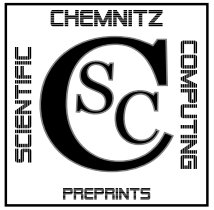
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Uwe-Jens Görke Sonja Kaiser Anke Bucher Reiner Kreißig

Ein Beitrag zur gemischten Finite-Elemente-Formulierung der Theorie gesättigter poröser Medien bei großen Verzerrungen

CSC/09-02



Chemnitz Scientific Computing Preprints

Chemnitz Scientific Computing Preprints – ISSN 1864-0087

Impressum:

Chemnitz Scientific Computing Preprints — ISSN 1864-0087
(1995–2005: Preprintreihe des Chemnitzer SFB393)

Herausgeber:
Professuren für
Numerische und Angewandte Mathematik
an der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Chemnitz

Postanschrift:
TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
09107 Chemnitz
Sitz:
Reichenhainer Str. 41, 09126 Chemnitz

http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/

05-18 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Quadrilateral removal and 2-ear theorems. December 2005.

05-19 P. Benner, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí. Solving linear-quadratic optimal control problems on parallel computers. December 2005.

06-01 T. Eibner, J. M. Melenk. p-FEM quadrature error analysis on tetrahedra. October 2006.

06-02 P. Benner, H. Faßbender. On the solution of the rational matrix equation $X = Q + LX^{-1}L^{\top}$. September 2006.

06-03 P. Benner, H. Mena, J. Saak. On the Parameter Selection Problem in the Newton-ADI Iteration for Large Scale Riccati Equations. October 2006.

06-04 J. M. Badía, P. Benner, R. Mayo, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, A. Remón. Balanced Truncation Model Reduction of Large and Sparse Generalized Linear Systems. November 2006.

07-01 U. Baur, P. Benner. Gramian-Based Model Reduction for Data-Sparse Systems. February 2007.

07-02 A. Meyer. Grundgleichungen und adaptive Finite-Elemente-Simulation bei „Großen Deformationen“. Februar 2007.

07-03 P. Steinhorst. Rotationssymmetrie für piezoelektrische Probleme. Februar 2007.

07-04 S. Beuchler, T. Eibner, U. Langer. Primal and Dual Interface Concentrated Iterative Substructuring Methods. April 2007.

07-05 T. Hein, M. Meyer. Simultane Identifikation voneinander unabhängiger Materialparameter - numerische Studien. Juni 2007.

07-06 A. Bucher, U.-J. Görke, P. Steinhorst, R. Kreißig, A. Meyer. Ein Beitrag zur adaptiven gemischten Finite-Elemente-Formulierung der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen. September 2007.

07-07 U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig Zur Numerik der inversen Aufgabe für gemischte (u/p) Formulierungen am Beispiel der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen. October 2007.

07-08 A. Meyer, P. Steinhorst. Betrachtungen zur Spektraläquivalenz für das Schurkomplement im Bramble-Pasciak-CG bei piezoelektrischen Problemen. Oktober 2007.

07-09 T. Hein, M. Meyer. Identification of material parameters in linear elasticity - some numerical results. November 2007.

07-10 T. Hein. On solving implicitly defined inverse problems by SQP-approaches. December 2007.

The complete list of CSC and SFB393 preprints is available via
`http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/`

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Chemnitz Scientific Computing Preprints

Uwe-Jens Görke Sonja Kaiser Anke Bucher Reiner Kreißig

Ein Beitrag zur gemischten Finite-Elemente-Formulierung der Theorie gesättigter poröser Medien bei großen Verzerrungen

CSC/09-02

Zusammenfassung

This paper presents the theoretical background of a phenomenological biphasic material approach at large strains based on the theory of porous media as well as its numerical realization within the context of an adaptive mixed finite element formulation. The study is aimed at the simulation of coupled multiphysics problems with special focus on biomechanics. As the materials of interest can be considered as a mixture of two immiscible components (solid and fluid phases), they can be modeled as saturated porous media. For the numerical treatment of according problems within a finite element approach, weak formulations of the balance equations of momentum and volume of the mixture are developed. Within this context, a generalized Lagrangean approach is preferred assuming the initial configuration of the solid phase as reference configuration of the mixture. The transient problem results in weak formulations with respect to the displacement and pore pressure fields as well as their time derivatives. Therefore special linearization techniques are applied, and after spatial discretization a global system for the incremental solution of the initial boundary value problem within the framework of a stable mixed U/p-c finite element approach is defined. The global system is solved using an iterative solver with hierarchical preconditioning. Adaptive mesh evolution is controlled by a residual a posteriori error estimator. The accuracy and the efficiency of the numerical algorithms are demonstrated on a typical example.

CSC/09-02 **ISSN 1864-0087** **February 2009**

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

2 Theorie gesättigter poröser Medien bei großen Verzerrungen **4**
2.1 Kinematik 7
2.2 Volumenbilanz des Kontinuums 13
2.3 Definition von Spannungstensoren für das poröse Medium 14
2.4 Evolutionsgleichung für die Porosität 19

3 Randwertaufgabe der Theorie gesättigter poröser Medien bei großen Verzerrungen in verallgemeinerter Lagrangescher Darstellung **20**
3.1 Schwache Formulierungen der Gleichgewichtsbedingungen und der Volumenbilanz des Kontinuums 20
3.2 Linearisierung der schwachen Formulierungen 27
3.3 Deformationsgesetz für den Effektivspannungstensor des Festkörperskeletts und konsistente Materialtangente 36
3.4 Stabile Elementformulierung und adaptive Netzanpassung im Kontext eines hierarchischen Lösers 38

4 Numerisches Beispiel **41**
4.1 Stauchen eines Zylinders im Gesenk 41
4.2 Berechnungen mit Viereckelementen vom Typ $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$ 42
4.3 Berechnungen mit Dreieckelementen vom Typ $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$ 47

5 Zusammenfassung und Ausblick **51**

Author's addresses:

Uwe-Jens Görke
TU Chemnitz
Fakultät f. Maschinenbau
Professur Festkörpermech.
now at: Helmholtz-Zentrum
f. Umweltforschung – UFZ
Deptmt. Umweltinformatik
Permoserstr. 15
D-04318 Leipzig

Sonja Kaiser
Reiner Kreißig
TU Chemnitz
Fakultät f. Maschinenbau
Professur Festkörpermech.
Str. d. Nationen 62
D-09111 Chemnitz

Anke Bucher
HTWK Leipzig
Fachbereich Maschinen- und Energietechnik
Professur Angewandte Mechanik
Koburger Str. 16
D-04416 Markkleeberg

`http://www.tu-chemnitz.de/mb/FestKoerpMech/`
`http://www.htwk-leipzig.de/fbme/`
`http://www.ufz.de`

04-13 M. Jung, T. D. Todorov. On the Convergence Factor in Multilevel Methods for Solving 3D Elasticity Problems. December 2004.

05-01 C. Pester. A residual a posteriori error estimator for the eigenvalue problem for the Laplace-Beltrami operator. January 2005.

05-02 J. Badía, P. Benner, R. Mayo, E. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, J. Saak. Parallel Order Reduction via Balanced Truncation for Optimal Cooling of Steel Profiles. February 2005.

05-03 C. Pester. CoCoS – Computation of Corner Singularities. April 2005.

05-04 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Einige Elemente, Fehlerschätzer und Ergebnisse. April 2005.

05-05 P. Benner, J. Saak. Linear-Quadratic Regulator Design for Optimal Cooling of Steel Profiles. April 2005.

05-06 A. Meyer. A New Efficient Preconditioner for Crack Growth Problems. April 2005.

05-07 A. Meyer, P. Steinhorst. Überlegungen zur Parameterwahl im Bramble-Pasciak-CG für gemischte FEM. April 2005.

05-08 T. Eibner, J. M. Melenk. Fast algorithms for setting up the stiffness matrix in hp-FEM: a comparison. June 2005.

05-09 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Vergleich der Fehlerindikatoren in Bezug auf die Netzsteuerung Teil I. June 2005.

05-10 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Vergleich der Fehlerindikatoren in Bezug auf die Netzsteuerung Teil II. July 2005.

05-11 A. Meyer, R. Unger. Subspace-cg-techniques for clinch-problems. September 2005.

05-12 P. Ciarlet, Jr, B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, J. Zou. The Fourier Singular Complement Method for the Poisson Problem. Part III: Implementation Issues. October 2005.

05-13 T. Eibner, J. M. Melenk. Multilevel preconditioning for the boundary concentrated *hp*-FEM. December 2005.

05-14 M. Jung, A. M. Matsokin, S. V. Nepomnyaschikh, Yu. A. Tkachov. Multilevel preconditioning operators on locally modified grids. December 2005.

05-15 S. Barrachina, P. Benner, E. S. Quintana-Ortí. Solving Large-Scale Generalized Algebraic Bernoulli Equations via the Matrix Sign Function. December 2005.

05-16 B. Heinrich, B. Jung. Nitsche- and Fourier-finite-element method for the Poisson equation in axisymmetric domains with re-entrant edges. December 2005.

05-17 M. Randrianarivony, G. Brunnett. C^0-paving of closed meshes with quadrilateral patches. December 2005.

03-15 Th. Apel, S. Nicaise. The inf-sup condition for the Bernardi-Fortin-Raugel element on anisotropic meshes. September 2003.

03-16 G. Kunert, Z. Mghazli, S. Nicaise. A posteriori error estimation for a finite volume discretization on anisotropic meshes. September 2003.

03-17 B. Heinrich, K. Pönitz. Nitsche type mortaring for singularly perturbed reaction-diffusion problems. October 2003.

03-18 S. I. Solov'ëv. Vibrations of plates with masses. November 2003.

03-19 S. I. Solov'ëv. Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems. November 2003.

03-20 M. Randrianarivony, G. Brunnett, R. Schneider. Tessellation and parametrization of trimmed surfaces. December 2003.

04-01 A. Meyer, F. Rabold, M. Scherzer. Efficient Finite Element Simulation of Crack Propagation. February 2004.

04-02 S. Grosman. The robustness of the hierarchical a posteriori error estimator for reaction-diffusion equation on anisotropic meshes. March 2004.

04-03 A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke, R. Kreißig. Entwicklung von adaptiven Algorithmen für nichtlineare FEM. April 2004.

