (SFB/01-13)

Aus der Ableitung (A.2) folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_i}\right) &= \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3}\frac{\partial \iota_3}{\partial a_i}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3}\right)\frac{\partial \iota_3}{\partial a_i} + \frac{\partial \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3}\frac{\partial^2 \iota_3}{\partial a_i\,\partial a_j}\\ &= \left(\frac{\partial^2 \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3\,\partial a_j} + \frac{\partial^2 \phi_V(\iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}\frac{\partial \iota_3}{\partial a_j}\right)\frac{\partial \iota_3}{\partial a_i} + \frac{\partial \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3}\frac{\partial^2 \iota_3}{\partial a_i\,\partial a_j}. \end{aligned} \tag{A.26}$$

Die ersten und zweiten Ableitungen von $\iota_3(a_1,a_2,a_3)$ sind bereits aus (A.3) und (A.13) bekannt. Mit (A.7) gilt für die zweiten Ableitungen des Energiedichte-Anteils ϕ_V

$$\frac{\partial^2 \phi_V(\iota_3)}{\partial {\iota_3}^2} = \frac{\partial {\iota_3}^{-1}}{\partial \iota_3} = -{\iota_3}^{-2}, \tag{A.27}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3\,\partial a_j} = \frac{\partial {\iota_3}^{-1}}{\partial a_j} = 0. \tag{A.28}$$

Damit haben wir

$$\frac{\partial^2 \phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial {a_1}^2} = {\iota_2}^2\frac{\partial^2 \phi_V(\iota_3)}{\partial {\iota_3}^2} + a_1\frac{\partial \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3}, \tag{A.29}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_1\,\partial a_2} = -a_1\,\iota_2\frac{\partial^2 \phi_V(\iota_3)}{\partial {\iota_3}^2} - \frac{\partial \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3}, \tag{A.30}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_1\,\partial a_3} = \iota_2\frac{\partial^2 \phi_V(\iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}, \tag{A.31}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial {a_2}^2} = {a_1}^2\frac{\partial^2 \phi_V(\iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}, \tag{A.32}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_2\,\partial a_3} = -a_1\frac{\partial^2 \phi_V(\iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}, \tag{A.33}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial {a_3}^2} = \frac{\partial^2 \phi_V(\iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}. \tag{A.34}$$

Authors' address:

Martina Balg, Arnd Meyer
TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Numerische Mathematik
(Numerische Analysis)
Reichenhainer Straße 41
D-09126 Chemnitz

http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/num_analysis

Desweiteren finden wir wegen (A.5) sowie (A.6) die folgenden zweifachen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial a_1 \partial a_j} = \frac{\partial \left(c\, \iota_3^{-1/3} \right)}{\partial a_j} = 0, \tag{A.14}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial {\iota_3}^2} = \frac{\partial \left(-\frac{1}{3} c\, a_1\ {\iota_3}^{-\frac{4}{3}} \right)}{\partial \iota_3} = \frac{4\, c\, a_1}{9} {\iota_3}^{-\frac{7}{3}}, \tag{A.15}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial \iota_3 \partial a_j} = \frac{\partial \left(-\frac{1}{3} c\, a_1\ {\iota_3}^{-\frac{4}{3}} \right)}{\partial a_j} = \begin{cases} 0 & j = 2, 3, \\ -\frac{1}{3} c\, {\iota_3}^{-\frac{4}{3}} & j = 1. \end{cases} \tag{A.16}$$

Neben (A.14) gilt für $i = 2, 3$ auch

$$\frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial a_i \partial a_j} = 0. \tag{A.17}$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_1 \partial a_j} = {} & \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial a_1 \partial \iota_3} \frac{\partial \iota_3}{\partial a_j} + \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial \iota_3 \partial a_j} \frac{\partial \iota_3}{\partial a_1} \\ & + \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial {\iota_3}^2} \frac{\partial \iota_3}{\partial a_j} \frac{\partial \iota_3}{\partial a_1} + \frac{\partial \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial \iota_3} \frac{\partial^2 \iota_3}{\partial a_1 \partial a_j}, \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_i \partial a_j} = {} & \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial \iota_3 \partial a_j} \frac{\partial \iota_3}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial {\iota_3}^2} \frac{\partial \iota_3}{\partial a_j} \frac{\partial \iota_3}{\partial a_i} \\ & + \frac{\partial \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial \iota_3} \frac{\partial^2 \iota_3}{\partial a_i \partial a_j}, \end{aligned} \tag{A.19}$$

und unter Verwendung der Bezeichnung $\iota_2 = \iota_2(a_1, a_2)$ folgt daher

$$\frac{\partial^2 \phi_D(a_1, a_2, a_3)}{\partial {a_1}^2} = 2\, \iota_2 \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial a_1 \partial \iota_3} + {\iota_2}^2 \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial {\iota_3}^2} + a_1 \frac{\partial \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial \iota_3}, \tag{A.20}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_D(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_1 \partial a_2} = -a_1 \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial a_1 \partial \iota_3} - a_1\, \iota_2 \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial {\iota_3}^2} - \frac{\partial \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial \iota_3}, \tag{A.21}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_D(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_1 \partial a_3} = \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial a_1 \partial \iota_3} + \iota_2 \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}, \tag{A.22}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_D(a_1, a_2, a_3)}{\partial {a_2}^2} = {a_1}^2 \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}, \tag{A.23}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_D(a_1, a_2, a_3)}{\partial a_2 \partial a_3} = -a_1 \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}, \tag{A.24}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_D(a_1, a_2, a_3)}{\partial {a_3}^2} = \frac{\partial^2 \phi_D(a_1, \iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}. \tag{A.25}$$

A.2.

Mit (A.8) folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_D(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_1}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3(a_1,a_2,a_3))}{\partial a_1}+\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3(a_1,a_2,a_3))}{\partial \iota_3}\frac{\partial \iota_3}{\partial a_1}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3(a_1,a_2,a_3))}{\partial a_1}\right)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3(a_1,a_2,a_3))}{\partial \iota_3}\right)\frac{\partial \iota_3}{\partial a_1}+\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial \iota_3}\frac{\partial^2 \iota_3}{\partial a_1\,\partial a_j}.
\end{aligned}\tag{A.10}$$

Wir müssen nun beachten, dass die Ableitung $\frac{\partial}{\partial a_j}(\cdot)$ in (A.10) als vollständige Ableitung nach a_j gemeint ist und wir somit auch alle inneren Ableitung durchführen müssen. Wir erhalten deshalb

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_D(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_1}\right)&=\frac{\partial^2 \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial a_1\,\partial a_j}+\frac{\partial^2 \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial a_1\,\partial \iota_3}\frac{\partial \iota_3}{\partial a_j}\\
&\quad+\frac{\partial^2 \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial \iota_3\,\partial a_j}\frac{\partial \iota_3}{\partial a_1}+\frac{\partial^2 \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}\frac{\partial \iota_3}{\partial a_j}\frac{\partial \iota_3}{\partial a_1}\\
&\quad+\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial \iota_3}\frac{\partial^2 \iota_3}{\partial a_1\,\partial a_j}.
\end{aligned}\tag{A.11}$$

Für $i=2,3$ folgt aus (A.8) direkt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_D(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_i}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3(a_1,a_2,a_3))}{\partial \iota_3}\frac{\partial \iota_3}{\partial a_i}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3(a_1,a_2,a_3))}{\partial \iota_3}\right)\frac{\partial \iota_3}{\partial a_i}+\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial \iota_3}\frac{\partial^2 \iota_3}{\partial a_i\,\partial a_j}\\
&=\left(\frac{\partial^2 \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial \iota_3\,\partial a_j}+\frac{\partial^2 \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial {\iota_3}^2}\frac{\partial \iota_3}{\partial a_j}\right)\frac{\partial \iota_3}{\partial a_i}+\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial \iota_3}\frac{\partial^2 \iota_3}{\partial a_i\,\partial a_j}.
\end{aligned}\tag{A.12}$$

Die einfachen Ableitungen von $\iota_3(a_1,a_2,a_3)$ nach a_i sind aus (A.3) bereits bekannt. Für die zweifachen gilt

$$\frac{\partial^2 \iota_3(a_1,a_2,a_3)}{\partial {a_1}^2}=a_1,\tag{A.13a}$$

$$\frac{\partial^2 \iota_3(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_1\,\partial a_2}=-1,\tag{A.13b}$$

aber die meisten werden Null

$$\frac{\partial^2 \iota_3}{\partial a_1\,\partial a_3}=\frac{\partial^2 \iota_3}{\partial {a_2}^2}=\frac{\partial^2 \iota_3}{\partial a_2\,\partial a_3}=\frac{\partial^2 \iota_3}{\partial {a_3}^2}=0.\tag{A.13c}$$

1. Einleitung

1.1. Inhalt

Ziel dieser Arbeit ist es mittels der Methode der finiten Elemente (FEM) die Deformation eines Bauteils zu simulieren. Das Bauteil selbst soll dabei aus nahezu inkompressiblem Material bestehen, dass heißt, das Volumen des Bauteils darf sich während der Deformation nur in sehr geringem Maße verändern. Außerdem wollen wir nur elastisches Material betrachten, wobei wir sowohl lineare also nichtlineare Elastizität zulassen wollen. Die Stärke der Belastung soll jedoch beliebig sein, dass heißt wir werden kleine und große Belastungen bzw. Deformationen einbeziehen.

Im folgenden, zweiten Kapitel werden wir auf die geometrische Beschreibung des Bauteils und auf die physikalischen Größen, die seinen Zustand beeinflussen, eingehen. Daraus werden wir eine Bewegungsgleichung ableiten, mit der wir die Verschiebung $\boldsymbol{u}$ der Punkte des Bauteils bestimmen und somit die Deformation simulieren können.

Anschließend werden wir uns zuerst auf linear elastisches Material unter kleinen Deformationen einschränken. Für diesen Fall werden wir eine lineare Variationsformulierung aufstellen, durch welche die gesuchte Funktion $\boldsymbol{u}$ berechnet werden kann. Wir werden dabei auf ein Sattelpunktproblem stoßen. In den nächsten beiden Kapiteln werden wir besprechen wie die adaptive FEM auf das Problem angewendet werden kann. Dabei gehen wir auf die Diskretisierung sowie auf ein stabiles finites Element ein und wir leiten ein Fehlerfunktional her mit dem unsere Lösung bewertet werden kann und welches somit jene Elemente im FEM-Netz markieren kann, die wir verfeinern sollten.

In den folgenden Kapiteln heben wir unsere Einschränkung auf und wir wenden uns dem nichtlinear elastischem Material zu, welches auch großen Deformationen unterliegen soll. Hier werden wir eine nichtlineare Variationsformulierung herleiten, die einem Sattelpunktproblem ähnelt. Dieses können wir mit Hilfe eines Newton-Verfahrens behandeln. Innerhalb dieser Iteration werden wir auf ein lineares Sattelpunktproblem treffen, welches wir mit einer ähnlichen FEM lösen können wie zuvor. Dazu werden wir im letzten Kapitel nocheinmal auf die Wahl eines finiten Elements eingehen.

1.2. Notation

Im folgenden Kapitel 2.1 werden wir beginnen die wichtigsten Größen zur Beschreibung der mechanischen Deformation zu erläutern. Diese werden zumeist

als n-stufige Tensoren definiert sein. Den Raum dieser n-stufigen Tensoren bezeichnen wir mit $\mathbb{T}_n$. Diese Größen können bei Wahl einer speziellen Basis auch als Matrizen oder Vektoren dargestellt werden. Zur Unterscheidung (siehe Tabelle 1.1) werden wir deshalb Tensoren mit fett gedruckten Buchstaben und Matrizen bzw. Vektoren mit einfachen Buchstaben kennzeichnen. Es ist aber zu beachten das 0-stufige Tensoren immer als Skalare dargestellt werden, also immer mit einfachen Buchstaben.

$\boldsymbol{u}$	einstufiger Tensor
$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\sigma}$	zweistufiger Tensor
$\mathfrak{M}$	vierstufiger Tensor
$\vec{u}$, $\underline{u}$	Vektor
u	vektorwertige Funktion
A	Matrix

Tabelle 1.1: Bezeichnungsvarianten

Eine Ausnahme von Tabelle 1.1 bilden die Tensoren $\boldsymbol{G}_i$ sowie $\boldsymbol{G}^i$, die nur einstufig sind und trotzdem Großbuchstaben erhalten. Sonst sind fett gedruckte, große Buchstaben jedoch den zweistufigen Tensoren vorbehalten und große, fett gedruckte Fraktur-Buchstaben für vierstufige Tensoren.

Im Verlauf der weiteren Betrachtungen werden wir zunehmend auf Ableitungen von Tensoren stoßen. Davon sind besonders skalare und zweistufige Tensoren betroffen. Für einen skalaren Tensor $\zeta(\boldsymbol{A})$, der von $\boldsymbol{A} \in \mathbb{T}_2$ abhängt, ist der abgeleitete Tensor $\boldsymbol{\zeta'} = \frac{\partial \zeta(\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}}$ nun zweistufig und wir wollen ihn als jenen linearen Operator verstehen, der angewendet auf eine Richtung $\delta\boldsymbol{A} \in \mathbb{T}_2$ die Gleichung

$$\zeta(\boldsymbol{A} + \delta\boldsymbol{A}) = \zeta(\boldsymbol{A}) + \frac{\partial \zeta(\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}} : \delta\boldsymbol{A} + O(\|\delta\boldsymbol{A}\|^2) \tag{1.1}$$

erfüllt. Für zweistufige Tensoren $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{T}_2$ ist der abgeleitete Tensor $\boldsymbol{T'} = \frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}}$ vierstufig und er ist durch die Gleichung

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A} + \delta\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}) + \frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}} : \delta\boldsymbol{A} + O(\|\delta\boldsymbol{A}\|^2) \tag{1.2}$$

definiert.

A. Anhang

A.1.