04-04 A. Meyer, R. Unger. Projection methods for contact problems in elasticity. April 2004.

04-05 T. Eibner, J. M. Melenk. A local error analysis of the boundary concentrated FEM. May 2004.

04-06 H. Harbrecht, U. Kähler, R. Schneider. Wavelet Galerkin BEM on unstructured meshes. May 2004.

04-07 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Necessary and sufficient conditions for the regularity of a planar Coons map. May 2004.

04-08 P. Benner, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí. Solving Linear Matrix Equations via Rational Iterative Schemes. October 2004.

04-09 C. Pester. Hamiltonian eigenvalue symmetry for quadratic operator eigenvalue problems. October 2004.

04-10 T. Eibner, J. M. Melenk. An adaptive strategy for hp-FEM based on testing for analyticity. November 2004.

04-11 B. Heinrich, B. Jung. The Fourier-finite-element method with Nitsche-mortaring. November 2004.

04-12 A. Meyer, C. Pester. The Laplace and the linear elasticity problems near polyhedral corners and associated eigenvalue problems. December 2004.

1 Einführung

Reale ingenieurtechnische, geologische, geotechnologische und biologische Prozesse sind häufig durch das gleichzeitige Wirken unterschiedlicher Felder (mechanischer, thermischer, elektromagnetischer, chemischer u. a.) sowie die komplexe Interaktion verschiedener Materialkomponenten (z. B. feste, flüssige, gasförmige Phasen) gekennzeichnet. Die Modellierung und Simulation entsprechender Aufgabenstellungen führt auf die Lösung so genannter *multiphysics*-Probleme. Mit der verbesserten Effizienz und Zuverlässigkeit numerischer Methoden und der gestiegenen Leistungsfähigkeit der Rechentechnik wurde die zweckmäßig gekoppelte Behandlung damit verbundener Mehrfeldprobleme ermöglicht. Hierbei ist insbesondere von Vorteil, dass der strukturelle Aufbau der betrachteten Materialien oftmals die Anwendung gleichartiger Modelle gestattet. Deren numerische Behandlung spielt eine wachsende Rolle bei der hochgenauen analysierenden und prädiktiven Simulation realer physikalischer Vorgänge.

Ausgehend von umfangreichen theoretischen und numerischen Vorarbeiten auf dem Gebiet der effizienten numerischen Simulation von nichtlinearen Einfeldproblemen der Festkörpermechanik wurde an der TU Chemnitz vor etwa fünf Jahren in enger Kooperation zwischen Bereichen aus der Mechanik und der Mathematik mit der Behandlung direkter und inverser Aufgabenstellungen aus dem *multiphysics*-Bereich begonnen. Großes Potenzial bieten dabei insbesondere die Erfahrungen auf den Gebieten der Materialtheorie bei finiten Verzerrungen, der Identifikation von Materialparametern sowie der effizienten numerischen Verfahren zur Lösung des globalen Gleichungssystems im Rahmen der Finite-Elemente-Methode (FEM) und der hierarchischen adaptiven Netzsteuerung.

Mit dem Ziel einer sukzessiven Erweiterung der Komplexität der zu betrachtenden Mehrfeldprobleme wurde im Bereich großer Verzerrungen zunächst die Lösung des direkten und des inversen Problems für Werkstoffe mit nahezu inkompressiblem hyperelastischem Materialverhalten betrachtet (vgl. [18, 34]). Aufgrund vorhandener Modellanalogien dienen diese Ansätze als Vorarbeiten zur numerischen Behandlung von Zweiphasenmedien im Rahmen einer geeigneten U/p-c-Formulierung (mit stetigem Druckverlauf über die Elementgrenzen).

Zur Theorie der Mehrphasen-Mehrkomponenten-Medien existiert mittlerweile eine kaum zu überblickende Anzahl von Publikationen. Da die hier diskutierten Ansätze speziell auf Anwendungen in der Biomechanik weicher Gewebe fokussiert sind, soll im Wesentlichen die Entwicklung der so genannten *Theorie poröser Medien* (TPM) an ausgewählten Arbeiten exemplarisch skizziert werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem isothermen quasistatischen Modell eines gesättigten Zweiphasenmediums ohne Masseaustausch zwischen den Konstituierenden. Ein ausführlicher Überblick zu historischer Entwicklung und gegenwärtigem Stand der TPM wird von de Boer [5, 6] gegeben. Ebenso sei auf die

umfassenden Übersichten und Literaturstudien zu den theoretischen Grundlagen und numerischen Algorithmen gemischter Probleme mehrphasiger Kontinua von Ehlers und Bluhm [27], Lewis und Schrefler [50] sowie Simon [68] verwiesen. Der Artikel von Simon ist eine der ersten Arbeiten zur Anwendung von Modellen für poröse Medien auf Probleme der numerischen Mechanik weicher biologischer Gewebe.

Als Grundlage für die Ansätze zur FE-Simulation des Verhaltens fluidgefüllter poröser Festkörper werden häufig die Arbeiten von Biot zur makroskopischen Theorie gesättigter feuchter Böden angesehen (vgl. [3, 4]). An diesen Modellen wird jedoch verschiedentlich der ausgeprägt intuitive Zugang bemängelt. Aus den Formulierungen von Biot entwickelte sich die physikalisch fundierte Mischungstheorie (zu deren Grundlagen siehe u. a. die Arbeiten von Truesdell und Toupin [76] sowie Bowen [11]), die als Basiswerkzeug für die Beschreibung des Verhaltens poröser Medien im Rahmen moderner makroskopischer Modelle gilt. Da in der Mischungstheorie jedoch keinerlei Informationen über mikroskopische Strukturen des Materials enthalten sind[1], wurde sie bei Bowen [12], Prevost [63], de Boer und Ehlers [7,8], Ehlers [25], Lancellotta [48] und von anderen Autoren mit dem Konzept der Volumenanteile kombiniert. Im Rahmen dieses erweiterten Ansatzes der Mischungstheorie können alle kinematischen und physikalischen Größen makroskopisch als lokale statistische Mittelung der entsprechenden Werte auf der unterliegenden Mikrostruktur verstanden werden.

Ein alternativer Ansatz zur TPM wurde speziell für die Simulation des mechanischen Verhaltens weicher biologischer Gewebe von Mow et al. mit der so genannten *biphasischen* (oder *poroelastischen*) *Theorie* vorgeschlagen [57]. Dieses Modell wurde später von Lai et al. [47], Holmes [42], Mak [53], Spilker et al. [72] sowie anderen Autoren erweitert. Wie in [29] und [68] gezeigt wird, führen beide Formulierungen auf äquivalente materialunabhängige Grundgleichungen. Unterschiede bestehen in deren numerischer Behandlung, der Definition der primären kinematischen und kinetischen Variablen sowie in daraus folgenden spezifischen konstitutiven Annahmen. In [68] wird ein umfassender vergleichender Überblick zu den theoretischen Konzepten und der numerischen Realisierung beider Mehrphasenkonzepte präsentiert.

Für die Herleitung der materialunabhängigen Grundbeziehungen (Deformationskinematik, Bilanzgleichungen) gesättigter poröser Kontinua auf der Basis der TPM sowie der Formulierung der numerischen Ansätze im Rahmen einer Standard-Galerkin-Prozedur sei besonders auf die Arbeiten von Lewis und Schrefler [50], de Boer [5] und Ehlers [26] verwiesen.

[1] In der Mischungstheorie wird die ideale Durchmischung aller Konstituierenden eines Mehrphasenmediums postuliert. Das erschwert die realistische Berücksichtigung ihrer Interaktionen untereinander.

02-17 M. Morgenstern, J. Klijn, Chr. Meyer, R. A. Römer, R. Wiesendanger. Comparing measured and calculated local density of states in a disordered two-dimensional electron system. September 2002.

02-18 J. Hippold, G. Rünger. Task Pool Teams for Implementing Irregular Algorithms on Clusters of SMPs. October 2002.

02-19 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelets for the fast solution of boundary integral equations. October 2002.

02-20 H. Harbrecht, R. Schneider. Adaptive Wavelet Galerkin BEM. October 2002.

02-21 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet Galerkin Schemes for Boundary Integral Equations - Implementation and Quadrature. October 2002.

03-01 E. Creusé, G. Kunert, S. Nicaise. A posteriory error estimation for the Stokes problem: Anisotropic and isotropic discretizations. January 2003.

03-02 S. I. Solov'ëv. Existence of the guided modes of an optical fiber. January 2003.

03-03 S. Beuchler. Wavelet preconditioners for the p-version of the FEM. February 2003.

03-04 S. Beuchler. Fast solvers for degenerated problems. February 2003.

03-05 A. Meyer. Stable calculation of the Jacobians for curved triangles. February 2003.

03-06 S. I. Solov'ëv. Eigenvibrations of a plate with elastically attached load. February 2003.

03-07 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet based fast solution of boundary integral equations. February 2003.

03-08 S. I. Solov'ëv. Preconditioned iterative methods for monotone nonlinear eigenvalue problems. March 2003.

03-09 Th. Apel, N. Düvelmeyer. Transformation of hexahedral finite element meshes into tetrahedral meshes according to quality criteria. May 2003.

03-10 H. Harbrecht, R. Schneider. Biorthogonal wavelet bases for the boundary element method. April 2003.

03-11 T. Zhanlav. Some choices of moments of refinable function and applications. June 2003.

03-12 S. Beuchler. A Dirichlet-Dirichlet DD-pre-conditioner for p-FEM. June 2003.

03-13 Th. Apel, C. Pester. Clément-type interpolation on spherical domains - interpolation error estimates and application to a posteriori error estimation. July 2003.

03-14 S. Beuchler. Multi-level solver for degenerated problems with applications to p-version of the fem. *(Dissertation)* July 2003.

December 2001.

02-01 M. Pester. Bibliotheken zur Entwicklung paralleler Algorithmen - Basisroutinen für Kommunikation und Grafik. Januar 2002.

02-02 M. Pester. Visualization Tools for 2D and 3D Finite Element Programs - User's Manual. January 2002.

02-03 H. Harbrecht, M. Konik, R. Schneider. Fully Discrete Wavelet Galerkin Schemes. January 2002.

02-04 G. Kunert. A posteriori error estimation for convection dominated problems on anisotropic meshes. March 2002.