Es gilt

$$\frac{\partial \phi_D(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_i} = \frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial a_i} + \frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial \iota_3}\frac{\partial \iota_3(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_i}, \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial \phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_i} = \frac{\partial \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3}\frac{\partial \iota_3(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_i} \tag{A.2}$$

mit den Ableitungen von $\iota_3 = \iota_3(a_1,a_2,a_3)$ aus (6.34)

$$\frac{\partial \iota_3}{\partial a_1} = \iota_2(a_1,a_2) = \frac{1}{2}{a_1}^2 - a_2, \tag{A.3a}$$

$$\frac{\partial \iota_3}{\partial a_2} = -a_1, \tag{A.3b}$$

$$\frac{\partial \iota_3}{\partial a_3} = 1. \tag{A.3c}$$

Durch

$$\phi_D(a_1,\iota_3) = c\left(\frac{a_1}{\iota_3(a_1,a_2,a_3)^{1/3}} - 3\right) \quad \text{und} \quad \phi_V(\iota_3) = \ln(\iota_3(a_1,a_2,a_3)) \tag{A.4}$$

nach (6.39) gilt zusätzlich

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial a_j} &= \frac{\partial}{\partial a_j}\left(c\left(\frac{a_1}{{\iota_3}^{1/3}} - 3\right)\right) = c\frac{\partial}{\partial a_j}\left(a_1\,{\iota_3}^{-1/3}\right)\\ &= \begin{cases} c\,{\iota_3}^{-1/3} & \text{für } j=1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial \iota_3} &= \frac{\partial}{\partial \iota_3}\left(c\left(\frac{a_1}{{\iota_3}^{1/3}} - 3\right)\right) = c\frac{\partial}{\partial \iota_3}\left(a_1\,{\iota_3}^{-1/3}\right)\\ &= -\frac{1}{3}c\,a_1\,{\iota_3}^{-4/3},\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3} = \frac{\partial}{\partial \iota_3}(\ln(\iota_3)) = \frac{1}{\iota_3}. \tag{A.7}$$

Schließlich erhalten wir die Ableitungen

$$\frac{\partial \phi_D(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_i} = \begin{cases} \dfrac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial a_1} + \dfrac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial \iota_3}\dfrac{\partial \iota_3}{\partial a_1} & i=1,\\ \dfrac{\partial \phi_D(a_1,\iota_3)}{\partial \iota_3}\dfrac{\partial \iota_3}{\partial a_i} & i=2,3,\end{cases} \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial \phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_i} = \frac{\partial \phi_V(\iota_3)}{\partial \iota_3}\frac{\partial \iota_3}{\partial a_i}. \tag{A.9}$$

Wir erhalten komponentenweise

$$A_{T,(\vec{\imath}(k,l),\gamma(i,j))} = a(\boldsymbol{u}, p; \Phi^{(i)}\vec{e}_j, \Phi^{(k)}\vec{e}_l)|_T, \tag{7.38a}$$
$$B_{T,(\gamma(k,l),i)} = b(\boldsymbol{u}; \Psi^{(i)}, \Phi^{(k)}\vec{e}_l)|_T, \tag{7.38b}$$
$$C_{T,(j,i)} = c(\Psi^{(i)}; \Psi^{(j)})|_T, \tag{7.38c}$$
$$R_{f,T,(\gamma(k,l))} = t\, f_0(\Phi^{(k)}\vec{e}_l)|_T - a_D(\boldsymbol{u}; \Phi^{(k)}\vec{e}_l)|_T - a_V(\boldsymbol{u}, p; \Phi^{(k)}\vec{e}_l)|_T, \tag{7.38d}$$
$$R_{g,T,(i)} = c(p; \Psi^{(i)})|_T - b_0(u; \Psi^{(i)})|_T. \tag{7.38e}$$

Dabei seien $\vec{e}_i$ wie üblich die drei Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ und $\Phi^{(i)}$ seien jene 27 triquadratischen sowie $\Psi^{(i)}$ jene 8 trilinearen Ansatzfunktionen, die auf T nicht vollständig verschwinden.

2. Grundlagen

Die folgenden Abschnitte widmen sich den grundlegenden Begriffen, welche zur Beschreibung von elastischen Deformationen notwendig sind (siehe [1] (Kap. 6), [2] (Kap. 6) und [3]). Dabei werden wir zuerst geometrische und kinematische Größen einführen und im Anschluss werden wir mit Hilfe dieser Begriffe die grundlegende Bewegungsgleichung der Deformation darstellen.

2.1. Geometrie

Wir beginnen mit der Annahme, dass das betrachtete Bauteil ein Körper K ist, der zuerst in einer Ausgangskonfiguration

$$\Omega = \Omega_0 = \left\{X(\eta) :\ \eta \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3\right\} \tag{2.1}$$

vorliegt, welche mit $\mathcal{P}$ parametrisiert werden kann. Auf diesen Körper sollen nun Kräfte wirken, die ihn deformieren und dazu führen, dass er zum Schluss des Deformationsprozesses durch

$$\Omega_\tau = \left\{x(\eta) :\ \eta \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3\right\} \tag{2.2}$$

beschrieben werden kann. Dabei ist zu beachten, dass für alle τ die parametrisierende Menge $\mathcal{P}$ gleich sein soll, dass heißt der materielle Punkt in K an der Position $X(\eta)$ soll durch die Deformation in $x(\eta)$ übergehen.

Durch diese feste Parametrisierung können wir für Ω eine covariante Tensorbasis $\boldsymbol{G}_i$ und eine contravariante Tensorbasis $\boldsymbol{G}^i$ mit

$$\boldsymbol{G}_i = \frac{\partial}{\partial \eta^i} X, \tag{2.3}$$
$$\boldsymbol{G}_i \cdot \boldsymbol{G}^j = \delta_i^j \tag{2.4}$$

und für Ω_τ die co- und contravariante Tensorbasis $\boldsymbol{g}_i$ und $\boldsymbol{g}^i$ mit

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial}{\partial \eta^i} x, \tag{2.5}$$
$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j \tag{2.6}$$

definieren. Mit diesen Tensorbasen und unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention hat der Einheitstensor $\boldsymbol{I} \in \mathbb{T}_2$ die folgende Darstellung

$$\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{G}_i \boldsymbol{G}^i = \boldsymbol{G}_i \boldsymbol{G}^i = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^i. \tag{2.7}$$

Desweiteren können wir diese einstufigen Tensoren nutzen um Operatoren in den Mengen zu beschreiben. So gilt zum Beispiel für die Gradienten die folgende Aussage

$$\text{Grad} = \boldsymbol{G}^i \frac{\partial}{\partial \eta^i} \quad \text{in } \Omega, \tag{2.8}$$

$$\text{grad} = \boldsymbol{g}^i \frac{\partial}{\partial \eta^i} \quad \text{in } \Omega_\tau, \tag{2.9}$$

oder für die Divergenz

$$\text{Div} = \text{Grad}\cdot = (\boldsymbol{G}^i \frac{\partial}{\partial \eta^i})\cdot \quad \text{in } \Omega, \tag{2.10}$$

$$\text{div} = \text{grad}\cdot \quad = (\boldsymbol{g}^i \frac{\partial}{\partial \eta^i})\cdot \quad \text{in } \Omega_\tau. \tag{2.11}$$

2.2. Kinematik

Die Deformation des Bauteils bzw. Körpers K, die Ω in Ω_τ überführt, soll durch die hinreichend glatte Funktion $\boldsymbol{\varphi}$ beschrieben werden. Es gilt

$$\boldsymbol{\varphi}: \ \Omega \to \Omega_\tau, \quad X \mapsto x. \tag{2.12}$$

Unter Verwendung des einstufigen Verschiebungstensors $\boldsymbol{u}(X)$ können wir $\boldsymbol{\varphi}(X)$ als Summe darstellen.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(X) &= x \\ &= id(X) + \boldsymbol{u}(X) \\ &= X + \boldsymbol{u}(X). \end{aligned} \tag{2.13}$$

In Tensordarstellung haben wir somit

$$\boldsymbol{u} = u^i(\eta)\, \boldsymbol{G}_i(\eta) \tag{2.14}$$

und

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial}{\partial \eta^i}(X + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{G}_i + \frac{\partial}{\partial \eta^i}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{u}_{,i}. \tag{2.15}$$

Die Darstellung (2.14) wird jedoch kaum benutzt. Wichtig ist die durch (2.15) gegebene Darstellung

$$\boldsymbol{u}_{,i}(X(\eta)) = \frac{\partial}{\partial \eta^i}\boldsymbol{u}(X(\eta)). \tag{2.16}$$

Durch die Deformation (2.13) und mit Hilfe der Tensorbasen können wir nun drei zweistufige Tensoren erklären, die zur kinematischen Beschreibung unseres

Druck elementweise trilinear angesetzt werden. Als Funktionenräume erhalten wir somit

$$\mathbb{V}_h = \{\boldsymbol{v} \ \in C(\overline{\Omega})^3 \cap H^1(\Omega)^3 : \boldsymbol{v}|_T \in \mathcal{Q}_2(T)^3 \ \ \forall\, T \in \mathcal{T}_h\}, \tag{7.32a}$$

$$\mathbb{Q}_h = \{q \ \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega) : q|_T \in \mathcal{Q}_1(T) \ \ \forall\, T \in \mathcal{T}_h\}, \tag{7.32b}$$

$$\mathbb{V}_{h,0} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_h : \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma_N} = 0\}, \tag{7.32c}$$

$$\mathbb{Q}_{h,0} = \{q \in \mathbb{Q}_h : q|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{7.32d}$$

Wir wählen passende, knotenorientierte triquadratische und trilineare Ansatzfunktionen $\Phi^{(i)}$ bzw. $\Psi^{(j)}$ und können so die Funktionen aus $\mathbb{V}_h$, $\mathbb{V}_{h,0}$, $\mathbb{Q}_h$, sowie $\mathbb{Q}_{h,0}$ durch die Zerlegungen (4.3a) bzw. (4.3b) darstellen.

Durch diesen Finite-Elemente-Raum erhalten wir das folgende diskrete Sattelpunktproblem.

Finde $(\delta\boldsymbol{u}, \delta p) \in \mathbb{V}_h \times \mathbb{Q}_h$, sodass für das gegebene Tripel

$$(t, \boldsymbol{u}, p) \in (0,1] \times \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{V}_h : \boldsymbol{u}|_{\Gamma_D} \equiv \boldsymbol{u}_0\right\} \times \mathbb{Q}_h$$

das Gleichungssystem

$$a(\boldsymbol{u}, p; \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}; \delta p, \boldsymbol{v}) = f(t, \boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}) \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_{h,0}, \tag{7.33a}$$

$$b(\boldsymbol{u}; q, \delta\boldsymbol{u}) - c(\delta p; q) = g(\boldsymbol{u}, p; q) \qquad \forall\, q \in \mathbb{Q}_{h,0} \tag{7.33b}$$

mit der Dirichlet-Randbedingung $\delta\boldsymbol{u}|_{\Gamma_D} = 0$ erfüllt ist.

Durch die Darstellung (4.3) mit

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_h \ni \delta\boldsymbol{u} &\ \leftrightarrow \ \delta\underline{u} \in \mathbb{R}^{n_{N,q}}, \\ \mathbb{Q}_h \ni \delta p &\ \leftrightarrow \ \delta\underline{p} \in \mathbb{R}^{n_{N,l}} \end{aligned} \tag{7.34}$$

kann das Problem (7.33) zu einem linearen Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Form umgeformt werden. Man erhält analog zu (4.4)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\underline{u} \\ \delta\underline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{R}_f \\ \underline{R}_g \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n_{N,q} \\ \}n_{N,l} \end{matrix}. \tag{7.35}$$

Diese System (7.35) kann wie in Abschnitt 4 mit einem BPCG-Verfahren und Vorkonditionierung gelöst werden. Dazu benötigen wir die Elementsteifigkeitsmatrix und die elementweise rechte Seite auf $T \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{bmatrix} A_T & B_T \\ {B_T}^T & -C_T \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \underline{R}_{f,T} \\ \underline{R}_{g,T} \end{bmatrix} \tag{7.36}$$

mit

$$A_T \in \mathbb{R}^{(81\times 81)}, \ B_T \in \mathbb{R}^{(81\times 8)}, \ C_T \in \mathbb{R}^{(8\times 8)}, \ \underline{R}_{f,T} \in \mathbb{R}^{81}, \ \underline{R}_{g,T} \in \mathbb{R}^{8}. \tag{7.37}$$

zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} a_D(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u};v) + a_V(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}, p+\delta p;\boldsymbol{v}) - t\, f_0(\boldsymbol{v}) \\ = -f(t,\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u},p;\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u};\delta p,\boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{7.28a}$$

und

$$\begin{aligned} b_0(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u};q) - c(p+\delta p;q) \\ = -g(\boldsymbol{u},p;q) + b(\boldsymbol{u};q,\delta\boldsymbol{u}) - c(\delta p;q). \end{aligned} \tag{7.28b}$$

Mit (7.28) können wir $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u},p,t;\boldsymbol{v},q)$ und $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v},q,\delta\boldsymbol{u},\delta p)$ aus (7.5) neu formulieren als

$$-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u},p,t;\boldsymbol{v},q) = \begin{bmatrix} f(t,\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v}) \\ g(\boldsymbol{u},p;q) \end{bmatrix} \tag{7.29}$$

und

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v},q,\delta\boldsymbol{u},\delta p) = \begin{bmatrix} a(\boldsymbol{u},p;\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u};\delta p,\boldsymbol{v}) \\ b(\boldsymbol{u};q,\delta\boldsymbol{u}) - c(\delta p;q) \end{bmatrix}. \tag{7.30}$$

Schließlich erhalten wir in jedem Newton-Schritt die Newton-Gleichung (7.5) in folgender Form.

Finde für ein gegebenes Tripel

$$(t,\boldsymbol{u},p) \in (0,1] \times \left\{\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^3 : \boldsymbol{u}|_{\Gamma_D} \equiv \boldsymbol{u}_0\right\} \times L^2(\Omega)$$

die Lösung $(\delta\boldsymbol{u},\delta p) \in H^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)$ des Gleichungssystems

$$a(\boldsymbol{u},p;\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u};\delta p,\boldsymbol{v}) = f(t,\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v}) \qquad \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0, \tag{7.31a}$$

$$b(\boldsymbol{u};q,\delta\boldsymbol{u}) - c(\delta p;q) = g(\boldsymbol{u},p;q) \qquad \forall\ q \in \mathbb{Q}_0, \tag{7.31b}$$

sodass auf Γ_D die Bedingung $\delta\boldsymbol{u} = 0$ erfüllt ist.

7.3. Gemischte Methode der finiten Elemente

Durch (7.31) ist uns ein lineares Sattelpunktproblem gegeben, welches analog zu dem Problem (3.16) ist und welches mit der gleichen, gemischten Methode gelöst werden kann, wie sie in Abschnitt 4 beschrieben wird.

Wie bei der Behandlung der linearen Elastizität, gehen wir nun davon aus, dass eine regulär Zerlegung $\mathcal{T}_h$ des Gebiets Ω mit n_T vielen Hexaeder-Elementen T und n_N vielen Knotenpunkten vorliegt. Wir wählen das stabile Taylor-Hood-Element, durch welches die Verschiebung elementweise triquadratisch und der

Problems wichtig sind. Zum einen erhält man den Deformationsgradienten $\boldsymbol{F}$, welcher durch

$$\boldsymbol{F}\ \mathrm{d}X = \mathrm{d}x \tag{2.17}$$

definiert ist. Daraus folgt

$$\boldsymbol{F}\ \frac{\partial}{\partial\eta^i} X\ \mathrm{d}\eta^i = \frac{\partial}{\partial\eta^i} x\ \mathrm{d}\eta^i, \tag{2.18}$$

$$\overset{(2.3),(2.5)}{\Leftrightarrow} \quad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}_i = \boldsymbol{g}_i, \tag{2.19}$$

$$\overset{(2.7)}{\Leftrightarrow} \quad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{g}_i\,\boldsymbol{G}^i,$$

$$\overset{(2.15)}{\Leftrightarrow} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{F} &= (\boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{u}_{,i})\,\boldsymbol{G}^i \\ &= \boldsymbol{I} + (\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u})^T \\ &= (\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{\varphi})^T. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Zusätzlich definieren wir die Determinante von $\boldsymbol{F}$ mit

$$J = \det(\boldsymbol{F}) \tag{2.21}$$

und es muss die Bedingung

$$J > 0 \tag{2.22}$$

erfüllt sein, damit die Deformation durch $\boldsymbol{\varphi}(X)$ zulässig ist. Zwei weitere wichtige Größen sind der (rechte) Cauchy-Green-Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}, \tag{2.23}$$

mit welchem lokale Längenänderungen beschrieben werden können und der Verzerrungstensor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{(\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}) + (\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u})^T + (\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u})\cdot(\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u})^T\right\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

In dem Spezialfall, dass die Tensorbasis den kartesischen Einheitsvektoren entspricht, können wir die Matrixdarstellung der Verzerrung $\boldsymbol{E}$ mit Hilfe der Formel (2.20) ermitteln und wir erhalten als skalare Komponenten

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{3} u_{k,i}\,u_{k,j}\right). \tag{2.25}$$

2.3. Gleichgewichtsbedingung

Wir gehen davon aus, dass die Deformation des Körpers K durch die Einwirkung von Kräften verursacht wird und wir nehmen zusätzlich an, dass sich der Körper nach der Derformation im Kräftegleichgewicht befindet. Die Kräfte können dabei als Flächenkräfte

$$t : \Omega_\tau \times S^2 \to \mathbb{R}^3, \quad S^2 = \left\{\vec{n} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{n}\| = 1\right\} \tag{2.26}$$

oder als deformationsunabhängig Volumenkräfte

$$f : \Omega_\tau \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = f(X) \ \text{ auf } \Omega_\tau \tag{2.27}$$

vorliegen.

Für den deformierten Körper K können wir die Gleichgewichte (2.28a) und (2.28b) aufstellen. Dabei beschreibt ρ_τ die Materialdichte von K in der Konfiguration Ω_τ und $\vec{n} \in S^2$ ist die Außennormale im Randpunkt $x \in \partial\Omega_\tau$.

$$\int_V \rho_\tau f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\partial V} t(x, \vec{n})\, \mathrm{d}s = 0 \qquad \forall\, V \subset \Omega_\tau, \tag{2.28a}$$

$$\int_V x \times f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\partial V} x \times t(x, \vec{n})\, \mathrm{d}s = 0 \qquad \forall\, V \subset \Omega_\tau. \tag{2.28b}$$

Der Satz von Cauchy (siehe [2], S.275) liefert nun die Existenz eines zweistufigen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(K)$ mit den folgenden Eigenschaften

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_\tau f = 0 \qquad \text{in } \Omega_\tau, \tag{2.29}$$

$$\vec{n}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}(x) = t(x, \vec{n}) \qquad \text{in } \Omega_\tau \times S^2, \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \qquad \text{in } \Omega_\tau. \tag{2.31}$$

Durch die Eigenschaft (2.30) kann man dem Problem eine Neumann-Randbedingung hinzufügen. Man kann sich mit g_τ eine momentane Flächenkraft vorgeben und auf einem Teil des Gebietsrandes

$$\vec{n}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}(x) = \ g_\tau(x) \qquad \forall\, x \in \Gamma_{\tau,N} \subset \partial\Omega_\tau \tag{2.32}$$

fordern. Zusätzlich kann man aber auch eine Dirichlet-Randbedingung einbringen. Man gibt sich auf dem Teil des Gebietsrandes $\Gamma_{\tau,D}$ eine Verschiebung $\boldsymbol{u}_0$ vor und fordert

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}_0(x) \qquad \forall\, x \in \Gamma_{\tau,D} \subset \partial\Omega_\tau. \tag{2.33}$$

Durch formales Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{C})}{\partial\, \boldsymbol{C}} &= \frac{\partial}{\partial\, \boldsymbol{C}} \left(2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial\, \phi_D(a_1, a_2, a_3)}{\partial\, a_i} \boldsymbol{C}^{i-1} \right) \right) \\
&= 2 \sum_{i=1}^{3} \left(\boldsymbol{C}^{i-1} \frac{\partial}{\partial\, \boldsymbol{C}} \left(\frac{\partial\, \phi_D}{\partial\, a_i} \right) + \frac{\partial\, \phi_D}{\partial\, a_i} \frac{\partial\, \boldsymbol{C}^{i-1}}{\partial\, \boldsymbol{C}} \right) \\
&= 2 \sum_{i,j=1}^{3} \left(\boldsymbol{C}^{i-1} \frac{\partial}{\partial\, a_j} \left(\frac{\partial\, \phi_D}{\partial\, a_i} \right) \frac{\partial\, a_j}{\partial\, \boldsymbol{C}} \right) + 2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial\, \phi_D}{\partial\, a_i} \frac{\partial\, \boldsymbol{C}^{i-1}}{\partial\, \boldsymbol{C}} \right) \\
&= 2 \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2\, \phi_D}{\partial\, a_i\, a_j} \boldsymbol{C}^{i-1} \boldsymbol{C}^{j-1} \right) + 2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial\, \phi_D}{\partial\, a_i} \frac{\partial\, \boldsymbol{C}^{i-1}}{\partial\, \boldsymbol{C}} \right)
\end{aligned} \tag{7.23}$$

und analog dazu

$$\frac{\partial\, \boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{C})}{\partial\, \boldsymbol{C}} = 2 \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2\, \phi_V}{\partial\, a_i\, a_j} \boldsymbol{C}^{j-1} \boldsymbol{C}^{i-1} \right) + 2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial\, \phi_V}{\partial\, a_i} \frac{\partial\, \boldsymbol{C}^{i-1}}{\partial\, \boldsymbol{C}} \right). \tag{7.24}$$

Die Ausdrücke $\boldsymbol{C}^{j-1} \boldsymbol{C}^{i-1}$ und $\frac{\partial\, \boldsymbol{C}^{i-1}}{\partial\, \boldsymbol{C}}$ sind als vierstufige Tensoren zu verstehen und es gilt

$$\frac{\partial\, \boldsymbol{C}^{i-1}}{\partial\, \boldsymbol{C}} = \begin{cases} \dfrac{\partial\, \boldsymbol{I}}{\partial\, \boldsymbol{C}} = \mathfrak{o} & \text{für } i = 1 \\ \dfrac{\partial\, \boldsymbol{C}}{\partial\, \boldsymbol{C}} = \mathfrak{I} & \text{für } i = 2 \\ \mathfrak{C} & \text{für } i = 3 \end{cases} \tag{7.25}$$

Hier ist $\mathfrak{o}$ der vierstufige Nulltensor, $\mathfrak{I}$ der vierstufige Einheitstensor und $\mathfrak{C}$ ist jener Tensor, der

$$\mathfrak{C} : \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{Y} \qquad \forall\ \boldsymbol{Y} \in \mathbb{T}_2 \tag{7.26}$$

realisiert. Die Ableitungen $\frac{\partial^2 \phi_D(a_1,a_2,a_3)}{\partial\, a_i\, a_j}$ und $\frac{\partial^2 \phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial\, a_i\, a_j}$ sind im Anhang A.2 genauer beschrieben. Wir erhalten schließlich

$$\frac{\partial\, \boldsymbol{T}_D}{\partial\, \boldsymbol{C}} = 2 \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 \phi_D}{\partial\, a_i\, a_j} \boldsymbol{C}^{j-1} \boldsymbol{C}^{i-1} \right) + 2 \frac{\partial\, \phi_D}{\partial\, a_2} \mathfrak{I} + 2 \frac{\partial\, \phi_D}{\partial\, a_3} \mathfrak{C}, \tag{7.27a}$$

$$\frac{\partial\, \boldsymbol{S}_V}{\partial\, \boldsymbol{C}} = 2 \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 \phi_V}{\partial\, a_i\, a_j} \boldsymbol{C}^{j-1} \boldsymbol{C}^{i-1} \right) + 2 \frac{\partial\, \phi_V}{\partial\, a_2} \mathfrak{I} + 2 \frac{\partial\, \phi_V}{\partial\, a_3} \mathfrak{C}. \tag{7.27b}$$

Wir kommen nun auf (7.18) zurück und lassen jetzt die hinreichend kleinen, nichtlinearen Terme fallen. Damit erhalten wir aus (7.18a) und (7.18b) die folgenden

und

$$
\begin{aligned}
& b_0(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u};q) - c(p+\delta p;q) \\
&= b_0(\boldsymbol{u};q) - c(p;q) \\
&\quad + \int_\Omega q\ \boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}\Omega - c(\delta p;q) \\
&\quad + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) + O(\|\delta p\|^2) + O(||\delta\boldsymbol{u}|| \cdot ||\delta p||).
\end{aligned} \tag{7.18b}
$$

Um die Übersichtlichkeit in (7.18) zu verbessern führen wir nun neue Bezeichnungen ein. So haben wir zum einen den Materialtensor

$$
\mathfrak{M} = p\,\frac{\partial\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{E})}{\partial\,\boldsymbol{E}} + \frac{\partial\,\boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{E})}{\partial\,\boldsymbol{E}} \tag{7.19}
$$

und zum anderen die Bi- und Linearformen

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{u},p;\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) : \mathfrak{M} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \mathrm{tr}\big((\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{v})^T \cdot (\boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u}) + p\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u})) \cdot (\mathrm{Grad}\,\delta\boldsymbol{u})\big)\ \mathrm{d}\Omega,
\end{aligned} \tag{7.20a}
$$

$$
b(\boldsymbol{u};\delta p,\delta\boldsymbol{u}) = \int_\Omega \delta p\,(\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u}))\ \mathrm{d}\Omega, \tag{7.20b}
$$

$$
c(\delta p;q) = \int_\Omega \kappa\,(\delta p \cdot q)\ \mathrm{d}\Omega, \tag{7.20c}
$$

$$
f(t,\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v}) = t\,f_0(\boldsymbol{v}) - a_D(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) - a_V(\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v}), \tag{7.20d}
$$

$$
g(\boldsymbol{u},p;q) = c(p;q) - b_0(\boldsymbol{u};q). \tag{7.20e}
$$

Für den vierstufigen Tensor $\mathfrak{M}$ gilt weiterhin

$$
\mathfrak{M} = 2\,\frac{\partial\,\boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{C})}{\partial\,\boldsymbol{C}} + 2\,p\,\frac{\partial\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{C})}{\partial\,\boldsymbol{C}}. \tag{7.21}
$$

Die beiden Summanden in (7.21) lassen sich nun durch erneutes Ableiten von (6.36) bzw. (6.40) bestimmen. Das heißt, wir haben als Ausgangspunkt die Darstellung der Spannungstensoren

$$
\boldsymbol{T}_D = 2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\,\phi_D(a_1,a_2,a_3)}{\partial\,a_i}\,\boldsymbol{C}^{i-1}\right), \tag{7.22a}
$$

$$
\boldsymbol{S}_V = 2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\,\phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial\,a_i}\,\boldsymbol{C}^{i-1}\right). \tag{7.22b}
$$

Schließlich können wir einen Körper im Gleichgewicht durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \rho_\tau\,f = 0 \qquad & \text{in } \Omega_\tau, && (2.34a)\\
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \qquad & \text{auf } \Gamma_{\tau,D}, && (2.34b)\\
\vec{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = g_\tau \qquad & \text{auf } \Gamma_{\tau,N} && (2.34c)
\end{aligned}
$$

beschreiben. Natürlich kann dabei $\Gamma_{\tau,D/N}$ eine leere Menge sein.

3. Aufgabenstellung für linear elastisches Material unter kleinen Deformationen

In den folgenden Abschnitten wenden wir uns dem linear elastischen, nahezu inkompressiblen Materialverhalten mit kleinen Deformationen zu. In diesem vereinfachten Fall können wir zur Berechnung der Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ ein lineares Materialgesetz verwenden, bei dem $\boldsymbol{\sigma}$ linear von der Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}$ abhängt und $\boldsymbol{\varepsilon}$ wiederum nur linear von der gesuchten Verschiebung $\boldsymbol{u}$ abhängt. Dies werden wir ausnutzen um eine Variationsformulierung aufzustellen, mit der wir $\boldsymbol{u}$ bestimmen können.

3.1. Inkompressibilität

Im Fall von linear elastischem Materialverhalten bedeutet die Forderung nach Inkompressibilität zum einen, dass für die Verschiebung $\boldsymbol{u}$ die Gleichung (3.1) erfüllt sein muss, dass heißt

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} \equiv 0. \tag{3.1}$$

Im Falle von nahezu inkompressiblem Material muss (3.1) nur annähernd erfüllt sein.