02-05 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet Galerkin Schemes for 3D-BEM. February 2002.

02-06 W. Dahmen, H. Harbrecht, R. Schneider. Compression Techniques for Boundary Integral Equations - Optimal Complexity Estimates. April 2002.

02-07 S. Grosman. Robust local problem error estimation for a singularly perturbed reaction-diffusion problem on anisotropic finite element meshes. May 2002.

02-08 M. Springmann, M. Kuna. Identifikation schädigungsmechanischer Materialparameter mit Hilfe nichtlinearer Optimierungsverfahren am Beispiel des Rousselier Modells. Mai 2002.

02-09 S. Beuchler, R. Schneider, C. Schwab. Multiresolution weighted norm equivalences and applications. July 2002.

02-10 Ph. Cain, R. A. Römer, M. E. Raikh. Renormalization group approach to energy level statistics at the integer quantum Hall transition. July 2002.

02-11 A. Eilmes, R. A. Römer, M. Schreiber. Localization properties of two interacting particles in a quasiperiodic potential with a metal-insulator transition. July 2002.

02-12 M. L. Ndawana, R. A. Römer, M. Schreiber. Scaling of the Level Compressibility at the Anderson Metal-Insulator Transition. September 2002.

02-13 Ph. Cain, R. A. Römer, M. E. Raikh. Real-space renormalization group approach to the quantum Hall transition. September 2002.

02-14 A. Jellal, E. H. Saidi, H. B. Geyer, R. A. Römer. A Matrix Model for $\nu_{k_1k_2} = \frac{k_1+k_2}{k_1k_2}$ Fractional Quantum Hall States. September 2002.

02-15 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Parallel implementation of curve reconstruction from noisy samples. August 2002.

02-16 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Parallel implementation of surface reconstruction from noisy samples. September 2002.

Erste lineare FE-Techniken für gesättigte poröse Medien mit elastischem Verhalten des Festkörperskeletts finden sich bei Christian und Boehmer [21], Hwang et al. [44], Sandhu und Wilson [64], Schiffmann et al. [67], Yokoo et al. [82], Ghaboussi und Wilson [33] sowie in den späteren Arbeiten von Lai et al. [47], Mow et al. [57] und Simon et al. [69]. Der bedeutende Aspekt der deformationsabhängigen Änderung der Permeabilität wurde zunächst von Lewis et al. [49] und Lai et al. [47] berücksichtigt. Kleine viskoelastische Verzerrungen bezüglich der Festkörperdeformationen werden u. a. von Mak [53] betrachtet. Bereits in den Arbeiten von Desai und Siriwardane [24], Small et al. [71], Zienkiewicz et al. [83] sowie in jüngster Zeit bei Cramer et al. [23] werden elastisch-plastische Modelle für das Verhalten des Festkörperskeletts vorgeschlagen.

Carter et al. [19] stellten erstmals ein Modell für große elastisch-plastische Verzerrungen auf der Grundlage der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten vor. Neuere Untersuchungen zu großen Verzerrungen gesättigter poröser Materialien enthalten beispielsweise die Publikationen von Ehlers und Eipper [28] sowie Suh et al. [73] (elastisches Festkörperskelett), Armero [1], Borja und Alarcón [9], Sanavia et al. [66] (Elastoplastizität für ein teilgesättigtes Modell) sowie Li et al. [51] (dynamische Modelle der Elastoplastizität).

Aktuelle Entwicklungen für verbesserte numerische Ansätze zur Simulation von Prozessen in Mehrphasenmedien werden besonders auf dem klassischen Anwendungsgebiet der Geomechanik reportiert. Im Mittelpunkt stehen dabei gekoppelte multiphysics-Aufgaben für teilgesättigte Medien. Truty und Zimmermann [77] sowie Korsawe et al. [45] stellen beispielsweise modifizierte Variationsformulierungen vom Galerkin-Typ bzw. stabilisierte Ansätze zur Modellierung von Konsolidationsproblemen vor. Li et al. [52], Sanavia et al. [65] sowie Wang und Kolditz [78] präsentieren numerische Strategien zur Behandlung von thermo-hydromechanischen Aufgabenstellungen.

In der neueren Literatur finden sich im Bereich biomechanischer Problemstellungen eine Reihe von Publikationen zur Numerik der Interaktion mechanischer und elektrochemischer Prozesse in weichen biologischen Geweben auf der Basis der TPM bei großen Verzerrungen. Beispielhaft seien die Arbeiten von Chen et al. [20] sowie Yao und Gu [81] genannt, in denen Dreiphasenmodelle vorgestellt werden. Ein Vierphasenansatz wird von Huyghe et al. [43] am Beispiel der Modellierung von Knochengewebe diskutiert. Andere Publikationen befassen sich mit der Anwendung von numerischen Modellen poröser Medien auf spezielle Gewebearten. Unter anderem werden von Ehlers et al. [30] sowie Natarajan et al. [59] Lösungen zur Simulation des Verhaltens von Bandscheiben vorgestellt. Peréz del Palomar und Doblaré [61] präsentieren ein Modell mit anisotropem hyperelastischem Ansatz für das Festkörperskelett zur Knorpelmodellierung. Sivaloganathan et al. [70] arbeiten auf dem Gebiet der FE-Anwendung zur Simulation des mechanischen Verhaltens von Hirngewebe auf der Basis der Biotschen Theorie gesättig-

ter poröser Medien bei kleinen Verzerrungen. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass die genannten Publikationen nur eine exemplarische Auswahl an Quellen darstellen können.

In der vorliegenden Arbeit werden die wesentlichen theoretischen Grundlagen und die numerische Realisierung eines thermodynamisch konsistenten isotrop elastischen Ansatzes der TPM bei großen Verzerrungen dargelegt. Die Ausführungen sind wie folgt gegliedert: Im Abschnitt 2 werden die Grundlagen der Kinematik des betrachteten Mehrfeldproblems präsentiert. Weiterhin wird die thermodynamisch konsistente Ableitung spezieller Deformationsgesetze und konstitutiver Beziehungen diskutiert. Die grundlegenden Variationsformulierungen in Lagrangescher Betrachtungsweise als Basis für die gemischte FE-Aufgabe werden einschließlich ihrer konsistenten Linearisierung im Abschnitt 3 dargestellt. Zusätzlich wird hier auf die verwendeten Elementformulierungen sowie Aspekte der räumlichen Adaptivität eingegangen. Abschließend wird im Abschnitt 4 ausführlich ein numerisches Beispiel analysiert und mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen.

2 Theorie gesättigter poröser Medien bei großen Verzerrungen

Gegenstand der Betrachtungen ist ein Modell für die Beschreibung poröser Materialien, das zwei miteinander nicht mischbare Konstituierende berücksichtigt: ein poröses Festkörperskelett (in der Literatur auch als festes Gerüst, Stützgerüst oder Matrix bezeichnet) und ein vollständig fließfähiges Porenfluid. Dabei kann Letzteres in flüssigem, gasförmigem oder auch superkritischem Zustand vorliegen. Ein derartiger Ansatz hat sich für eine Vielzahl von Materialien und praktischen Anwendungen in der Bau-, Geo- und Biomechanik bewährt. In diesen Fällen ist die Modellierung der betrachteten Materie als Einphasenkontinuum ohne Berücksichtigung des Mikrogefüges häufig nicht ausreichend zur genügend genauen Simulation physikalischer Vorgänge. Ursache dafür sind die unterschiedlichen Bewegungszustände der einzelnen Konstituierenden des Mehrphasenmaterials und deren Interaktionen unter Einfluss von äußeren Belastungen und Temperaturänderungen. Wegen der komplexen inneren Struktur realer poröser Materialien ist andererseits eine, bezüglich der Theorien und numerischen Algorithmen verfügbare, separierte Beschreibung der Mechanik der einzelnen Konstituierenden auf der Mikroebene unzweckmäßig. Zudem ist für die meisten ingenieurtechnischen, geotechnologischen und biomechanischen Problemstellungen eine makroskopische Charakterisierung der physikalischen Phänomene unter statistisch gemittelter Berücksichtigung mikrostruktureller Gegebenheiten vollkommen hinreichend. So interessiert beispielsweise bei der Untersuchung von Grundwasserströmungen nicht die reale Geschwindigkeit des Fluids in jeder einzelnen

01-19 P. Cain, M.L. Ndawana, R.A. Römer, M. Schreiber. The critical exponent of the localization length at the Anderson transition in 3D disordered systems is larger than 1. June 2001

01-20 G. Kunert, S. Nicaise. Zienkiewicz-Zhu error estimators on anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes. July 2001.

01-21 G. Kunert. A posteriori H^1 error estimation for a singularly perturbed reaction diffusion problem on anisotropic meshes. August 2001.

01-22 A. Eilmes, Rudolf A. Römer, M. Schreiber. Localization properties of two interacting particles in a quasi-periodic potential with a metal-insulator transition. September 2001.

01-23 M. Randrianarivony. Strengthened Cauchy inequality in anisotropic meshes and application to an a-posteriori error estimator for the Stokes problem. September 2001.

01-24 Th. Apel, H. M. Randrianarivony. Stability of discretizations of the Stokes problem on anisotropic meshes. September 2001.

01-25 Th. Apel, V. Mehrmann, D. Watkins. Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures. October 2001.

01-26 P. Cain, F. Milde, R. A. Römer, M. Schreiber. Use of cluster computing for the Anderson model of localization. October 2001. Conf. on Comp. Physics, Aachen (2001).

01-27 P. Cain, F. Milde, R. A. Römer, M. Schreiber. Applications of cluster computing for the Anderson model of localization. October 2001. Transworld Research Network for a review compilation entitled “Recent Research Developments in Physics”, (2001).

01-28 X. W. Guan, A. Foerster, U. Grimm, R. A. Römer, M. Schreiber. A supersymmetric Uq[(osp)(2—2)]-extended Hubbard model with boundary fields. October 2001.

01-29 K. Eppler, H. Harbrecht. Numerical studies of shape optimization problems in elasticity using wavelet-based BEM. November 2001.

01-30 A. Meyer. The adaptive finite element method - Can we solve arbitrarily accurate? November 2001.