Zum anderen schränkt diese Forderung die Wahl des Materialparameters ν ein, der üblicherweise als Querkontraktionszahl oder Poisson-Zahl bezeichnet wird. Diese Größe gibt den Grad der Inkompressibilität des Materials an, dass heißt, sie beschreibt wie stark sich das Materialvolumen durch ein Belastung verändern würde. Üblicherweise liegt der Wert von ν zwischen 0.2 und 0.4, obwohl ganz allgemein $\nu \in \left[-1\,,\,\frac{1}{2}\right]$ gelten kann. Der Einfluss von ν auf die deformierte Gestalt eines zweidimensionalen Gebiets G_{init} soll durch die Graphik (3.1) verdeutlicht werden. Im dreidimensionalen Raum gilt ein Analogon.

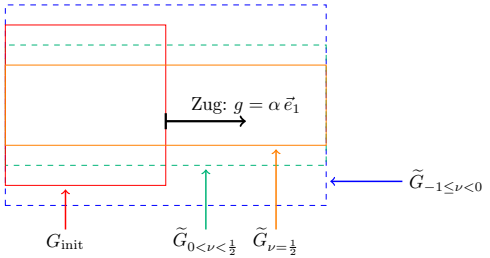


Abbildung 3.1: Deformation $\widetilde{G}_\nu$ von G_{init} unter Zugbelastung

und zuletzt

$$\begin{aligned}
&a_V(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}, p+\delta p; \boldsymbol{v}) \\
&= \int_\Omega (p+\delta p)\left(\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) + \frac{\partial\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{E})}{\partial\,\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\right) : (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{G}(\delta\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}))\ \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) \\
&= \int_\Omega p\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta p\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) : p\,\frac{\partial\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{E})}{\partial\,\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \operatorname{tr}\big((\operatorname{Grad}\boldsymbol{v})^T \cdot p\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) \cdot (\operatorname{Grad}\delta\boldsymbol{u})\big)\ \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) + O(||\delta p||\,||\delta\boldsymbol{u}||) + O(||\delta p||\,||\delta\boldsymbol{u}||^2) \\
&= a_V(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}) + a_V(\boldsymbol{u}, \delta p; \boldsymbol{v}) \\
&\quad + \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) : p\,\frac{\partial\,\boldsymbol{S}_V}{\partial\,\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \operatorname{tr}\big((\operatorname{Grad}\boldsymbol{v})^T \cdot p\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) \cdot (\operatorname{Grad}\delta\boldsymbol{u})\big)\ \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) + O(||\delta p||\,||\delta\boldsymbol{u}||).
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Wir setzen nun die Ergebnisse von (7.16) - (7.15) in (7.7) bzw. (7.6) ein und erlangen die folgenden zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
&a_D(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) + a_V(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}, p+\delta p; \boldsymbol{v}) - t\,f_0(\boldsymbol{v}) \\
&= a_D(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) + a_V(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}) - t\,f_0(\boldsymbol{v}) \\
&\quad + a_V(\boldsymbol{u}, \delta p; \boldsymbol{v}) \\
&\quad + \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) : \left(p\,\frac{\partial\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{E})}{\partial\,\boldsymbol{E}} + \frac{\partial\,\boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{E})}{\partial\,\boldsymbol{E}}\right) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \operatorname{tr}\big((\operatorname{Grad}\boldsymbol{v})^T \cdot (p\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u})) \cdot (\operatorname{Grad}\delta\boldsymbol{u})\big)\ \mathrm{d}\Omega \\
&\quad + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) + O(\|\delta p\|^2) + O(||\delta\boldsymbol{u}|| \cdot ||\delta p||)
\end{aligned} \tag{7.18a}$$

Wir können nun unser Ausgangsproblem (7.8a)-(7.8d) behandeln und erhalten

$$\begin{aligned} & b_0(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u};q) \\ &= \int_\Omega q\,\phi_V(\iota_3(\boldsymbol{u})) + q\,2\,\frac{\partial\,\phi_V}{\partial\,\boldsymbol{C}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\;\mathrm{d}\Omega + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) \\ &= b_0(\boldsymbol{u};q) + \int_\Omega q\;\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\;\mathrm{d}\Omega + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) \end{aligned} \tag{7.14}$$

und

$$\begin{aligned} c(p+\delta p;q) &= \int_\Omega \kappa(p+\delta p)\,q\;\mathrm{d}\Omega \\ &= c(p;q) + c(\delta p;q) \end{aligned} \tag{7.15}$$

sowie

$$\begin{aligned} & a_D(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}) : E(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\;\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \left(\boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u}) + \frac{\partial\,\boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{E})}{\partial\,\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\right) : (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{G}(\delta\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}))\;\mathrm{d}\Omega \\ &\quad + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\;\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{G}(\delta\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\;\mathrm{d}\Omega \\ &\quad + \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) : \frac{\partial\,\boldsymbol{T}_D}{\partial\,\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\;\mathrm{d}\Omega \\ &\quad + \int_\Omega \boldsymbol{G}(\delta\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) : \frac{\partial\,\boldsymbol{T}_D}{\partial\,\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\;\mathrm{d}\Omega \\ &\quad + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) \\ &= a_D(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) \\ &\quad + \int_\Omega \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) : \frac{\partial\,\boldsymbol{T}_D}{\partial\,\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\delta\boldsymbol{u})\;\mathrm{d}\Omega \\ &\quad + \int_\Omega \mathrm{tr}\big((\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{v})^T \cdot \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u}) \cdot (\mathrm{Grad}\,\delta\boldsymbol{u})\big)\;\mathrm{d}\Omega \\ &\quad + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) \end{aligned} \tag{7.16}$$

Da wir nahezu inkompressibles (bzw. vollständig inkompressibles) Material betrachten wollen, müssen wir folgende Wahl treffen

$$\nu = \frac{1}{2} \qquad \text{für inkompressibles Material,} \tag{3.2a}$$

$$\nu \lesssim \frac{1}{2} \qquad \text{für nahezu inkompressibles Material.} \tag{3.2b}$$

3.2. Spannungstensor

Es ist bekannt, dass im Fall linearer Elastizität das Materialgesetz

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))\;\boldsymbol{I} \\ &= 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \lambda\,\mathrm{div}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{3.3}$$

eine gute Annäherung an die Realität ist, wobei $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ den linearen Anteil der Verzerrung $\boldsymbol{E}$ beschreibt

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}(\boldsymbol{u}) + \mathrm{Grad}(\boldsymbol{u})^T). \tag{3.4}$$

Die Konstanten λ und μ sind die üblichen Lamé-Konstanten, die ihrerseits von den Materialparametern $\mathtt{E}$, dem Elastizitätsmodul, und ν abhängen. Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ist somit nur linear von der Verschiebung $\boldsymbol{u}$ abhängig.

Für Bauteile aus nahezu inkompressiblem Material kann die Gleichung (3.3) jedoch in dieser Form nicht angewendet werden, weil der Koeffizient λ mit

$$\lambda = \lambda(\mathtt{E},\,\nu) = \frac{\mathtt{E}\,\nu}{(1+\nu)(1-2\,\nu)} \tag{3.5}$$

auf Grund seiner Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl ν divergiert. Wie in (3.2) beschrieben, muss der Wert von ν nahe $\frac{1}{2}$ gewählt werden und deshalb ergibt sich

$$\lim_{\nu\to 0.5} \lambda = \frac{\mathtt{E}}{3} \lim_{\nu\to 0.5} \frac{1}{1-2\,\nu} = \frac{\mathtt{E}}{3} \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} = \infty. \tag{3.6}$$

Wir benötigen daher eine zu (3.3) äquivalente Gleichung zur Berechnung von $\boldsymbol{\sigma}$, welche die Materialkonstante λ nicht mehr enthält und somit das Divergenzproblem umgeht. Eine einfache Möglichkeit ist die Verwendung einer geeigneten Substitution, sodass der problematische Term herausfällt. Dazu führen wir durch die Definition

$$\begin{aligned} p &= \lambda\,\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) \\ &= \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) \end{aligned} \tag{3.7}$$

eine neue, skalare Variable p ein, welche wir im Weiteren als hydrostatischen Druck im Bauteil bezeichnen werden.

Nachdem wir die Substitution (3.7) auf die Gleichung (3.3) der Spannung angewendet haben, erhalten wir eine neue Formulierung

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) = 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + p\,\boldsymbol{I} \tag{3.8}$$

für $\boldsymbol{\sigma}$. Außerdem erhalten wir direkt aus (3.7) die Nebenbedingung

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{\lambda}\,p = 0. \tag{3.9}$$

3.3. Gemischte Variationsformulierung

Mit (3.8) sowie (3.9) und den Gleichungen aus (2.34) erhalten wir schließlich folgende, gemischte Aufgabenstellung zur Berechnung der Verschiebung $\boldsymbol{u}$ in linear elastischen, nahezu inkompressiblen Materialien.

> Finde die Verschiebung und den Druck $(\boldsymbol{u}, p) \in H^1(\Omega_\tau)^3 \times L^2(\Omega_\tau)$, welche
>
> $$\operatorname{div}(2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + p\,\boldsymbol{I}) + \rho_\tau\, f = 0 \qquad \text{in } \Omega_\tau, \tag{3.10a}$$
> $$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{\lambda}\,p = 0 \qquad \text{in } \Omega_\tau \tag{3.10b}$$
>
> mit den Randbedingungen
>
> $$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \qquad \text{auf } \Gamma_{\tau,D}, \tag{3.10c}$$
> $$\vec{n}_\tau \cdot \boldsymbol{\sigma} = g_\tau \qquad \text{auf } \Gamma_{\tau,N}. \tag{3.10d}$$
>
> erfüllen.

Wie in (2.34) sind die Fälle $\Gamma_{\tau,D} = \emptyset$ oder $\Gamma_{\tau,N} = \emptyset$ nicht ausgeschlossen, da es eventuell gar keine Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen gibt.

Es besteht nun das Problem, dass die Gleichungen aus (3.10) noch von einigen deformierten Größen abhängen, wie zum Beispiel dem deformierten Gebiet Ω_τ, dem deformierten Rand $\Gamma_{\tau,*}$, $\vec{n}_\tau$ oder g_τ. Diese Größen sind uns aber unbekannt, da uns nur Angaben für die undeformierte Ausgangskonfiguration vorliegen. Jedoch können wir durch die Einschränkung auf „kleine“ Deformationen die Änderungen dieser fehlenden Größen während des Deformationsprozesses als hinreichend gering ansehen. Deshalb können wir diese Größen durch ihre Ausgangsgrößen annähern. Zum Beispiel gilt

$$\Omega_\tau \approx \Omega \qquad \text{für hinreichend kleine Deformationen.}$$

tigen, dass heißt, wir müssen

$$a_D(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) : E(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega, \tag{7.8a}$$

$$a_V(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}, p + \delta p; \boldsymbol{v}) = \int_\Omega (p + \delta p)\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega, \tag{7.8b}$$

$$b_0(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}; q) = \int_\Omega \phi_V(\iota_3(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}))\, q\ \mathrm{d}\Omega, \tag{7.8c}$$

$$c(p + \delta p; q) = \int_\Omega \kappa\ (p + \delta p)\, q\ \mathrm{d}\Omega \tag{7.8d}$$

bestimmen. Dazu sollten wir zuerst die Terme der Integranden behandeln. Dass heißt, wir wollen zunächst die linearen Anteile von $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})$ sowie von $\boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u})$ und von $\phi_V(\boldsymbol{u})$ bestimmen. Mit der Taylor-Entwicklung bis zum linearen Glied erhalten wir folgende Zusammenhänge

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \delta\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}\operatorname{Grad}(\delta\boldsymbol{u}) \cdot (\operatorname{Grad}(\delta\boldsymbol{u}))^T \tag{7.9}$$

und

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) + \underbrace{\frac{1}{2}\left\{\operatorname{Grad}\boldsymbol{v} \cdot (\operatorname{Grad}\delta\boldsymbol{u})^T + \operatorname{Grad}\delta\boldsymbol{u} \cdot (\operatorname{Grad}\boldsymbol{v})^T\right\}}_{=:\boldsymbol{G}(\delta\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})} \\ &= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{G}(\delta\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}).\end{aligned} \tag{7.10}$$

Mit (7.9) folgt

$$\boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u}) + \frac{\partial\, \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{E})}{\partial\, \boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \delta\boldsymbol{u}) + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2). \tag{7.11}$$

Analog zu (7.11) folgt nun für den Tensor $\boldsymbol{S}_V$

$$\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) + \frac{\partial\, \boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{E})}{\partial\, \boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \delta\boldsymbol{u}) + O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2). \tag{7.12}$$

Zuletzt wollen wir ϕ_V linear entwickeln. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi_V(\iota_3(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u})) - \phi_V(\iota_3(\boldsymbol{u})) - O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) &= \frac{\partial\, \phi_V(\iota_3(\boldsymbol{E}))}{\partial\, \boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \delta\boldsymbol{u}) \\ &= 2\,\frac{\partial\, \phi_V}{\partial\, \boldsymbol{C}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \delta\boldsymbol{u}) \\ &= \boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \delta\boldsymbol{u}).\end{aligned} \tag{7.13}$$

Newton-Iteration	
(I1)	Wähle eine geeignete Startlösungen $(\boldsymbol{u}, p) = (\boldsymbol{u}_{\text{init}}, p_{\text{init}})$.
	Wähle einen hinreichend kleinen Faktor $t = \delta t$.
(I2)	Löse die Newton-Gleichung (7.5) nach $\delta\boldsymbol{u}$ und δp auf.
(I3)	Setze $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}$, $p = p + \delta p$.
(I4)	Ist $\frac{\|\delta\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} > \varepsilon_{\text{Tol}}$, dann wiederhole (I2)-(I4).
(I5)	Ist $t < 1$, dann setze $t = t + \delta t$, wiederhole (I2)-(I5).
(I6)	Ist $t = 1$, dann stoppe die Iteration mit der Lösung $(\boldsymbol{u}, p)$.

Die Gleichung (7.5) ergibt sich analog zu (7.2) als

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}, q, \delta\boldsymbol{u}, \delta p) = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}, p, t; \boldsymbol{v}, q) \qquad \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0,\ q \in \mathbb{Q}_0. \tag{7.5}$$

7.2. Newton-Gleichung

Im Schritt (I2) müssen wir die Newton-Gleichung (7.5) lösen. Dazu benötigen wir die Darstellung der linearen Abbildung $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}, q, \delta\boldsymbol{u}, \delta p)$. Diese ergibt sich aus der Taylor-Entwicklung von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}, p, t; \boldsymbol{v}, q)$, als erste Ableitung von $\boldsymbol{A}$ angewandt auf $(\delta\boldsymbol{u}, \delta p)$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}, p + \delta p, t; \boldsymbol{v}, q) = {}& \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}, p, t; \boldsymbol{v}, q) \\ &+ \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}, q, \delta\boldsymbol{u}, \delta p) \\ &+ O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2) + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta\boldsymbol{u}\| \cdot \|\delta p\|).\end{aligned} \tag{7.6}$$

Um $\boldsymbol{A}'$ zu bestimmen, entwickeln wir also $\boldsymbol{A}$ nach $(\delta\boldsymbol{u}, \delta p)$ und vernachlässigen alle nichtlinearen Terme $O(\|\delta p\|^2)$, $O(\|\delta\boldsymbol{u}\|^2)$ sowie $O(\|\delta\boldsymbol{u}\| \cdot \|\delta p\|)$, da sie hinreichend klein sind. Den übriggebliebenen, linearen Anteil sortieren wir danach nach $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}, q, \delta\boldsymbol{u}, \delta p)$ und $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}, p, t; \boldsymbol{v}, q)$.

Für die gesuchte Taylor-Entwicklung erhalten wir nach dem Einsetzen von (7.1) in (7.6) die Gleichung

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}, p + \delta p, t; \boldsymbol{v}, q) \\ &\quad = \begin{bmatrix} a_D(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) + a_V(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}, p + \delta p; \boldsymbol{v}) - t\, f_0(\boldsymbol{v}) \\ b_0(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}; q) - c(p + \delta p; q) \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{7.7}$$

Daraus ergibt sich, dass wir die Taylor-Entwicklungen der Bilinearformen benö-

Um nun eine Variationsformulierung unseres Problems zu erhalten, welche die Anwendung der FEM ermöglicht, gehen wir wie üblich vor. Zuerst multiplizieren wir unsere Gleichungen mit Testfunktionen $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}$ und $q \in \mathbb{Q}_0 \subset \mathbb{Q}$, wobei sich die Räume der Testfunktionen durch die Aufgabenstellung folgendermaßen ergeben

$$\mathbb{V} = H^1(\Omega)^3, \tag{3.11a}$$
$$\mathbb{Q} = L^2(\Omega), \tag{3.11b}$$
$$\mathbb{V}_0 = \left\{\boldsymbol{w} \in H^1(\Omega)^3 :\ \boldsymbol{w}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma_N} = 0\right\} = H^1_0(\Omega)^3, \tag{3.11c}$$
$$\mathbb{Q}_0 = \left\{w \in L^2(\Omega) :\ w|_{\partial\Omega} = 0\right\} = L^2_0(\Omega). \tag{3.11d}$$

Danach integrieren wir über das gesamte Gebiet Ω und wenden den Gaußschen Integralsatz an. Schließlich erhalten wir zum einen

$$\begin{aligned}0 = {}& -\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega f \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Omega \\ = {}& \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) : (\operatorname{Grad}\boldsymbol{v})^T\ \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega f \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma \vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Gamma \\ = {}& \int_\Omega 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : (\operatorname{Grad}\boldsymbol{v})^T\ \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega p\,\boldsymbol{I} : (\operatorname{Grad}\boldsymbol{v})^T\ \mathrm{d}\Omega \\ & - \int_\Omega f \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_N} g \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Gamma_N \\ = {}& \int_\Omega 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega p \cdot \operatorname{div}(\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega \\ & - \int_\Omega f \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_N} g \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Gamma_N\end{aligned} \tag{3.12}$$

also

$$\int_\Omega f \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_N} g \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Gamma_N = \int_\Omega 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega p \cdot \operatorname{div}(\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega \tag{3.13}$$

und zum anderen

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) \cdot q\ \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \frac{1}{\lambda}\, p \cdot q\ \mathrm{d}\Omega. \tag{3.14}$$

Für die bi- bzw. linearen Terme in (3.13) und (3.14) führen wir neue Bezeichnungen ein.

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega 2\,\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega, \tag{3.15a}$$

$$b(q, \boldsymbol{u}) = \int_\Omega q \cdot \operatorname{div}(\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}\Omega, \tag{3.15b}$$

$$c(p, q) = \int_\Omega \frac{1}{\lambda}\ p \cdot q\ \mathrm{d}\Omega, \tag{3.15c}$$

$$f(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega f \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_N} g \cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Gamma_N. \tag{3.15d}$$

Damit können wir das gemischte Randwertproblem der nahezu inkompressiblen, linearen Elastizität mit kleinen Deformationen formulieren. Es besteht aus der Lösung des folgenden Sattelpunktproblems (3.16).

> Finde die Verschiebung $\boldsymbol{u} \in \mathbb{V} = H^1(\Omega)^3$ und den hydrostatischen Druck $p \in \mathbb{Q} = L^2(\Omega)$, welche die Gleichungen
>
> $$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(p, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) \qquad \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0, \tag{3.16a}$$
> $$b(q, \boldsymbol{u}) - c(p, q) = 0 \qquad \forall\ q \in \mathbb{Q}_0 \tag{3.16b}$$
>
> erfüllen, mit der Dirichlet-Randbedingung
>
> $$\boldsymbol{u}(X) = \boldsymbol{u}_0(X) \qquad \forall\ X \in \Gamma_D. \tag{3.16c}$$

Diese Problem erfüllt die LBB-Bedingung und hat damit eine eindeutige Lösung.

7. Lösungsstrategie

Im folgenden Abschnitt werden wir beschreiben wie wir die Lösung unseres Problems (6.54) mit einem Newton-Verfahren bestimmen können. Dabei werden wir in jedem Newton-Schritt auf eine lineare Gleichung stoßen, die wir mit Hilfe der gemischten FEM diskretisieren werden, sodass ein lineares Gleichungssystem entsteht. Dieses wiederum können wir mit dem Bramble-Pasciak-CG lösen. Dadurch ergibt sich ein geschachteltes Iterations-Verfahren.

7.1. Newton-Verfahren

Mit (6.54) haben wir also die nichtlineare Gleichung

$$\begin{bmatrix} a_D(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) + a_V(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}) - f_0(\boldsymbol{v}) \\ b_0(\boldsymbol{u}; q) - c(p; q) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}, q) = 0, \tag{7.1}$$

die für alle $\boldsymbol{v}$ und q gelten soll und die wir nach $\boldsymbol{u}$ und p lösen müssen. Dazu bietet sich ein Newton-Verfahren an, dass heißt wir wählen eine Startlösung für $(\boldsymbol{u}, p)$ und lösen mehrmals die Gleichung

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}, q, \delta\boldsymbol{u}, \delta p) = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}, q) \qquad \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0,\ q \in \mathbb{Q}_0 \tag{7.2}$$

wobei wir jedesmal eine neue, aktualisierte Startlösung $(\boldsymbol{u}, p)$ mit

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{u} \\ \delta p \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

verwenden.

Da diese Verfahren nur lokale Konvergenz hat und wir garantieren wollen, dass wir mit unserer Startlösung (i. A. gilt $(\boldsymbol{u}_{\text{init}}, p_{\text{init}}) = (0, 0)$) zur gesuchten Lösung $(\boldsymbol{u}, p)$ konvergieren, verwenden wir inkrementelle Lastschritte. Dass heißt, wir lassen den Term $f(\boldsymbol{v})$ nur mit einem Skalierungsfaktor $t \in [\delta t, 1]$ und $0 < \delta t \leq 1$ in die Gleichung eingehen. Anstatt (7.1) betrachten wir daher die Gleichung

$$\begin{bmatrix} a_D(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) + a_V(\boldsymbol{u}, p; \boldsymbol{v}) - t\, f_0(\boldsymbol{v}) \\ b_0(\boldsymbol{u}; q) - c(p; q) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}, p, t; \boldsymbol{v}, q) = 0. \tag{7.4}$$

Der Faktor t muss zu Beginn des Newton-Verfahrens nun hinreichend klein gewählt werden und er wird im Iterationsverlauf schrittweise um δt erhöht bis $t = 1$ gilt und somit die tatsächliche Randbedingung in der Gleichung enthalten ist.

Wir führen somit folgende Newton-Iteration aus.

Wir erinnern uns, dass $\overset{2}{\boldsymbol{T}}$ mittels (6.31) zerlegt werden kann und wir führen nun für die obigen Integrale neue Bezeichnungen ein.

$$a_D(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega, \tag{6.53a}$$

$$a_V(\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v}) = \int_\Omega p\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}\Omega, \tag{6.53b}$$

$$b_0(\boldsymbol{u};q) = \int_\Omega \phi_V(\iota_3(\boldsymbol{u}))\,q\ \mathrm{d}\Omega, \tag{6.53c}$$

$$c(p;q) = \int_\Omega \kappa\ p\,q\ \mathrm{d}\Omega, \tag{6.53d}$$

$$f_0(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega f\cdot\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_N} g\cdot\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\Gamma_N. \tag{6.53e}$$

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen können wir die gemischte Randwertaufgabe der nahezu inkompressiblen, nichtlinearen Elastizität unter großen Deformationen mit Hilfe eines nichtlinearen Gleichungssystems formulieren. Man erhält das nichtlineare, Sattelpunkt-ähnliche Problem (6.54).

> Finde die Verschiebung $\boldsymbol{u} \in \mathbb{V} = H^1(\Omega)^3$ und den hydrostatischen Druck $p \in \mathbb{Q} = L^2(\Omega)$, sodass das Gleichungssystem
>
> $$\begin{aligned} a_D(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) + a_V(\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v}) &= f_0(\boldsymbol{v}) \qquad \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0, && (6.54a)\\ b_0(\boldsymbol{u};q) - \quad c(p;q) &= \quad 0 \qquad \forall\ q \in \mathbb{Q}_0 && (6.54b)\end{aligned}$$
>
> und die Dirichlet-Randbedingung
>
> $$\boldsymbol{u}(X) = \boldsymbol{u}_0(X) \qquad \forall\ X \in \Gamma_D \tag{6.54c}$$
>
> erfüllt sind.

Das Problem (6.54) ist jedoch nicht vollständig nichtlinear, dass heißt nur $\boldsymbol{u}$ geht nichtlinear in die Gleichungen ein, die anderen Variablen $\boldsymbol{v}$, q sowie p sind nur linear im System enthalten.

4. Gemischte Methode der finiten Elemente

Das Sattelpunktproblem (3.16) wollen wir nun mit Hilfe eines finiten Elements und der Funktionenräume $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$ und $\mathbb{Q}_h \subset \mathbb{Q}$ diskretisieren, wodurch ein neues Sattelpunktproblem erzeugt wird.

Dazu nehmen wir an, dass eine reguläre Zerlegung $\mathcal{T}_h$ unseres Gebiets $\Omega \in \mathbb{R}^3$ mit n_T vielen Hexaeder-Elementen T und n_N vielen Knotenpunkten vorliegt. Wir entscheiden uns für das stabile Taylor-Hood-Element als finites Element und haben daher folgende, diskretisierungsabhängige Räume

$$\mathbb{V}_h = \left\{\boldsymbol{v}\ \in C(\overline{\Omega})^3 \cap H^1(\Omega)^3 : \boldsymbol{v}|_T \in \mathcal{Q}_2(T)^3\ \ \forall\ T \in \mathcal{T}_h\right\}, \tag{4.1a}$$

$$\mathbb{Q}_h = \left\{q\ \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega) : q|_T \in \mathcal{Q}_1(T)\ \ \forall\ T \in \mathcal{T}_h\right\} \tag{4.1b}$$

und für die Testfunktionen

$$\mathbb{V}_{h,0} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_h : \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma_N} = 0\}, \tag{4.1c}$$

$$\mathbb{Q}_{h,0} = \{q \in \mathbb{Q}_h : q|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{4.1d}$$

Das diskretisierte Sattelpunktproblem lautet somit:

> Finde $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \mathbb{V}_h \times \mathbb{Q}_h$ welche,
>
> $$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}) + b(p_h,\boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{v}) \qquad \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_{h,0}, && (4.2a)\\ b(q,\boldsymbol{u}_h) - \ c(p_h,q) &= \quad 0 \qquad \forall\ q \in \mathbb{Q}_{h,0} && (4.2b)\end{aligned}$$
>
> mit der Dirichlet-Randbedingung
>
> $$\boldsymbol{u}_h(X) = \boldsymbol{u}_0(X) \qquad \forall\ X \in \Gamma_D \tag{4.2c}$$
>
> erfüllen.

Auch dieses diskretisierte Problem erfüllt die LBB-Bedingung.

Die Wahl (4.1) ist ein gemischter Ansatz, denn die Funktionen aus $\mathbb{V}_h$ bzw. aus $\mathbb{V}_{h,0}$ werden elementweise triquadratisch und die Funktionen aus $\mathbb{Q}_h$ bzw. $\mathbb{Q}_{h,0}$ werden elementweise trilinear angesetzt. Unter Verwendung von passenden triquadratischen und trilinearen, knotenorientierten Ansatzfunktionen $\Phi^{(i)}$ bzw. $\Psi^{(i)}$ sowie $\vec{e}_j$ als j-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$ lassen sich die Testfunktionen mittels einer Zerlegung darstellen.

$$\boldsymbol{v}(X) = \begin{pmatrix} v_1(X)\\ v_2(X)\\ v_3(X)\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{N,q}} \begin{pmatrix} v_1^{(i)}\\ v_2^{(i)}\\ v_3^{(i)}\end{pmatrix} \Phi^{(i)}(X) = \sum_{i=1}^{n_{N,q}}\sum_{j=1}^{3} v_j^{(i)}\Phi^{(i)}(X)\vec{e}_j \tag{4.3a}$$

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n_{N,l}} q^{(i)}\Psi^{(i)}(X) \tag{4.3b}$$

Eine Testfunktion $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_h$, $\mathbb{V}_{h,0}$ ist somit durch $n_{N,q}$ Funktionswerte, und eine Testfunktion $q \in \mathbb{Q}_h$, $\mathbb{Q}_{h,0}$ durch $n_{N,l}$ Funktionswerte gegeben. Auf jedem einzelnen Element T hingegen ist $\boldsymbol{v}$ jedoch schon durch 27 Knoten-Funktionswerte und q bereits durch 8 Knoten-Funktionswerte bestimmt. Mit Hilfe der Koeffizienten in (4.3) wird jeder Funktion $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_h$ bzw. $q \in \mathbb{Q}_h$ ein Vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^{n_{N,q}}$ bzw. $\underline{p} \in \mathbb{R}^{n_{N,l}}$ zugeordnet.