01-31 H. Harbrecht, S. Pereverzev, R. Schneider. An adaptive regularization by projection for noisy pseudodifferential equations of negative order. November 2001.

01-32 G. N. Gatica, H. Harbrecht, R. Schneider. Least squares methods for the coupling of FEM and BEM. November 2001.

01-33 Th. Apel, A.-M. Sändig, S. I. Solov’ev. Computation of 3D vertex singularities for linear elasticity: Error estimates for a finite element method on graded meshes.

Some titles in this CSC and the former SFB393 preprint series:

01-01 G. Kunert. Robust local problem error estimation for a singularly perturbed problem on anisotropic finite element meshes. January 2001.

01-02 G. Kunert. A note on the energy norm for a singularly perturbed model problem. January 2001.

01-03 U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig. Ein Beitrag zur Materialparameteridentifikation bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen durch Analyse inhomogener Verschiebungsfelder mit Hilfe der FEM. Februar 2001.

01-04 R. A. Römer. Percolation, Renormalization and the Quantum-Hall Transition. February 2001.

01-05 A. Eilmes, R. A. Römer, C. Schuster, M. Schreiber. Two and more interacting particles at a metal-insulator transition. February 2001.

01-06 D. Michael. Kontinuumstheoretische Grundlagen und algorithmische Behandlung von ausgewählten Problemen der assoziierten Fließtheorie. März 2001.

01-07 S. Beuchler. A preconditioner for solving the inner problem of the p-version of the FEM, Part II - algebraic multi-grid proof. March 2001.

01-08 S. Beuchler, A. Meyer. SPC-PM3AdH v 1.0 - Programmer's Manual. March 2001.

01-09 D. Michael, M. Springmann. Zur numerischen Simulation des Versagens duktiler metallischer Werkstoffe (Algorithmische Behandlung und Vergleichsrechnungen). März 2001.

01-10 B. Heinrich, S. Nicaise. Nitsche mortar finite element method for transmission problems with singularities. March 2001.

01-11 T. Apel, S. Grosman, P. K. Jimack, A. Meyer. A New Methodology for Anisotropic Mesh Refinement Based Upon Error Gradients. March 2001.

01-12 F. Seifert, W. Rehm. (Eds.) Selected Aspects of Cluster Computing. March 2001.

01-13 A. Meyer, T. Steidten. Improvements and Experiments on the Bramble–Pasciak Type CG for mixed Problems in Elasticity. April 2001.

01-14 K. Ragab, W. Rehm. CHEMPI: Efficient MPI for VIA/SCI. April 2001.

01-15 D. Balkanski, F. Seifert, W. Rehm. Proposing a System Software for an SCI-based VIA Hardware. April 2001.

01-16 S. Beuchler. The MTS-BPX-preconditioner for the p-version of the FEM. May 2001.

01-17 S. Beuchler. Preconditioning for the p-version of the FEM by bilinear elements. May 2001.

01-18 A. Meyer. Programmer's Manual for Adaptive Finite Element Code SPC-PM 2Ad. May 2001.

(Mikro)Pore, sondern vielmehr die (gemittelte) Sickergeschwindigkeit im (Gesamt)Kontinuum[2]. Ähnliche Aussagen gelten für die Simulation des mechanischen Verhaltens biologischer Gewebe mit ihrer außerordentlich vielfältigen makromolekularen und biologisch aktiven Struktur.

Mit der TPM wurde ein anerkanntes phänomenologisches Modell zur makroskopischen Beschreibung physikalischer Vorgänge in Zweiphasenmedien mittels kontinuumsmechanischer Ansätze entwickelt. Wie für die meisten Anwendungsfälle zutreffend, soll dabei in dieser Arbeit von vollständig gesättigtem Material ausgegangen werden (das Porenfluid füllt die durchgehenden Hohlräume des Festkörperskeletts komplett aus). Weiterhin werden Masseproduktion in den einzelnen Konstituierenden bzw. Masseaustausch zwischen diesen vernachlässigt sowie ausschließlich quasistatische Probleme betrachtet.

Theoretischer Kern der TPM ist das so genannte *Konzept der Volumenanteile*. In diesem Zusammenhang wird zunächst davon ausgegangen, dass die Masseanteile aller Konstituierenden des Mehrphasenmediums in einem Kontrollraum gleichzeitig präsent und statistisch gleich verteilt sind. Damit wird u. a. auch gewährleistet, dass am Rand des Kontrollraumes und in seinem Inneren statistisch die gleiche Porenverteilung vorliegt. Eine solche Annahme ist wichtig, um gleichartige Bewegungszustände für das Porenfluid im Kontrollraum und über dessen Rand hinaus zu garantieren. Geometrisch wird der Kontrollraum zu jedem Zeitpunkt durch das Festkörperskelett definiert und begrenzt, während Porenfluid über den Rand des Gebietes hinwegströmen kann. Weiterhin muss der Kontrollraum ausreichend groß gegenüber den einzelnen Konstituierenden des Mehrphasenmediums sein, um die gewählte makroskopische Betrachtungsweise zu rechtfertigen. Unter Berücksichtigung dieser Annahmen werden im Rahmen der TPM die Konstituierenden (Festkörper, Flüssigkeit, Gas) durch *verschmierte* Ersatzkontinua mit reduzierten Massedichten erfasst, die einer kontinuumsmechanischen Behandlung zugänglich sind. Somit kann die TPM als homogenisiertes Ersatzmodell zur Charakterisierung physikalischer Prozesse in heterogen strukturierten Kontinua aufgefasst werden. Interne Wechselwirkungsmechanismen zwischen den Konstituierenden werden bei der Modellbildung durch Kopplungsgrößen berücksichtigt (vgl. [5,26,76] u. a.). Diese beschreiben die Auswirkungen der auf der Mikroebene vorliegenden Interaktionen in einem makroskopischen Ansatz.

[2] Für die Betrachtung des fluidgefüllten porösen Mediums soll hier und im Weiteren der Begriff *Kontinuum* verwendet werden. Er entspricht den Vorstellungen eines von überlagerten, homogenisierten Partialkontinua ausgefüllten Ersatzkörpers, dessen Beschreibung kontinuumsmechanischen Methoden zugänglich ist. In der deutsch- und englischsprachigen Literatur findet sich häufig die Bezeichnung *Gemisch* (resp. *mixture*), welche sich aus der Art der in der Theorie poröser Medien verwendeten Modellbildung ableiten lässt. Er steht jedoch im Widerspruch zur Forderung nach der Nichtmischbarkeit der Konstituierenden. Die Mischbarkeit unterschiedlicher Komponenten ist Merkmal von Aufgabenstellungen der klassischen Mischungstheorie und beispielsweise für Mehrphasenströmungen ein anschauliches Modell.

Im Konzept der Volumenanteile werden die reale Porenstruktur und -verteilung nicht erfasst. Vielmehr erfolgt die Definition skalarer Variablen zur Beschreibung des Gefüges eines porösen Körpers. Diese stellen jeweils den Quotienten des Partialvolumens der Konstituierenden bezüglich des Gesamtvolumens $d\Omega$ eines repräsentativen Elementarvolumens des Kontrollraums dar. Für Zweiphasenmedien werden beispielsweise die Volumenanteile ϕ_S und ϕ_F wie folgt definiert:

$$\phi_S = \frac{d\Omega_S}{d\Omega}, \qquad \phi_F = \frac{d\Omega_F}{d\Omega}. \tag{1}$$

Die Ausdehnung des repräsentativen Elementarvolumens ist nicht mit einem absoluten geometrischen Maß zu verbinden, sondern als Relativangabe in Bezug zu den Dimensionen des betrachteten Kontinuums zu verstehen. Letzteres kann in der Geotechnologie Abmessungen im Bereich von $10^2 \dots 10^3$ km besitzen, für biologische Gewebe können diese jedoch bei nur wenigen Millimetern liegen.

Zum Zeitpunkt $t = t_0$ gilt speziell mit dem Volumen $d\Omega_0$ des repräsentativen Elementarvolumens in der Ausgangskonfiguration:

$$\phi_{S0} = \frac{d\Omega_{S0}}{d\Omega_0}, \qquad \phi_{F0} = \frac{d\Omega_{F0}}{d\Omega_0}. \tag{2}$$

Hier und im Folgenden werden mit den Indizes S und F entsprechend Variablen bezüglich des Festkörperskeletts bzw. des Porenfluids gekennzeichnet. Eine fehlende Indizierung weist auf Variablen zur Beschreibung des Kontinuums hin. Zudem werden im Weiteren analoge Definitionen bezüglich verschiedener Konfigurationen des physikalischen Körpers nicht mehrfach angegeben.

Der Volumenanteil ϕ_F des Porenfluids wird als Porosität bezeichnet. Aus der oben erwähnten Annahme eines stets vollständig mit dem Fluid gefüllten Festkörperskeletts folgt im Rahmen des Konzepts der Volumenanteile die Sättigungsbedingung

$$d\Omega = d\Omega_S + d\Omega_F \qquad \Rightarrow \qquad \phi_S + \phi_F = 1, \tag{3}$$

die eine Zwangsbedingung für die Bewegungszustände der Konstituierenden darstellt.

Eine weitere wichtige Zwangsbedingung verkörpert in der TPM die Annahme von Inkompressibilität der Konstituierenden, worauf später im Detail eingegangen wird. Die Frage der Kompressibilität bzw. Inkompressibilität eines Materials ist eng mit der (möglichen) Änderung seiner Dichte verbunden. Im Zusammenhang mit dem Konzept der Volumenanteile werden zwei verschiedene Definitionen der Massedichte verwendet. Für die so genannte *effektive* (oder auch *realistische*) Dichte werden die Masseelemente dm_S bzw. dm_F der Konstituierenden auf deren partiale Volumenelemente bezogen.

$$\varrho_{SR} = \frac{dm_S}{d\Omega_S}, \qquad \varrho_{FR} = \frac{dm_F}{d\Omega_F} \tag{4}$$

[72] R.L. Spilker, J.-K. Suh and V.C. Mow. A finite element formulation of the nonlinear biphasic model for articular cartilage and hydrated soft tissues including strain-dependent permeability. *J. Biomech. Eng.*, 114:191-201, 1992.