Bekannterweise sind die Gleichungen (4.2a) und (4.2b) genau dann für alle Testfunktionen $\boldsymbol{v}$ bzw. q erfüllt, wenn sie bereits für alle Ansatzfunktionen $\Phi^{(i)}$ bzw. $\Psi^{(j)}$ aus (4.3) erfüllt sind. Durch diese Bedingung erhalten wir $n_{N,q} + n_{N,l}$ Gleichungen. Weiterhin können wir den Ansatz (4.3) auch für $\boldsymbol{u}_h$ und p_h einsetzen. Dies überführt das System (4.2) in ein lineares Gleichungssystem, welches wir in Matrix-Vektor-Form darstellen können. Wir schreiben

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{R} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n_{N,q} \\ \}n_{N,l} \end{matrix} . \tag{4.4}$$

Dabei sind $\underline{u}$ und $\underline{p}$ die Vektoren der Koeffizienten $u_j^{(i)}$ bzw. $p^{(i)}$, die aus der Darstellung von u_h bzw. p_h über den Ansatz (4.3) resultieren.

Das System (4.4) kann durch ein Bramble-Pasciak-Konjugierte-Gradienten-Verfahren (BPCG-Verfahren) mit Vorkonditionierung gelöst werden (siehe [11]). Dazu muss jedoch für jedes Element $T \in \mathcal{T}_h$ die Elementsteifigkeitsmatrix und die rechte Seite

$$\begin{bmatrix} A_T & B_T \\ {B_T}^T & -C_T \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \underline{R}_T \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

mit

$$A_T \in \mathbb{R}^{(81\times 81)},\ B_T \in \mathbb{R}^{(81\times 8)},\ C_T \in \mathbb{R}^{(8\times 8)},\ \underline{R}_T \in \mathbb{R}^{81} \tag{4.6}$$

aufgebaut werden. Rein formal gilt

$$\underline{R}_T = \left[f(\Phi^{(i)}\vec{e}_j)|_T \right]_{(i,j)=(1,1)}^{(27,3)}, \tag{4.7a}$$

$$A_T = \left[a(\Phi^{(k)}\vec{e}_l, \Phi^{(i)}\vec{e}_j)|_T \right]_{(i,j),(k,l)=(1,1)}^{(27,3)}, \tag{4.7b}$$

$$B_T = \left[b(\Psi^{(k)}, \Phi^{(i)}\vec{e}_j)|_T \right]_{(i,j),k=(1,1),1}^{(27,3),8}, \tag{4.7c}$$

$$C_T = \left[c(\Psi^{(k)}, \Psi^{(i)})|_T \right]_{k,i=1}^{8} \tag{4.7d}$$

für alle $\Phi^{(i)}|_T \not\equiv 0 \wedge \Psi^{(j)}|_T \not\equiv 0$, also $i = 1, \ldots, 27$ und $j = 1, \ldots, 8$.

Das dritte Teilintegral in (6.45) lässt sich zu folgendem Ausdruck umformen.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\tau} \vec{n}_\tau \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma_\tau &= \int_{\Gamma_{\tau,N}} \vec{n}_\tau \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma_{\tau,N} \\ &= \int_{\Gamma_N} J \, \vec{n}_\tau \cdot \frac{1}{J} (\boldsymbol{F} \overset{1}{\boldsymbol{T}}) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma_N \\ &= \int_{\Gamma_N} \vec{n} \cdot \overset{1}{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma_N \\ &= \int_{\Gamma_N} g \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma_N. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Zuletzt erhalten wir mit (6.47), $f(x) = f(X)$ und der Annahme $\rho = 1$ aus dem zweiten Teilintegral die Gleichung

$$\int_{\Omega_\tau} \rho_\tau \, f \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Omega_\tau = \int_{\Omega} f \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Omega. \tag{6.50}$$

Die zweite Gleichung (6.44b) lässt sich leichter behandeln. Mit $0 < J \approx 1$ aus (2.22) ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\tau} (\phi_V(\iota_3) - \kappa\, p) \cdot q \, \mathrm{d}\Omega_\tau \\ &= \int_{\Omega} J \ (\phi_V(\iota_3) - \kappa\, p) \cdot q \, \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} \phi_V(\iota_3)\, q \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \kappa \, p\, q \, \mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Zusammen erhalten wir also aus (6.44a) und (6.44b) die folgende neue Formulierung

$$\int_{\Omega} f \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_N} g \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma_N = \int_{\Omega} \overset{2}{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}, p) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\Omega \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0, \tag{6.52a}$$

$$0 = \int_{\Omega} \phi_V(\iota_3(\boldsymbol{u}))\, q \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \kappa \, p\, q \, \mathrm{d}\Omega \qquad \forall q \in \mathbb{Q}_0. \tag{6.52b}$$

Mit dem Integralsatz von Gauß folgt aus (6.44a) die Gleichung

$$\int_{\Omega_\tau} \boldsymbol{\sigma} : (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^T \, \mathrm{d}\Omega_\tau = \int_{\Omega_\tau} \rho_\tau \, f \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Omega_\tau + \int_{\Gamma_\tau} \vec{n}_\tau \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma_\tau \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0 \tag{6.45}$$

Im Gegensatz zur Betrachtung kleiner Deformationen, können wir nun die deformierten Größen, wie zum Beispiel Ω_τ oder $\Gamma_{\tau,*}$, nicht durch die Ausgangsgrößen approximieren. Mit Hilfe von J können wir die Werte jedoch recht einfach transformieren, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega_\tau &= [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3] \, \mathrm{d}\eta^1 \mathrm{d}\eta^2 \mathrm{d}\eta^3 \\ &= [\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}_3] \, \mathrm{d}\eta^1 \mathrm{d}\eta^2 \mathrm{d}\eta^3 \\ &= \det \boldsymbol{F} [\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_3] \, \mathrm{d}\eta^1 \mathrm{d}\eta^2 \mathrm{d}\eta^3 \\ &= J \, \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{6.46}$$

mit dem Spatprodukt $[\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,]$, oder

$$\rho_\tau = J \, \rho. \tag{6.47}$$

Mit $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})$ aus (6.6), der Transformation (6.46) und der Symmetrie von $\overset{2}{\boldsymbol{T}}$ folgt für das erste Teilintegrale in (6.45)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\tau} \boldsymbol{\sigma} : (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^T \, \mathrm{d}\Omega_\tau &= \int_{\Omega} J \, \boldsymbol{\sigma} : (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^T \, \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{F} \cdot \overset{2}{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{F}^T) : (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^T \, \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\overset{2}{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{F}^T) : (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^T \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\overset{2}{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{F}^T) : (\operatorname{Grad} \boldsymbol{v})^T \, \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} \overset{2}{\boldsymbol{T}} : \boldsymbol{F}^T \cdot \operatorname{Grad}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} \overset{2}{\boldsymbol{T}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{6.48}$$

5. Herleitung der Fehlerschätzung

Zur Steuerung der adaptiven Netzverfeinerung wird eine Größe benötigt auf deren Basis entschieden werden kann auf welchen Elementen T die Lösung $\boldsymbol{u}_h$ im Vergleich zu den restlichen Elementen einen großen Fehler hat und welche Elemente somit verfeinert werden müssen. Wir betrachten dazu das folgende Fehlerfunktional

$$J(e_p, e_{\boldsymbol{u}}) = \frac{a(e_{\boldsymbol{u}}, e_{\boldsymbol{u}}) + c(e_p, e_p)}{\sqrt{a_0(e_{\boldsymbol{u}}, e_{\boldsymbol{u}}) + c_0(e_p, e_p)}}. \tag{5.1}$$

Die Fehler $e_{\boldsymbol{u}}$ und e_p in (5.1) sind durch

$$e_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \tag{5.2a}$$
$$e_p = p - p_h \tag{5.2b}$$

als Differenz zwischen der exakten Lösung und der Näherungslösung definiert. Die neuen Bilinearformen $a_0(e_{\boldsymbol{u}}, e_{\boldsymbol{u}})$ und $c_0(e_p, e_p)$ sind äquivalent zu Quadraten der H^1- bzw. L^2-Norm und werden später in (5.17) bzw. (5.18) definiert.

Wir betrachten nun den Zähler von $J(e_p, e_{\boldsymbol{u}})$ aus (5.1) und erhalten

$$\begin{aligned} Z &= a(e_{\boldsymbol{u}}, e_{\boldsymbol{u}}) + c(e_p, e_p) \\ &= a(e_{\boldsymbol{u}}, e_{\boldsymbol{u}}) + b(e_p, e_{\boldsymbol{u}}) - b(e_p, e_{\boldsymbol{u}}) + c(e_p, e_p). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Desweiteren führen wir zwei Projektoren $I_{h,2} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}_h$ sowie $I_{h,1} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_h$ ein. Unter Verwendung dieser Projektoren definieren wir die zwei Funktionen

$$\boldsymbol{v} = e_{\boldsymbol{u}} - I_{h,2} \, e_{\boldsymbol{u}}, \tag{5.4a}$$
$$q = e_p - I_{h,1} \, e_p, \tag{5.4b}$$

welche wir nun in (5.3) einsetzen können. Mit der Darstellung der Bilinearformen in (3.15) und durch die Galerkin-Orthogonalität erhalten wir für Z den Ausdruck

$$\begin{aligned} Z &= a(e_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) + b(e_p, \boldsymbol{v}) - (b(q, e_{\boldsymbol{u}}) - c(q, e_p)) \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(e_{\boldsymbol{u}}, e_p) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} q \left(\operatorname{div}(e_{\boldsymbol{u}}) - \frac{1}{\lambda} e_p \right) \, \mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Durch die Gebietszerlegung $\mathcal{T}_h$ von Ω folgt

$$Z = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \boldsymbol{\sigma}(e_{\boldsymbol{u}}, e_p) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}T - \int_T q \left(\operatorname{div}(e_{\boldsymbol{u}}) - \frac{1}{\lambda} e_p \right) \, \mathrm{d}T \right). \tag{5.6}$$

Mit der Anwendung des Gaußschen Integralsatzes haben wir

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_T \left(\sum_{F\subset\partial T} \left(\int_F \vec{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(e_{\boldsymbol{u}}, e_p))\cdot \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}F \right) - \int_T \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(e_{\boldsymbol{u}}, e_p))\ \mathrm{d}T \right) \\
&\quad - \sum_T \int_T q \left(\operatorname{div}(e_{\boldsymbol{u}}) - \frac{1}{\lambda} e_p \right)\ \mathrm{d}T \\
&= \sum_T \left(\int_T \boldsymbol{v}\cdot(\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_h, p_h)) + f)\ \mathrm{d}T + \sum_{F\subset\partial T} \left(\int_F \boldsymbol{v}\cdot r_F\ \mathrm{d}F \right) \right) \\
&\quad + \sum_T \int_T q \left(\operatorname{div}(\boldsymbol{u}_h) - \frac{1}{\lambda} p_h \right)\ \mathrm{d}T \qquad (5.7) \\
&= \sum_T \left(\langle \boldsymbol{v}, r_T\rangle_{L_2(T)} + \langle q, r_p\rangle_{L_2(T)} + \sum_{F\subset\partial T} \langle \boldsymbol{v}, r_F\rangle_{L_2(F)} \right). \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

Die Terme r_T, r_F und r_p in (5.8) werden durch (5.7) folgendermaßen definiert.

$$
\begin{aligned}
r_T &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_h, p_h)) + f, && (5.9)\\
r_p &= \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_h) - \frac{1}{\lambda} p_h, && (5.10)\\
r_F &= \begin{cases} 0 & \text{für } F\subset\Gamma_D, \\ g - \vec{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_h) & \text{für } F\subset\Gamma_N, \\ \frac{1}{2}\left((\vec{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_h))|_{T_1} + (\vec{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_h))|_{T_2}\right) & \text{für } F = \partial T_1\cap\partial T_2. \end{cases} && (5.11)
\end{aligned}
$$

Wir können nun (5.8) mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung nach oben abschätzen.

$$
Z \le \sum_T \left(\|\boldsymbol{v}\|_{L_2(T)} \|r_T\|_{L_2(T)} + \|q\|_{L_2(T)} \|r_p\|_{L_2(T)} + \sum_F \|\boldsymbol{v}\|_{L_2(F)} \|r_F\|_{L_2(F)} \right) \qquad (5.12)
$$

Die Projektoren $I_{h,2}$ und $I_{h,1}$ können so gewählt werden, dass für T mit einer gewissen Umgebung $\widetilde{T}$ sowie für F mit einer gewissen Umgebung $\widetilde{F}$ die folgenden Interpolationsabschätzungen

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}\|_{L_2(T)} &= \|e_{\boldsymbol{u}} - I_{h,2}\, e_{\boldsymbol{u}}\|_{L_2(T)} \le c_1\ h_T\ |e_{\boldsymbol{u}}|_{H^1(\widetilde{T})} && (5.13a)\\
\|\boldsymbol{v}\|_{L_2(F)} &= \|e_{\boldsymbol{u}} - I_{h,2}\, e_{\boldsymbol{u}}\|_{L_2(F)} \le c_2\ h_T^{\frac{1}{2}}\ |e_{\boldsymbol{u}}|_{H^1(\widetilde{F})} && (5.13b)\\
\|q\|_{L_2(T)} &= \|e_p - I_{h,1}\, e_p\|_{L_2(T)} \le c_3\ h_T^{\alpha}\ \|e_p\|_{L_2(\widetilde{T})} && (5.13c)
\end{aligned}
$$

6.4. Gemischte Variationsformulierung

Mit Hilfe der Gleichungen (6.5), (6.31) und (6.40), welche die Berechnung des Spannungstensors ermöglichen, und durch die Nebenbedingung (6.28) erhalten wir nun aus den Gleichungen (2.29) - (2.34) die Formulierung unseres Problems mittels Differentialgleichungen.