[73] J.K. Suh, R.L. Spilker, M.H. Holmes and V.C. Mow. A nonlinear biphasic finite element formulation for soft hydrated tissues under finite deformation. In: *1989 advances in bioengineering*, B. Rubinsky (Ed.), BED-Vol. 15, ASME, New York, 99-100, 1989.

[74] K. von Terzaghi. Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. *Sitz. Akad. Wissen. Wien*, Math.-Naturw. Kl. Abt. IIa, 132:125-138, 1923.

[75] C. Truesdell. *Rational Thermodynamics*. Springer, Berlin [u. A.], 2. Auflage, 1984.

[76] C. Truesdell and R.A. Toupin. The classical field theories. In: *Handbuch der Physik*, Vol. III/1, S. Flügge (Ed.), Springer, Berlin, 226-902, 1960.

[77] A. Truty and T. Zimmermann. Stabilized mixed finite element formulations for materially nonlinear partially saturated two-phase media. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 195:1517-1546, 2006.

[78] W. Wang and O. Kolditz. Object-oriented finite element analysis of thermo-hydro-mechanical (THM) problems in porous media. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 69:162-201, 2007.

[79] K. Wilmánski. Porous media at finite strains: The new model with balance equation for porosity. *Arch. Mech.*, 48:591-628, 1996.

[80] W. Wunderlich, H. Cramer, R. Findeiß and G. Steinl. Numerical Simulation of Localization Phenomena in Geomechanics by Extended Continuum Formulations. In: *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*, E. Stein (Ed.), John Wiley & Sons, Chichester, 109-146, 2003.

[81] H. Yao and W.Y. Gu. Three-dimensional inhomogeneous triphasic finite-element analysis of physical signals and solute transport in human intervertebral disc under axial compression. *J. Biomech.*, 40:2071-2077, 2007.

[82] Y. Yokoo, K. Yamagata and H. Nagaoka. Finite element method applied to Biot's consolidation theory. *Soils and Foundation, Japanese Soc. Soil Mech. Found. Engng.*, 11:29-46, 1971.

[83] O.C. Zienkiewicz, C. Humpheson and R.W. Lewis. A unified approach to soil mechanics problems including plasticity and visco-plasticity. In: *Finite Elements in Geomechanics*, G. Gudehus (Ed.), John Wiley & Sons, London, 1977.

[59] R.N. Natarajan, J.R. Williams, S.A. Lavender and G.B.J. Andersson. Poro-elastic finite element model to predict the failure progression in a lumbar disc due to cyclic loading. *Comp. Struct.*, 85:1141-1151, 2007.

[60] D.W. Nicholson and B. Lin. On the tangent modulus tensor in hyperelasticity. *Acta Mechanica*, 131:121-132, 1998.

[61] A. Peréz del Palomar and M. Doblaré. On the numerical simulation of the mechanical behaviour of articular cartilage. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 67:1244-1271, 2006.

[62] P.J. Prendergast, W.D. van Driel and J.-H. Kuiper. A comparison of finite element codes for the solution of biphasic poroelastic problems. *J. Eng. Med. Proc. I. Mech. E.: Part H*, 210:124-130, 1996.

[63] P. Prevost. Mechanics of continuous porous media. *Int. J. Eng. Sci.*, 18:787-800, 1980.

[64] R.S. Sandhu and E.L. Wilson. Finite element analysis of flow in saturated porous media. *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, 95/EM3:641-652, 1969.

[65] L. Sanavia, F. Pesavento and B.A. Schrefler. Finite element analysis of non-isothermal multiphase geomaterials with application to strain localisation simulation. *Comput. Mech.*, 37:331-348, 2006.

[66] L. Sanavia, B.A. Schrefler and P. Steinmann. Geometrical and material non-linear analysis of fully and partially saturated porous media. In: *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*, W. Ehlers and J. Bluhm (Eds.), Springer, Berlin, 341-381, 2002.

[67] R.L. Schiffmann, A.T.F. Chen and J.C. Jordan. An analysis of consolidation theories. *J. Soil Mech. Found. Div. ASCE*, 95/SM1:285-312, 1969.

[68] B.R. Simon. Multiphase poroelastic finite element models for soft tissue structures. *Appl. Mech. Rev.*, 45:191-218, 1992.

[69] B.R. Simon, J.S.S. Wu and J.H. Evans. Poroelastic mechanical models for the intervertebral disc. In: *1983 advances in bioengineering*, D. Bartel (Ed.), ASME Winter Annual Meeting, 106-107, 1983.

[70] S. Sivaloganathan, M. Stastna, G. Tenti and J.M. Drake. Biomechanics of the brain: A theoretical and numerical study of Biot's equations of consolidation theory with deformation-dependent permeability. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 40:1149-1159, 2005.

[71] J.C. Small, J.R. Booker and E.H. Davis. Elastoplastic consolidation of soil. *Int. J. Sol. Struct.*, 12:431-448, 1976.

Die effektive Dichte zeigt eine Analogie zur Definition der Massedichte im Einphasenmedium. Im Gegensatz dazu werden bei der so genannten *partialen* (bzw. *globalen*) Dichte die Masseelemente der Konstituierenden auf das Volumenelement des Kontinuums bezogen.

$$\varrho_S = \frac{dm_S}{d\Omega}\,, \qquad \varrho_F = \frac{dm_F}{d\Omega} \tag{5}$$

Mit den Volumenanteilen (1) kann ein Zusammenhang zwischen der effektiven und der partialen Dichte der Konstituierenden hergestellt werden.

$$\varrho_S = \phi_S\,\varrho_{SR}\,, \qquad \varrho_F = \phi_F\,\varrho_{FR} \tag{6}$$

Wegen der zeitlich veränderlichen Volumenteile folgt aus Beziehung (6), dass sich eine intrinsisch inkompressible Konstituierende (konstante effektive Massedichte) unter äußerer Belastung bezüglich des Kontinuums kompressibel verhalten kann. Die mittlere Dichte der (homogenisierten) porösen Gesamtstruktur beträgt

$$\varrho = \varrho_S + \varrho_F\,. \tag{7}$$

Da in der Realität die einzelnen Bestandteile eines Mehrphasenmediums häufig nicht mischbar sind, stellt die TPM eine physikalisch sinnvolle Erweiterung der Mischungstheorie dar. Der Vorteil dieses Zuganges liegt in der messtechnischen Erfassbarkeit der Volumenanteile einzelner Konstituierenden, z. B. der Porosität, am realen Objekt. Mit der Definition (1) wird jedoch nochmals verdeutlicht, dass die (lokal messbaren) Volumenanteile Materialcharakteristika der Mikroebene im Makromodell darstellen, ohne die zugrunde liegende Struktur (Porengröße, Porenverteilung etc.) explizit zu erfassen.

2.1 Kinematik

Die Beschreibung der Kinematik eines Mehrphasenmediums basiert in der Mischungstheorie auf zwei fundamentalen Annahmen:

1. Jedes Teilchen an der Stelle $\boldsymbol{x}$ der Momentankonfiguration des Körpers besteht zum aktuellen Zeitpunkt t, im Sinne einer Modellvorstellung, gleichzeitig aus Materie aller Konstituierenden.
2. Alle Bestandteile des Gemisches sind durch eigenständige Bewegungszustände ihrer materiellen Punkte gekennzeichnet, unabhängig vom Bewegungszustand der anderen Konstituierenden.

In diesem Zusammenhang ist die Bewegung (Deformation) des überlagerten Kontinuums (poröse Gesamtstruktur) durch individuelle Bewegungszustände der einzelnen Konstituierenden und Interaktionen zwischen diesen gekennzeichnet. Wie

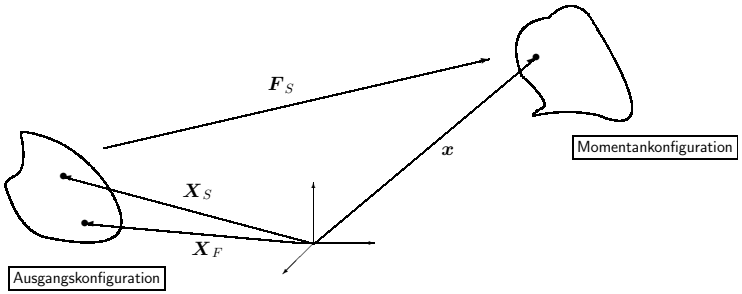


Abb. 1: Kinematik eines Zweiphasenmediums. Konfigurationen des Kontinuums und Bewegung materieller Punkte der beiden Konstituierenden.

in Abb. 1 am Beispiel eines Zweiphasenmaterials verdeutlicht wird, nehmen als Konsequenz der obigen Annahmen die zum aktuellen Zeitpunkt t in $\boldsymbol{x}$ befindlichen materiellen Punkte des Festkörperskeletts und des Porenfluids in der Ausgangskonfiguration zum Zeitpunkt $t = t_0$ unterschiedliche Positionen ein. Durch die unterschiedlichen Bewegungszustände der materiellen Punkte verlassen sie ihre gemeinsame Position $\boldsymbol{x}$ auch wieder für Konfigurationen zukünftiger Zeitpunkte $t + \Delta t$ auf differierenden Bahnen.

In der Regel wird im Rahmen der gemischten FE-Strategien der Theorie poröser Medien für die Kinematik des Festkörperskeletts die Lagrangesche Beschreibung verwendet, für die Kinematik des Porenfluids die Eulersche. Wie Lewis und Schrefler [50] am Beispiel quasistatischer und dynamischer Probleme bei großen Verzerrungen darstellen, können dabei FE-Beziehungen in updated Lagrangescher Betrachtungsweise angegeben werden. Zur Beseitigung der Mängel einer inkonsistenten Betrachtung der Kinematik der unterschiedlichen Konstituierenden wird von Bourgeois und Dormieux [10] sowie Coussy [22] und von Wilmánski [79] eine verallgemeinerte Lagrangesche (materielle) Darstellung der Bilanzgleichungen der Theorie poröser Medien mit der Ausgangskonfiguration des Festkörperskeletts als Bezugskonfiguration für die Bewegung des Kontinuums vorgeschlagen. Während diese Konfiguration für die Festkörperdeformation die natürliche materielle Bezugskonfiguration ist, wird die Bewegung des Porenfluids relativ zum Festkörperskelett betrachtet. Diese Vorgehensweise ist auch durch die oben erwähnte Annahme gerechtfertigt, dass der Kontrollraum zur Homogenisierung des porösen Mediums durch das Festkörperskelett gebildet wird. Zudem können sich materielle Punkte des Porenfluids zum Zeitpunkt $t = t_0$ auch außerhalb des betrachteten Kontrollraumes aufhalten, wenn Ein- oder Durchströmprozesse vorkommen, was die Verwendung der Ausgangskonfiguration des Fluids als Bezugskonfiguration einschränkt.

[47] W.M. Lai, V.C. Mow and V. Roth. Effects of nonlinear strain dependent permeability and rate of compression on the stress behavior of articular cartilage. *J. Biomech. Eng.*, 103:61-66, 1981.

[48] R. Lancellotta. Coupling between the evolution of a deformable porous medium and the motion of fluids in the connected porosity. In: *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*, W. Ehlers and J. Bluhm (Eds.), Springer, Berlin, 199-225, 2002.

[49] R.W. Lewis, G.K. Roberts and O.C. Zienkiewicz. A non-linear flow and deformation analysis of consolidation problems. In: *Numerical Methods in Geomechanics*, Vol. 2, C.S. Desai (Ed.), ASCE, New-York, 1106-1118, 1976.

[50] R.W. Lewis and B.A. Schrefler. *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. John Wiley & Sons, Chichester, 1998 (2nd ed.).

[51] X. Li, Z. Liu, R.W. Lewis and K. Suzuki. Mixed finite element method for saturated poroelastoplastic media at large strains. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 57:875-898, 2003.

[52] X. Li, Z. Liu and R.W. Lewis. Mixed finite element method for coupled thermo-hydro-mechanical process in poro-elasto-plastic media at large strains. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 64:667-708, 2005.

[53] A.F. Mak. Unconfined compression of hydrated soft viscoelastic tissues: A biphasic poroviscoelastic analysis. *Biorheology*, 23:371-383, 1986.

[54] A. Meyer. *Grundgleichungen und adaptive Finite-Elemente-Simulation bei "Großen Deformationen"*. Chemnitz Scientific Computing Preprint CSC/07-02, TU Chemnitz, 2007.

[55] A. Meyer and T. Steidten. *Improvements and experiments on the Bramble-Pasciak type CG for mixed problems in elasticity.* Preprint SFB393/01-12, TU Chemnitz, 2001.

[56] A. Meyer and P. Steinhorst. *Überlegungen zur Parameterwahl im Bramble-Pasciak-CG fï¿½r gemischte FEM.* Preprint SFB393/05-07, TU Chemnitz, 2005.

[57] V.C. Mow, S.C. Kuei, W.M. Lai and C.G. Armstrong. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments. *J. Biomech. Eng.*, 102:73-84, 1980.

[58] M.N.L. Narasimhan. *Principles of continuum mechanics*. Wiley, New York, 1993.

[37] U.-J. Görke, H. Günther, A. Bucher and R. Kreißig. An anisotropic viscoelastic soft tissue model at large strains. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)*, 6(1):129-130, 2006.

[38] U.-J. Görke, H. Günther, R. Kreißig. Numerical studies on the mechanical behavior of native soft tissue and engineered constructs with special attention to the simulation of remodeling processes, *Int. J. Artif. Organs*, 28/4:302-303, 2005.

[39] U.-J. Görke, H. Günther and M.A. Wimmer. Multiscale FE-modeling of native and engineered articular cartilage tissue. In: *Proceedings of the IV European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, ECCOMAS 2004, Jyväskylä, 2004.

[40] U.-J. Görke, H. Günther and M.A. Wimmer. A poroviscoelastic overlay model for finite element analyses of articular cartilage at large strains. In: *Computational Mechanics – Solids, Structures and Coupled Problems*, Proceedings of III European Conference on Computational Solid and Structural Mechanics, C.A.M. Soares, J.A.C. Martins, H.C. Rodrigues, C.A.B. Pina, C.M.M. Soares, E.B.R. Pereira and J. Folgado (Eds.), Springer, Dordrecht, 2006.

[41] U.-J. Görke, M.A. Wimmer, M. Alini, E. Schneider and H. Günther. Multiscale finite element modeling in tissue engineering of articular cartilage. *European Cells and Materials*, 12(1):19, 2006.

[42] M.H. Holmes. Finite deformation of soft tissue: Analysis of a mixture model in uni-axial compression. *J. Biomech. Eng.*, 108:372-381, 1986.

[43] J.M. Huyghe, M.M. Molenaar and F.P.T. Baajens. Poromechanics of compressible charged porous media using the theory of mixtures. *J. Biomech. Eng.*, 129:776-785, 2007.

[44] C.T. Hwang, N.R. Morgenstern and D.W. Murray. On solution of plane strain consolidation problems by finite element methods. *Can. Geotech. J.*, 8:109-118, 1971.

[45] J. Korsawe, G. Starke, W. Wang and O. Kolditz. Finite element analysis of poro-elastic consolidation in porous media: Standard and mixed approaches. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 195:1096-1115, 2006.

[46] R. Kreißig, A. Bucher and U.-J. Görke. Hierarchical adaptive FEM at finite elastoplastic deformations, In: *Parallel Algorithms and Cluster Computing – Implementations, Algorithms, and Applications(Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering)*, K.H. Hoffmann and A. Meyer (Eds.), Springer, Berlin, 105-127, 2006.

Das Konzept der verallgemeinerten materiellen Darstellung zur Beschreibung großer Verzerrungen fluidgesättigter poröser Medien wird in der vorliegenden Arbeit konsequent verfolgt. In diesem Zusammenhang werden im Weiteren lediglich Variablen eingeführt, die für eine konsistente Darstellung der notwendigen Bilanz- und Materialgleichungen erforderlich sind. Herleitungen werden dabei fallweise in der (physikalisch relevanten) Momentankonfiguration ausgeführt und die anschließende Transformation der Variablen oder Beziehungen in die Ausgangskonfiguration des Festkörperskeletts erläutert.

In der Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt $t = t_0$ stellt der betrachtete homogenisierte poröse Körper eine Menge $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ materieller Punkte mit dem Rand Γ_0 dar (ein Gebiet im dreidimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$). Der Rand wird jeweils in Bereiche Γ_{0D} mit Dirichlet-Randbedingungen und Γ_{0N} mit Neumann-Randbedingungen bezüglich der unabhängigen Systemvariablen Verschiebungen des Festkörperskeletts und Porenwasserdruck[3] unterteilt[4]. Die materiellen Punkte des Festkörperskeletts werden eindeutig durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{X}_S \in \Omega_0$ bzw. ihre Koordinaten (X_{S1}, X_{S2}, X_{S3}) charakterisiert.

Zum aktuellen Zeitpunkt t nimmt der Körper das Gebiet $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ – die Momentankonfiguration – ein. Hier werden die materiellen Punkte aller Konstituierenden jeweils durch die gleichen Ortsvektoren $\boldsymbol{x}$ bzw. ihre Koordinaten (x_1, x_2, x_3) bestimmt. Unter der Bewegung der Konstituierenden wird die zeitliche Aufeinanderfolge von Konfigurationen verstanden. Durch die Bewegungsgesetze

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_S(\boldsymbol{X}_S, t)\,, \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_F(\boldsymbol{X}_F, t) \tag{8}$$

wird für die materiellen Punkte des Festkörperskeletts sowie des Porenfluids zu jedem Zeitpunkt t ein eindeutiger Zusammmenhang zwischen ihrer aktuellen Position im $\mathbb{E}^3$ und ihrer Zuordnung im Referenzzustand hergestellt. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung zwischen Punkten des physikalischen Körpers und materiellen Punkten im $\mathbb{R}^3$ für alle t folgt die Gültigkeit der inversen Bewegungsgesetze

$$\boldsymbol{X}_S = \boldsymbol{\varphi}_S^{-1}(\boldsymbol{x}, t)\,, \qquad \boldsymbol{X}_F = \boldsymbol{\varphi}_F^{-1}(\boldsymbol{x}, t)\,. \tag{9}$$

Den Ausgangspunkt der kinematischen Betrachtungen zur Herleitung konstitutiver Gesetze bei großen Verzerrungen bildet der Deformationsgradient

$$\boldsymbol{F}_S = (\mathrm{Grad}_S\, \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}, \tag{10}$$

[3] Unabhängig von den realen Porenfluiden hat sich in der deutschsprachigen Literatur der Begriff *Porenwasserdruck* für die Wirkung des den porösen Festkörper ausfüllenden Fluids durchgesetzt. Im Englischen wird der Ausdruck *pore pressure* benutzt.

[4] Im Folgenden sollen folgende Bezeichnungen für die einzelnen Randabschnitte verwendet werden: Γ_{0DU} – Bereich mit vorgegebenen Verschiebungen des Festkörperskeletts, Γ_{0NU} – Segment mit eingeprägten äußeren mechanischen Belastungen (flächenförmig verteilte Kräfte), Γ_{0Dp} – Abschnitt mit vorgegebenem Porenwasserdruck, Γ_{0Np} – Randregion mit eingeprägtem Fluidstrom pro Zeit- und Flächeneinheit. Es gilt zudem $\Gamma_0 = \Gamma_{0DU} \cup \Gamma_{0NU} = \Gamma_{0Dp} \cup \Gamma_{0Np}$ und $\Gamma_{0DU} \cap \Gamma_{0NU} = \Gamma_{0Dp} \cap \Gamma_{0Np} = \emptyset$.

welcher ein materielles Linienelement des Festkörperskeletts von dessen Ausgangs- in die Momentankonfiguration abbildet. Hierbei stellt $\boldsymbol{u}_S = \boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x}, t)$ den Verschiebungsvektor materieller Teilchen des Festkörperskeletts (die primäre kinematische Variable der TPM) als Funktion der räumlichen Koordinaten und der Zeit dar. Mit dem Bewegungsgesetz (8_1) kann dieser auch als Funktion der Koordinaten der Ausgangskonfiguration und der Zeit formuliert werden:

$$\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{\varphi}_S(\boldsymbol{X}_S, t), t) \;=\; \boldsymbol{U}_S(\boldsymbol{X}_S, t) \;=\; \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}_S, t) \;-\; \boldsymbol{X}_S\,. \tag{11}$$

Dabei ist die Gleichheit der Vektorfelder $\boldsymbol{u}_S$ und $\boldsymbol{U}_S$ (die unterschiedliche Vektorfunktionen sind) in dem Sinne zu verstehen, dass bei oben beschriebener Operation die speziellen Charakteristika des vektoriellen Verschiebungsfeldes (wie Länge und Richtung der Vektoren) vollständig erhalten bleiben. Es wird lediglich als Funktion unterschiedlicher Koordinaten dargestellt.