Finde die Verschiebung und den Druck $(\boldsymbol{u}, p) \in H^1(\Omega_\tau)^3 \times L^2(\Omega_\tau)$, welche

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) + \rho_\tau\, f = 0 \qquad & \text{in } \Omega_\tau, && (6.41a)\\
\phi_V(\iota_3) - \kappa\, p = 0 \qquad & \text{in } \Omega_\tau && (6.41b)
\end{aligned}
$$

erfüllen, mit

$$
\begin{aligned}
J\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) &= \boldsymbol{F}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}, p)\cdot\boldsymbol{F}^T \\
&= \boldsymbol{F}\cdot\left\{\boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u}) + p\,\boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u})\right\}\cdot\boldsymbol{F}^T \qquad \text{in } \Omega_\tau, && (6.41c)\\
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_0 \qquad \text{auf } \Gamma_{\tau,D}, && (6.41d)\\
\vec{n}_\tau\cdot\overset{1}{\boldsymbol{T}} &= g_\tau \qquad \text{auf } \Gamma_{\tau,N}. && (6.41e)
\end{aligned}
$$

Je nach Aufgabenstellung können $\Gamma_{\tau,D}$ und $\Gamma_{\tau,N}$ leere Mengen sein.

Um die Methode der finiten Elemente auf (6.41) anwenden zu können, benötigen wird die gemischte Variationsformulierung des Problems. Dazu multiplizieren wir mit Testfunktionen $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0$ bzw. $q \in \mathbb{Q}_0$ und integrieren über das gesamte, gegebene Gebiet. Als passende Räume wählen wir wie in Kapitel 3.3

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V} &= H^1(\Omega)^3, && (6.42a)\\
\mathbb{Q} &= L^2(\Omega), && (6.42b)\\
\mathbb{V}_0 &= \{\boldsymbol{v}\in\mathbb{V} :\ \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma_N} = 0\}, && (6.42c)\\
\mathbb{Q}_0 &= \{q\in\mathbb{Q} :\ q|_{\partial\Omega} = 0\}. && (6.42d)
\end{aligned}
$$

Dabei ist zu beachten, dass durch die Parametrisierung von Ω_τ für alle $\tau \ge 0$ mit $\mathcal{P}$ die folgenden Raumgleichheiten gelten.

$$
\begin{aligned}
H^1(\Omega_\tau)^3 &= H^1(\Omega)^3, && (6.43a)\\
L^2(\Omega_\tau) &= L^2(\Omega). && (6.43b)
\end{aligned}
$$

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\tau} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega_\tau} \rho_\tau\, f\cdot\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}x = 0 \qquad & \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0 && (6.44a)\\
\int_{\Omega_\tau} (\phi_V(\iota_3) - \kappa\, p)\cdot q\ \mathrm{d}x = 0 \qquad & \forall q\in\mathbb{Q}_0 && (6.44b)
\end{aligned}
$$

Mit (6.34) kann man die Funktionen ϕ_D und ϕ_V umformulieren, sodass sie nur noch von a_i abhängen. Laut (6.24) erhalten wir für ϕ

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{C}) &= \phi_D(a_1 \cdot \iota_3^{-1/3}) + \frac{1}{2}\,\mathtt{K}\,{\phi_V}^2(\iota_3) \\ &= \phi_D(a_1, \iota_3(a_1,a_2,a_3)) + \frac{1}{2}\,\mathtt{K}\,{\phi_V}^2(\iota_3(a_1,a_2,a_3)) \\ &= \phi_D(a_1,a_2,a_3) + \frac{1}{2}\,\mathtt{K}\,{\phi_V}^2(a_1,a_2,a_3).\end{aligned} \tag{6.35}$$

Nach Einsetzten von (6.34) in (6.35) bezeichnen wir beide Funktionen wieder mit $\phi_D(a_1,a_2,a_3)$ und $\phi_V(a_1,a_2,a_3)$.

Die Ableitung von $\phi_D(\boldsymbol{C})$ bzw. $\phi_V(\boldsymbol{C})$ nach $\boldsymbol{C}$ können nun als Tensoren 2. Stufe aus (6.35) unter Anwendung der Kettenregel bestimmt werden. Es gilt

$$\boldsymbol{T}_D = 2\,\frac{\partial\,\phi_D(\boldsymbol{C})}{\partial\,\boldsymbol{C}} = 2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\,\phi_D(a_1,a_2,a_3)}{\partial\,a_i}\frac{\partial\,a_i}{\partial\,\boldsymbol{C}}\right) \tag{6.36a}$$

und

$$\boldsymbol{S}_V = 2\,\frac{\partial\,\phi_V(\boldsymbol{C})}{\partial\,\boldsymbol{C}} = 2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\,\phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial\,a_i}\frac{\partial\,a_i}{\partial\,\boldsymbol{C}}\right). \tag{6.36b}$$

Die hinteren Ableitungen $\frac{\partial\,a_i}{\partial\,\boldsymbol{C}} \in \mathbb{T}_2$ können wir, wie in [10] beschrieben ist, mit Hilfe einer Taylorentwicklung bestimmen. Wir erhalten stets

$$\frac{\partial\,a_i(\boldsymbol{C})}{\partial\,\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}^{i-1}. \tag{6.37}$$

Die anderen Ableitungen

$$\frac{\partial\,\phi_D(a_1,a_2,a_3)}{\partial\,a_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\,\phi_V(a_1,a_2,a_3)}{\partial\,a_i} \quad \text{für } i=1,2,3 \tag{6.38}$$

hängen dagegen immer von der verwendeten Materialfunktion für die spezifische Verzerrungs-Energiedichte ϕ ab. Auf Grund unserer Wahl der Materialfunktion

$$\phi(\boldsymbol{C}) = c\left(\frac{a_1}{\iota_3(a_1,a_2,a_3)^{1/3}} - 3\right) + \frac{1}{2}\mathtt{K}\,\ln(\iota_3(a_1,a_2,a_3))^2 \tag{6.39}$$

nach (6.26) erhalten wir für (6.38) einfache Ausdrücke (siehe A.1). Insgesamt ergibt sich

$$\boldsymbol{T}_D = 2\,\frac{\partial\,\phi_D}{\partial\,a_1}\boldsymbol{I} + 2\,\frac{\partial\,\phi_D}{\partial\,a_2}\boldsymbol{C} + 2\,\frac{\partial\,\phi_D}{\partial\,a_3}\boldsymbol{C}^2, \tag{6.40a}$$

$$\boldsymbol{S}_V = 2\,\frac{\partial\,\phi_V}{\partial\,a_1}\boldsymbol{I} + 2\,\frac{\partial\,\phi_V}{\partial\,a_2}\boldsymbol{C} + 2\,\frac{\partial\,\phi_V}{\partial\,a_3}\boldsymbol{C}^2. \tag{6.40b}$$

gelten (siehe [5] oder [4], S. 216). Wählt man für beide den Clément-Interpolationsoperator, so gilt $\alpha = 0$. Mit den Abschätzungen (5.13) folgt aus (5.12)

$$\begin{aligned}Z \le c_{\max}\sum_T\Bigg(&\frac{h_T}{\sqrt{2\mu}}\,\|r_T\|_{L_2(T)}\,\sqrt{2\mu}|e_{\boldsymbol{u}}|_{H^1(\widetilde{T})} + {h_T}^{\alpha}\,\|e_p\|_{L_2(\widetilde{T})}\,\|r_p\|_{L_2(T)} \\ &+ \sum_F \frac{{h_T}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\mu}}\,\|r_F\|_{L_2(F)}\,\sqrt{2\mu}|e_{\boldsymbol{u}}|_{H^1(\widetilde{F})}\Bigg).\end{aligned} \tag{5.14}$$

Unter erneuter Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}Z &\le c_{\max}\left\{\sum_T\left(\tfrac{{h_T}^2}{2\mu}\,\|r_T\|^2_{L_2(T)} + {h_T}^{2\alpha}\,\|r_p\|^2_{L_2(T)} + \sum_F\tfrac{h_T}{2\mu}\,\|r_F\|^2_{L_2(F)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\cdot\left\{\sum_T\left(2\mu\,|e_{\boldsymbol{u}}|^2_{H^1(\widetilde{T})} + \|e_p\|^2_{L_2(\widetilde{T})} + \sum_F 2\mu\,|e_{\boldsymbol{u}}|^2_{H^1(\widetilde{F})}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (5.15) \\ &\le c\left\{\sum_T\left(\tfrac{{h_T}^2}{2\mu}\,\|r_T\|^2_{L_2(T)} + {h_T}^{2\alpha}\,\|r_p\|^2_{L_2(T)} + \sum_F\tfrac{h_T}{2\mu}\,\|r_F\|^2_{L_2(F)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\cdot\left\{2\mu\,|e_{\boldsymbol{u}}|^2_{H^1(\Omega)} + \|e_p\|^2_{L_2(\Omega)}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (5.16)\end{aligned}$$

Für den zweiten Faktor in (5.16) gilt

$$\begin{aligned}2\mu\,|e_{\boldsymbol{u}}|^2_{H^1(\Omega)} &\le \int_\Omega 2\mu\,\mathrm{Grad}(e_{\boldsymbol{u}})^T : \mathrm{Grad}(e_{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{d}\Omega \\ &=: a_0(e_{\boldsymbol{u}}, e_{\boldsymbol{u}})\end{aligned} \tag{5.17}$$

und

$$\begin{aligned}\|e_p\|^2_{L_2(\Omega)} &= \int_\Omega e_p\cdot e_p\,\mathrm{d}\Omega \\ &=: c_0(e_p,e_p) = \lambda\; c(e_p,e_p).\end{aligned} \tag{5.18}$$

Durch Einsetzen erhalten wir nun

$$\begin{aligned}Z \le c&\left\{\sum_T\left(\tfrac{{h_T}^2}{2\mu}\,\|r_T\|^2_{L_2(T)} + {h_T}^{2\alpha}\,\|r_p\|^2_{L_2(T)} + \sum_F\tfrac{h_T}{2\mu}\,\|r_F\|^2_{L_2(F)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot\left\{a_0(e_{\boldsymbol{u}},e_{\boldsymbol{u}}) + c_0(e_p,e_p)\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Setzen wir nun diese Abschätzung des Zählers in (5.1) ein, so folgt

$$J(e_{\boldsymbol{u}},e_p) \le c\sqrt{\sum_T\left(\tfrac{{h_T}^2}{2\mu}\,\|r_T\|^2_{L_2(T)} + {h_T}^{2\alpha}\,\|r_p\|^2_{L_2(T)} + \sum_F\tfrac{h_T}{2\mu}\,\|r_F\|^2_{L_2(F)}\right)}. \tag{5.20}$$

6. Aufgabenstellung für nichtlinear elastisches Material unter großen Deformationen

Wir wollen uns nun von dem Spezialfall des linear elastischen Materialverhaltens mit kleinen Deformationen abwenden und zum allgemeinen Fall übergehen. Der Körper K, der ein gewisses Bauteil beschreibt, soll nun aus nichtlinear elastischem aber immernoch aus nahezu inkompressiblem Material bestehen und es sollen nun große Deformationen (bzw. Belastungen) erlaubt sein. Die grundlegenden Größen, wie $\boldsymbol{F}$ oder $\boldsymbol{C}$ bleiben uns natürlich erhalten, jedoch werden wir unsere bisherige Theorie auf Grund der neuen Anforderungen erweitern.

6.1. Inkompressibilität

Im Fall von nichtlinear elastischem Materialverhalten bedeutet die Forderung nach Inkompressibilität zum einen, dass für die Determinante J von $\boldsymbol{F}$ aus (2.21) die Bedingung (6.1) gelten muss.

$$\det \boldsymbol{F} = J \equiv 1 \tag{6.1}$$

Da J das Verhältnis des Volumens vor und nach der Deformation beschreibt (siehe [6]), wird dadurch gefordert, dass sich das Volumen während der Deformation nicht ändert. Im Falle von nahezu inkompressiblem Material muss (6.1) nur annähernd erfüllt sein.

Zum anderen schränkt diese Forderung die Wahl des Materialparameter $\mathtt{K}$ ein, der üblicherweise als Kompressionsmodul bezeichnet wird. Diese Zahl beschreibt die Kompressibilität des Materials, dass heißt, dieser Materialparameter beschreibt wieviel Druck man aufbringen muss um eine relative Volumenänderung zu erzeugen bzw. um das Material zu komprimieren. Da wir nahezu inkompressibles bzw. vollständig inkompressibles Material betrachten wollen, müssen wir folgende Wahl treffen

$$\mathtt{K} \to \infty. \tag{6.2}$$

6.2. Kinematik

Als Ausgangspunkt ist uns wieder das Kräftegleichgewicht laut (2.28) im Körper K nach der Deformation $\boldsymbol{\varphi}$ gegeben. Die wirkenden Kräfte können dabei als Volumenkräfte f entsprechend (2.27) oder Flächenkräfte t entsprechend (2.26) vorliegen. Außerdem haben wir für K eventuell Randbedingungen wie in (2.33) oder (2.32) gegeben. Daraus können wir die Existenz eines Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{T}_2$ folgern, der die Spannungen in der Momentankonfiguration Ω_τ beschreibt

wir analog zu (3.7) eine neue, skalare Variable p ein, die wir wieder als hydrostatischen Druck im Bauteil bezeichnen wollen und die durch

$$p = \mathtt{K}\ \phi_V(\iota_3) = \frac{1}{\kappa}\ \phi_V(\iota_3) \qquad \text{auf } \Omega_\tau \tag{6.28}$$

mit der Bezeichnung

$$\iota_3 = \iota_3(\boldsymbol{C}) = J^2 \tag{6.29}$$

definiert ist.

Der Materialparameter κ in (6.28) ist das Reziproke des Kompressionsmoduls und wird als Kompressibilität des Materials bezeichnet. Offensichtlich gilt

$$\kappa = 0 \qquad \text{für inkompressibles Material,} \tag{6.30a}$$
$$\kappa \gtrsim 0 \qquad \text{für nahezu inkompressibles Material.} \tag{6.30b}$$

Setzen wir nun (6.28) in (6.27) ein, erhalten wir

$$\overset{2}{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{u}, p) = \boldsymbol{T}_D(\boldsymbol{u}) + p\, \boldsymbol{S}_V(\boldsymbol{u}). \tag{6.31}$$

Man beachte, dass die beiden zweistufigen Tensoren $\boldsymbol{T}_D$ und $\boldsymbol{S}_V$ eigentlich von $\boldsymbol{C}$ abhängen, aber dadurch auch von der Verschiebung $\boldsymbol{u}$ abhängen.