Im Rahmen des Wechsels des Systems der als unabhängige Variable gewählten Ortskoordinaten ändern sich in allgemeinen krummlinigen Koordinaten adäquat sowohl die Basisvektoren als auch die Vektorkoordinaten. Eine solche Transformation kann auf beliebige Vektoren oder Tensoren angewandt werden. Sie macht sich häufig erforderlich, wenn in einer Beziehung physikalische Größen miteinander verknüpft werden sollen (z. B. im Rahmen einer Summation oder Integration), die auf unterschiedliche Punkte im $\mathbb{E}^3$ bezogen sind. Für die Vektor- bzw. Tensorkoordinaten wird die Transformation mit dem so genannten *Shifter* ausgeführt (vgl. [58] u. a.). Der Shifter ist ein zweistufiger Zweipunkttensor, dessen Koordinaten als Skalarprodukte der Basisvektoren der verschiedenen Koordinatensysteme definiert sind. In kartesischen Systemen mit zueinander parallelen Koordinatenachsen stellt der Shifter den Einheitstensor dar. Im Weiteren sollen o.E.d.A. entsprechende kartesische Koordinatensysteme betrachtet werden. Für diesem Fall vereinfachen sich zudem Ableitungen nach den Ortskoordinaten zu partiellen Ableitungen im Gegensatz zur Verwendung kovarianter Ableitungen in allgemeinen krummlinigen Koordinaten. Der Deformationsgradient (10) kann mit (11) somit auch wie folgt dargestellt werden:

$$\boldsymbol{F}_S \;=\; (\mathrm{Grad}_S\, \boldsymbol{U}_S)^{\mathrm{T}} \;+\; \boldsymbol{I}\,. \tag{12}$$

Analog zur Betrachtung von Einphasenmedien stellt die Determinante J_S des Deformationsgradienten

$$J_S \;=\; \det \boldsymbol{F}_S \;=\; \frac{d\Omega}{d\Omega_0} \tag{13}$$

das Volumenverhältnis des („verschmierten“) Festkörperanteils eines repräsentativen Elementarvolumens bezüglich der Momentan- und Ausgangskonfiguration dar.

Mit Hilfe des Deformationsgradienten können unterschiedliche Verzerrungsmaße formuliert werden, die sich auf die Ausgangs- oder auch die Momentankonfiguration beziehen. Da das Materialgesetz in der verallgemeinerten materiellen

[26] W. Ehlers. Foundations of multiphasic and porous materials. In: *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*, W. Ehlers and J. Bluhm (Eds.), Springer, Berlin, 4-86, 2002.

[27] W. Ehlers and J. Bluhm. *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*. Springer, Berlin, 2002.

[28] W. Ehlers and G. Eipper. Finite Elastic Deformation in Liquid-Saturated and Empty Porous Solids. *Transport in Porous Media*, 34:179-191, 1999.

[29] W. Ehlers and B. Markert. A linear viscoelastic biphasic model for soft tissues based on the theory of porous media. *J. Biomech. Eng.*, 123:418-424, 2001.

[30] W. Ehlers, B. Markert and N. Karajan. Continuum mechanical modeling and numerical analysis of spinal discs. In: *Proceedings of the 1st GAMM Seminar on Continuum Biomechanics*, W. Ehlers, B. Markert (Eds.), Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart, Stuttgart, 35-45, 2005.

[31] G. Eipper. *Theorie und Numerik finiter elastischer Deformationen in fluidgesättigten porösen Festkörpern*. Forschungsbericht aus dem Institut für Mechanik, Lehrstuhl II, Universität Stuttgart, 1998.

[32] Y.-C. Fung. *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*. Springer, New-York, 2nd ed. 1993.

[33] J. Ghaboussi and E.L. Wilson. Flow of compressible fluid in porous elastic media. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 5:419-442, 1973.

[34] U.-J. Görke, A. Bucher and R. Kreißig. *Zur Numerik der inversen Aufgabe für gemischte (u/p) Formulierungen am Beispiel der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen*. Chemnitz Scientific Computing Preprint CSC/07-07, TU Chemnitz, 2007.

[35] U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig, H. Günther and M.A. Wimmer. Experimental-numerical studies of impaction loading of osteochondral grafts. In: *Proceedings of the* 2^{nd} *GAMM Seminar on Continuum Biomechanics*, W. Ehlers, N. Karajan (Eds.), VGE Verlag, Essen, 21-32, 2007.

[36] U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig and D. Michael. *Ein Beitrag zur Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen einschließlich der Materialmodellierung bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen mit Hilfe der FEM*. Preprint SFB393/00-09, TU Chemnitz, 2000.

[14] A. Bucher, U.-J. Görke and R. Kreißig. A material model for finite elasto-plastic deformations considering a substructure. *Int. J. Plast.*, 20:619-642, 2004.

[15] A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke and R. Kreißig. *Entwicklung von adaptiven Algorithmen für nichtlineare FEM.* Preprint SFB393/04-03, TU Chemnitz, 2004.

[16] A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke and R. Kreißig. A contribution to error estimation and mapping algorithms for a hierarchical adaptive FE-strategy in finite elastoplasticity. *Comp. Mech.*, 36(3):182-195, 2005.

[17] A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke and R. Kreißig. A comparison of mapping algorithms for hierarchical adaptive FEM in finite elasto-plasticity. *Comp. Mech.*, 39(4):521-536, 2007.

[18] A. Bucher, U.-J. Görke, P. Steinhorst, R. Kreißig and A. Meyer. *Ein Beitrag zur adaptiven gemischten Finite Elemente Formulierung der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen.* Chemnitz Scientific Computing Preprint CSC/07-06, TU Chemnitz, 2007.

[19] J.P. Carter, J.R. Booker and J.C. Small. The analysis of finite elasto-plastic consolidation. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 2:107-129, 1979.

[20] Y. Chen, X. Chen and T. Hisada. Non-linear finite element analysis of mechanical electrochemical phenomena in hydrated soft tissues based on triphasic theory. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 65:147-173, 2006.

[21] J.T. Christian and J.W. Boehmer. Plane strain consolidation by finite elements. *J. Soil Mech. Found. Div. ASCE*, 96/(SM4):1435-1457, 1970.

[22] O. Coussy. Thermodynamics of saturated porous solids in finite deformations. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 8:1-14, 1989.

[23] H. Cramer, R. Findeiß and W. Wunderlich. Time adaptive analysis of saturated soil by a discontinuous-Galerkin method. In: *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*, W. Ehlers and J. Bluhm (Eds.), Springer, Berlin, 251-274, 2002.

[24] C.S. Desai and T.H.J. Siriwardane. Subsidence due to consolidation including nonlinear behaviour. In: *Evaluation and Prediction of Subsidence*, S. K. Saxena (Ed.), ASCE, New York, 500-515, 1979.

[25] W. Ehlers. Grundlegende Konzepte in der Theorie Poröser Medien. *Technische Mechanik*, 16:63-76, 1996.

Beschreibungsweise formuliert werden soll (bezüglich der Ausgangskonfiguration des Festkörperskeletts), sind die relevanten materiellen Verzerrungsmaße der Rechts-Cauchy-Green Tensor

$$\boldsymbol{C}_S = \boldsymbol{F}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_S = \mathrm{Grad}_S\,\boldsymbol{U}_S + (\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S)^{\mathrm{T}} + \mathrm{Grad}_S\,\boldsymbol{U}_S\,(\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{I} \quad (14)$$

und der Greensche Verzerrungstensor

$$2\boldsymbol{E}_S = \boldsymbol{C}_S - \boldsymbol{I} = \mathrm{Grad}_S\,\boldsymbol{U}_S + (\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S)^{\mathrm{T}} + \mathrm{Grad}_S\,\boldsymbol{U}_S\,(\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S)^{\mathrm{T}}\,. \quad (15)$$

Aus den unterschiedlichen Bewegungsgesetzen der materiellen Punkte der einzelnen Konstituierenden folgt, dass die verschiedenen Phasen zum Zeitpunkt t im Punkt $\boldsymbol{x}$ unterschiedliche Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_S(\boldsymbol{x},t)$ (feste Phase) und $\boldsymbol{v}_F(\boldsymbol{x},t)$ (fluide Phase) aufweisen. Für die räumliche Formulierung der Geschwindigkeit der festen Phase wird, wie in der Literatur üblich, im Folgenden die Beziehung

$$\boldsymbol{v}_S(\boldsymbol{x},t) = (\boldsymbol{u}_S)'_S \quad (16)$$

verwendet[5]. In diesem Zusammenhang ist ergänzend zu erwähnen, dass für die Beschreibung von Transport- und Deformationsvorgängen in Mehrphasenmedien wegen der unterschiedlichen Bewegungszustände der Konstituierenden unterschiedliche materielle Ableitungen für räumliche Funktionen zu definieren sind. So gilt etwa bezüglich der betrachteten Zweiphasenformulierung für eine beliebige skalare Funktion $\xi(\boldsymbol{x},t)$:

$$\xi'_S = \frac{d_S\,\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathrm{grad}\,\xi)^T\,\boldsymbol{v}_S\,, \quad (17a)$$

$$\xi'_F = \frac{d_F\,\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathrm{grad}\,\xi)^T\,\boldsymbol{v}_F\,. \quad (17b)$$

Analoge Definitionen werden für vektorielle sowie tensorielle Variablen geprägt.

Als charakteristische kinematische Variable zur Beschreibung der Fluidbewegung in den Porenräumen wird in der TPM die so genannte *Sickergeschwindigkeit* definiert. Sie stellt die Relativgeschwindigkeit des strömenden Fluids gegenüber dem sich deformierenden Festkörperskelett dar und ist bezüglich dessen räumlicher Koordinaten wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{w}_F = \boldsymbol{v}_F - \boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}_F - (\boldsymbol{u}_S)'_S\,. \quad (18)$$

[5] Entsprechend den gewöhnlich in der Literatur der Theorie poröser Medien verwendeten Bezeichnungen werden die materiellen Zeitableitungen räumlicher Größen durch ein hoch gestelltes $()'$ und einen, den Bezug zur betrachteten Konstituierenden vermittelnden, tief gestellten Index S bzw. F beschrieben.