Neben einer neuen Formulierung für den 2. Piola-Kirschhoff-Spannungstensor erhalten wir jedoch auch eine Nebenbedingung für unser Verschiebungsproblem, denn zusätzlich zu (6.3) muss nun auch (6.32) gelten.

$$\phi_V(\iota_3) - \kappa\, p = 0. \tag{6.32}$$

6.3.3. Ableitung

Nun müssen wir klären, wie wir die Ableitungen von ϕ_D und ϕ_V nach $\boldsymbol{C}$ in (6.27) bestimmen können. Dies ist auf dem direktem Weg eher schwierig, kann aber durch einen kleinen Umweg mit einer neuen Idee wesentlich vereinfacht werden.

Wir führen dazu die neuen Größen a_i für $i = 1, 2, 3$ ein. Diese werden durch (6.33) definiert.

$$a_i(\boldsymbol{C}) = \frac{1}{i}\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}^i\right). \tag{6.33}$$

Wie in [10] beschrieben wird, kann man nun die Invarianten von $\boldsymbol{C}$ in Abhängigkeit von a_i darstellen.

$$\iota_1(\boldsymbol{C}) \qquad = a_1, \tag{6.34a}$$
$$\iota_2(\boldsymbol{C}) = \iota_2(a_1, a_2) \qquad = \frac{1}{2}\left({a_1}^2 - 2a_2\right), \tag{6.34b}$$
$$\iota_3(\boldsymbol{C}) = \iota_3(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{6}\left({a_1}^3 - 6a_1a_2 + 6a_3\right). \tag{6.34c}$$

Zur weiteren Vereinfachung nehmen wir an, dass der erste Anteil nur von $\iota_1(\boldsymbol{C}_D)$ abhängt und dass der zweite Anteil nur von $\iota_3(\boldsymbol{C}_V) = J^2$ abhängt. Außerdem sollte ϕ_V konvex sein und die Nebenbedingung

$$\phi_V(J=1) = 0 \tag{6.22}$$

erfüllen, um zu beschreiben, dass sich das Volumen nicht ändert, wenn der Wert der Determinante von $\boldsymbol{F}$ gleich Eins ist.

Wir wählen also

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{C}) &= \phi_D(\iota_1(\boldsymbol{C}_D)) + \frac{1}{2}\mathtt{K}\,{\phi_V}^2(\iota_3(\boldsymbol{C}_V)) && (6.23)\\ &= \phi_D\left(\frac{\iota_1(\boldsymbol{C})}{\iota_3(\boldsymbol{C})^{1/3}}\right) + \frac{1}{2}\mathtt{K}\,{\phi_V}^2(\iota_3(\boldsymbol{C})) && (6.24)\\ &= \phi_D\left(\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})}{\iota_3(\boldsymbol{C})^{1/3}}\right) + \frac{1}{2}\mathtt{K}\,{\phi_V}^2(\iota_3(\boldsymbol{C})) && (6.25)\end{aligned}$$

Eine passende Wahl für nahezu inkompressibles Material ist eine Vereinfachung der Materialfunktion für Mooney-Rivlin-Material. Wir wählen also wie in [8] vorgeschlagen

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{C}) &= c(\iota_1(\boldsymbol{C}_D) - 3) + \frac{1}{2}\mathtt{K}\,\ln(\iota_3(\boldsymbol{C}_V))^2\\ &= c\left(\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})}{\iota_3(\boldsymbol{C})^{1/3}} - 3\right) + \frac{1}{2}\mathtt{K}\,\ln(\iota_3(\boldsymbol{C}))^2 && (6.26)\end{aligned}$$

als Materialfunktion für die spezifische Verzerrungs-Energiedichte. In dieser Darstellung wird der deviatorische Anteil durch $c\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})\,\iota_3(\boldsymbol{C})^{-1/3} - 3\right)$ und der volumetrische Anteil durch $\ln(\iota_3(\boldsymbol{C}))$ beschrieben.

Wir können nun die gefunden Darstellung (6.23) von ϕ in die Darstellung (6.11) des 2. Piola-Kirschhoff-Spannungstensors einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}\overset{2}{\boldsymbol{T}} &= 2\,\frac{\partial\,\phi(\boldsymbol{C})}{\partial\,\boldsymbol{C}}\\ &= \underbrace{2\,\frac{\partial\,\phi_D}{\partial\,\boldsymbol{C}}}_{\boldsymbol{T}_D} + \mathtt{K}\,\phi_V\ \underbrace{2\,\frac{\partial\,\phi_V}{\partial\,\boldsymbol{C}}}_{\boldsymbol{S}_V} && (6.27)\end{aligned}$$

Für nahezu inkompressibles Material können wir aber (6.27) in dieser Form nicht verwenden, da $\mathtt{K}$ entsprechend (6.2) divergiert und somit auch der zweite Summand in $\overset{2}{\boldsymbol{T}}$ divergiert. Wir können jedoch den gleichen Ausweg nutzen, der uns bereits im Falle der linearen Elastizität geholfen hat. Wir können den problematischen Term durch eine Substitution aus der Gleichung entfernen. Dazu führen

und für den (2.29) - (2.31) gilt. Dass heißt im Gleichgewicht unter gegebenen Randbedingungen gilt

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \rho_\tau\, f = 0 \qquad \text{in } \Omega_\tau. \tag{6.3}$$

Im Fall der nichtlinearen Elastizität gibt es aber kein einfaches Materialgesetz mehr mit dem $\boldsymbol{\sigma}$ berechnet werden kann. Jedoch werden zur Hilfe zwei neue Spannungstensoren eingeführt: Man definiert den 1. und 2. Piola-Kirschhoffschen Spannungstensor $\overset{1}{\boldsymbol{T}}$ und $\overset{2}{\boldsymbol{T}}$ mit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{J}\,\boldsymbol{F}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{T}} && (6.4)\\ &= \frac{1}{J}\,\boldsymbol{F}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{F}^T && (6.5)\end{aligned}$$

und $\overset{1}{\boldsymbol{T}},\ \overset{2}{\boldsymbol{T}} \in \mathbb{T}_2$. Diese Größen sind somit transformierte Spannungsgrößen und beziehen sich zum Teil auf die Ausgangskonfiguration Ω. Wie $\overset{2}{\boldsymbol{T}}$ berechnet werden kann, werden wir im Folgenden besprechen.

Eine weitere neue Größe wird durch den zweistufigen Tensor $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$ beschrieben. Dabei handelt es sich um die Ableitung der Verzerrung $\boldsymbol{E}$ und es gilt

$$\begin{aligned}2\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) &= \mathrm{Grad}(\boldsymbol{v})\cdot F^T(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{u})\cdot(\mathrm{Grad}(\boldsymbol{v}))^T\\ &= \mathrm{Grad}(\boldsymbol{v}) + (\mathrm{Grad}(\boldsymbol{v}))^T\\ &\quad + \mathrm{Grad}(\boldsymbol{u})\cdot(\mathrm{Grad}(\boldsymbol{v}))^T + \mathrm{Grad}(\boldsymbol{v})\cdot(\mathrm{Grad}(\boldsymbol{u}))^T. && (6.6)\end{aligned}$$

6.3. Spannungstensor aus der freien Energiedichte

Zur Berechnung des 2. Piola-Kirschhoffschen Spannungstensors $\overset{2}{\boldsymbol{T}}$ wird nun eine neue Materialgröße herangezogen, nämlich die freie Helmholtz-Energiedichte pro Masseeinheit $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{C})$ bzw. die spezifische Verzerrungs-Energiedichte pro Volumeneinheit $\phi(\boldsymbol{C})$. Zwischen diesen beiden Dichten gilt der Zusammenhang

$$\phi(\boldsymbol{C}) = \rho_0\,\widetilde{\phi}(\boldsymbol{C}). \tag{6.7}$$

Weiterhin lässt sich zeigen, dass die Energiedichte ϕ nicht direkt von dem Cauchy-Green-Verzerrungstensors $\boldsymbol{C}$ abhängt, sondern nur von seinen drei Invarianten

$$\begin{aligned}\iota_1(\boldsymbol{C}) &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}), && (6.8a)\\ \iota_2(\boldsymbol{C}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^2)), && (6.8b)\\ \iota_3(\boldsymbol{C}) &= \det(\boldsymbol{C}) = J^2. && (6.8c)\end{aligned}$$

Dass heißt

$$\phi(\boldsymbol{C}) = \phi(\iota_1(\boldsymbol{C}), \iota_2(\boldsymbol{C}), \iota_3(\boldsymbol{C})). \tag{6.9}$$

Aus der Thermodynamik ist bekannt, dass für $\overset{2}{\boldsymbol{T}}$ die Clasius-Planck-Ungleichung (6.10) gilt. Ein Punkt über einer Variablen markiert hier die übliche Zeitableitung dieser Variablen.

$$\frac{1}{2}\overset{2}{\boldsymbol{T}} : \dot{\boldsymbol{C}} - \rho_0 \dot{\tilde{\phi}}(\boldsymbol{C}) \geq 0. \tag{6.10}$$

Da die elastische Deformation ein vollständig reversibler Prozess ist, vereinfacht sich (6.10) zu einer Gleichung und man kann mit Hilfe von (6.7) das folgende Gesetz der Hyperelastizität ableiten.

$$\overset{2}{\boldsymbol{T}} = 2\,\frac{\partial\,\phi(\boldsymbol{C})}{\partial\,\boldsymbol{C}} \tag{6.11}$$

Der 2. Piola-Kirschhoff-Spannungstensor lässt sich also durch Ableitung der Energiedichte bestimmen. Dabei wollen wir die Ableitung wie in (1.1) verstehen, das heißt wir betrachten

$$\phi(\boldsymbol{C} + \delta\boldsymbol{C}) = \phi(\boldsymbol{C}) + \frac{\partial\,\phi(\boldsymbol{C})}{\partial\,\boldsymbol{C}} : \delta\boldsymbol{C} + O(||\delta\boldsymbol{C}||^2). \tag{6.12}$$

6.3.1. Zerlegungsansatz nach Flory

Zur besseren Handhabung von (6.11) führt man nun eine multiplikative Zerlegung von $\boldsymbol{F}$ in zwei Anteil $\boldsymbol{F}_V$ und $\boldsymbol{F}_D$ durch. Dies ist üblich bei der Betrachtung von volumenerhaltenden, großen Deformationen und geht auf Flory zurück (siehe [6], [8] oder [9]). Die Zerlegung wird deshalb „Flory-Split“ genannt und hat folgende Gestalt

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_V\,\boldsymbol{F}_D \tag{6.13}$$

mit der Festlegung

$$\boldsymbol{F}_V = J^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{I}, \tag{6.14a}$$

$$\boldsymbol{F}_D = J^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{F}. \tag{6.14b}$$

Daraus folgt sofort

$$\det(\boldsymbol{F}_D) = 1, \tag{6.15a}$$

$$\det(\boldsymbol{F}_V) = J. \tag{6.15b}$$

Mit diesen beiden Faktoren kann nun die Deformation in zwei Anteile zerlegt werden: Der volumetrische Anteil $\boldsymbol{F}_V$ beschreibt die reine Volumenänderung nach der Deformation $\boldsymbol{\varphi}$, wohingegen der deviatorische Anteil $\boldsymbol{F}_D$ die reine Gestaltänderung von K durch $\boldsymbol{\varphi}$ beschreibt. Dies wird von den Gleichungen (6.15a) und (6.15b) widergespiegelt. Da die Determinante von $\boldsymbol{F}_D$ gleich eins ist, geht mit $\boldsymbol{F}_D$ keine Volumenänderung einher.

Die Forderung nach Inkompressibilität (6.1) lässt sich nun zu folgender Bedingung abwandeln

$$\det(\boldsymbol{F}_V) \equiv 1. \tag{6.16}$$

Der Ansatz aus (6.13) wirkt sich auch auf den Cauchy-Green-Verzerrungstensor aus, da dieser nun auch in zwei multiplikative Anteile zerlegt werden kann

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_D\,\boldsymbol{C}_V. \tag{6.17}$$

Als deviatorischen Anteil erhält man

$$\boldsymbol{C}_D = \boldsymbol{F}_D{}^T\,\boldsymbol{F}_D = J^{-\frac{2}{3}}\,\boldsymbol{C}, \tag{6.18}$$

als volumetrischen Anteil bekommt man

$$\boldsymbol{C}_V = \boldsymbol{F}_V{}^T\,\boldsymbol{F}_V = J^{\frac{2}{3}}\,\boldsymbol{I}. \tag{6.19}$$

6.3.2. Darstellung der Spannung und der Energiedichte

Weiterhin lässt sich der Ansatz aus (6.13) auf die spezifische Verzerrungs-Energiedichte ϕ übertragen. Für inkompressibles Material nimmt man an, dass es die folgend Darstellung gibt

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{C}) &= \phi_D(\boldsymbol{C}_D) + \overline{\phi}_V(\boldsymbol{C}_V) \\ &= \phi_D(\iota_1(\boldsymbol{C}_D), \iota_2(\boldsymbol{C}_D)) + \overline{\phi}_V(\iota_1(\boldsymbol{C}_V), \iota_2(\boldsymbol{C}_V), \iota_3(\boldsymbol{C}_V)).\end{aligned} \tag{6.20}$$

Üblicherweise stellt man ϕ aber wiefolgt dar

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{C}) &= \phi_D(\boldsymbol{C}_D) + \frac{1}{2}\mathrm{K}\,(\phi_V(\boldsymbol{C}_V))^2 \\ &= \phi_D(\iota_1(\boldsymbol{C}_D), \iota_2(\boldsymbol{C}_D)) + \frac{1}{2}\mathrm{K}\,\phi_V{}^2(\iota_1(\boldsymbol{C}_V), \iota_2(\boldsymbol{C}_V), \iota_3(\boldsymbol{C}_V)).\end{aligned} \tag{6.21}$$

Wir nehmen also an, dass es einen deviatorischer Anteil ϕ_D gibt, der die Gestaltänderung unseres Körpers beschreibt und ein volumetrischer Anteil ϕ_V, der die Volumenänderung beschreibt. Jedoch ist die spezifische Verzerrungs-Energiedichte ϕ nicht eindeutig definiert, sondern es gibt verschieden, plausible Möglichkeiten, wie sie gewählt werden kann (vergleiche [7], S. 41).