Mit (17a) und (18) kann die materielle Zeitableitung einer beliebigen skalaren Funktion $\xi(\boldsymbol{x},t)$ bezüglich der Bewegung eines materiellen Teilchens des Porenfluides auch durch die materielle Zeitableitung mit Bezug zum Festkörperskelett ausgedrückt werden.

$$\xi'_F \;=\; \xi'_S \;+\; (\operatorname{grad}\xi)^T\,\boldsymbol{w}_F \tag{19}$$

Im Rahmen der verallgemeinerten materiellen Darstellung ist der Beschreibung der Relativbewegung zwischen Fluid und sich deformierendem Festkörperskelett besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Mit der dazu erforderlichen Transformation der physikalisch relevanten Beziehung (18) wird die Relativgeschwindigkeit des Abbildes des zur Zeit t in $\boldsymbol{x}$ befindlichen materiellen Fluidteilchens in der Ausgangskonfiguration des Festkörperskeletts charakterisiert. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Position dieses Teilchens zum Zeitpunkt $t = t_0$ nicht notwendigerweise mit der Position $\boldsymbol{X}_S$ des materiellen Festkörperteilchens übereinstimmen muss, dessen Lage zur Zeit t durch den gleichen Ortsvektor $\boldsymbol{x}$ beschrieben wurde. Für die Transformation von (18) wird der relative Massefluss des Fluides durch beliebige materielle Flächenelemente des Festkörperskeletts betrachtet. Als skalare Größe darf dieser seinen Betrag durch die Transformation nicht ändern. Somit gilt:

$$\varrho_F \boldsymbol{w}_F\,\mathfrak{n}\,d\Gamma \;=\; \varrho_{F0}\boldsymbol{W}_F\,\mathfrak{N}\,d\Gamma_0\,. \tag{20}$$

Hierbei stellen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{N}$ die Normalenvektoren der Flächenelemente $d\Gamma$ und $d\Gamma_0$ dar. Nach Anwendung der Nansonschen Formel zur Transformation von Flächenelementen

$$\mathfrak{n}\,d\Gamma \;=\; d\boldsymbol{\Gamma} \;=\; J_S\boldsymbol{F}_S^{-T}\,d\boldsymbol{\Gamma}_0 \;=\; J_S\boldsymbol{F}_S^{-T}\,\mathfrak{N}\,d\Gamma_0 \tag{21}$$

auf die Beziehung (20) folgt:

$$J_S\varrho_F\boldsymbol{F}_S^{-1}\,\boldsymbol{w}_F \;=\; \varrho_{F0}\boldsymbol{W}_F \;\overset{\text{def}}{=}\; \widetilde{\boldsymbol{W}}_F\,. \tag{22}$$

Die postulierte materielle Inkompressibilität des Porenfluids kann durch die Konstanz dessen effektiver Massedichte

$$\varrho_{FR} \;=\; \varrho_{FR0} \qquad\Rightarrow\qquad (\varrho_{FR})'_F \;=\; 0 \tag{23}$$

ausgedrückt werden. Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen effektiver und partialer Massedichte (6) und der Inkompressibilitätsbedingung (23) kann für die Sickergeschwindigkeit eine verallgemeinerte materielle Darstellung angegeben werden.

$$\phi_{F0}\boldsymbol{W}_F \;=\; J_S\boldsymbol{F}_S^{-1}\,\phi_F\boldsymbol{w}_F \tag{24}$$

Der Ausdruck $\widetilde{\boldsymbol{W}}_F = \phi_{F0}\boldsymbol{W}_F$ bzw. dessen Entsprechung in der Momentankonfiguration wird in der Literatur auch als Filtergeschwindigkeit bezeichnet. Sie stellt eine makroskopische Größe dar und charakterisiert im Rahmen der TPM

Literatur

[1] F. Armero. Formulation and Finite Element Implementation of a Multiplicative Model of Coupled Poro-Plasticity at Finite Strains under Fully Saturated Conditions. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 171:205-241, 1999.

[2] St. Benke. *Modellierung thermomechanischer Prozesse in porösen Medien*. Diss. RWTH Aachen, 2003.

[3] M.A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12:155-164, 1941.

[4] M.A. Biot. General solution of the equation of elasticity and consolidation for a porous material. *J. Appl. Mech.*, 23:91-96, 1956.

[5] R. de Boer. *Theory of porous media: Highlights in Historical Development and Current State*. Springer, Berlin, 2000.

[6] R. de Boer. Reflections on the development of the theory of porous media. *Appl. Mech. Rev.*, 56(6):R27-R42, 2003.

[7] R. de Boer and W. Ehlers. On the problem of fluid- and gas-filled elastoplastic solids. *Int. J. Sol. Struct.*, 22:1231-1242, 1986.

[8] R. de Boer and W. Ehlers. *Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme*. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 40, Universität-GH-Essen, 1986.

[9] R.I. Borja and E. Alarcón. A Mathematical Framework for Finite Strain Elasto-plastic Consolidation. Part 1: Balance Laws, Variational Formulation, and Linearization. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 122:145-171, 1995.

[10] E. Bourgeois and L. Dormieux. Consolidation of a nonlinear poroelastic layer in finite deformations. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 15:575-598, 1996.

[11] R.M. Bowen. Theory of Mixture. In: *Continuum Physics*, Vol. III, A.C. Eringen (Ed.), Academic Press, New York, 1-127, 1976.

[12] R.M. Bowen. Incompressible Porous Media Models by Use of the Theory of Mixtures. *Int. J. Eng. Sci.*, 18:1129-1148, 1980.

[13] J.H. Bramble and J.E. Pasciak. A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems. *Math. Comput.*, 50(181):1-17, 1988.

Zur Darstellung des Spannungstensors im Rahmen der TPM wurde, wie allgemein üblich, das Konzept der Effektivspannungen genutzt. Das Deformationsverhalten der festen Phase (verschmiertes Festkörperskelett) wird zunächst durch konstitutive Beziehungen der isotropen Hyperelastizität beschrieben. Eine Erweiterung auf anisotrop-elastische bzw. inelastische Modelle ist problemlos möglich. Für numerische Tests wurde von konstitutiver Seite zunächst der Neo-Hooke-Ansatz genutzt. An einem Literaturbeispiel aus dem Bereich der Biomechanik wurden die Leistungsfähigkeit und Stabilität der entwickelten Modelle und Algorithmen getestet. Dabei konnte eine sehr gute Übereinstimmung mit den Literaturergebnissen erzielt werden.

Auf der Basis der diskutierten Modelle wird im Weiteren eine Strategie zur Identifikation von Materialparametern für die TPM bei großen Verzerrungen realisiert. Diese beruht auf deterministischen Optimierungsverfahren mit halbanalytischer Sensitivitätsanalyse. Die Nutzung des vorgestellten FE-Kerns für die Lösung des direkten Problems gestattet dabei die Auswertung inhomogener Verschiebungsfelder. Für die Ermittlung der Ableitungen der primären Prozessvariablen nach den Materialparametern wird die Linearisierung des nach der Zeit diskretisierten Systems der schwachen Formulierungen durch die implizite Differenziation nach den Materialparametern ersetzt. In der Konsequenz ergeben sich für das direkte und das inverse Problem analoge Strukturen, die numerisch effektiv genutzt werden können.

die im Porenraum erfolgende Fluidströmung. Aus mathematischer Sicht ist $\widetilde{\boldsymbol{W}}_F$ die Abbildung des räumlichen Masseflussvektors $\widetilde{\boldsymbol{w}}_F = \varrho_F \boldsymbol{w}_F$ (Massefluss pro Zeit- und Flächeneinheit) in die Ausgangskonfiguration des Festkörperskeletts und hat keine physikalische Bedeutung.

2.2 Volumenbilanz des Kontinuums

Für die makroskopische Beschreibung der Bewegung eines fluidgesättigten porösen Mediums müssen Restriktionen bezüglich der Bewegungszustände der Konstituierenden aufgestellt werden. Im betrachteten Fall eignet sich dazu beispielsweise eine Auswertung der Sättigungsbedingung (3). Werden die materiellen Zeitableitungen der Volumenanteile in der Momentankonfiguration bezüglich einer der beiden Konstituierenden analysiert, so ergibt sich mit (3) unter Berücksichtigung von (19):

$$(\phi_S)'_S + (\phi_F)'_S = (\phi_S)'_S + (\phi_F)'_F - (\operatorname{grad}\phi_F)^T \boldsymbol{w}_F \,. \tag{25}$$

Mit den Beziehungen zwischen effektiver und partialer Massedichte (6) lassen sich die materiellen Zeitableitungen der Volumenanteile bezüglich der Bewegung eines materiellen Teilchens der zugehörigen Konstituierenden umformulieren.

$$\begin{aligned}(\phi_S)'_S = \left(\frac{\varrho_S}{\varrho_{SR}}\right)'_S &= \frac{1}{\varrho_{SR}}(\varrho_S)'_S - \frac{\varrho_S}{\varrho_{SR}^2}(\varrho_{SR})'_S \\ &= \frac{\phi_S}{\varrho_S}(\varrho_S)'_S - \frac{\phi_S}{\varrho_{SR}}(\varrho_{SR})'_S \qquad (26a)\end{aligned}$$

$$(\phi_F)'_F = \frac{\phi_F}{\varrho_F}(\varrho_F)'_F - \frac{\phi_F}{\varrho_{FR}}(\varrho_{FR})'_F \qquad (26b)$$

Bei Vernachlässigung von Masseaustausch zwischen den Bestandteilen eines fluidgesättigten porösen Mediums gilt für jede einzelne Konstituierende die Massebilanz[6].

[6] Auf eine ausführliche Darstellung von Bilanzgleichungen wird hier und im Folgenden generell verzichtet. Sie werden jeweils nur in der für die Konsistenz und das Verständnis der Ausführungen erforderlichen Form unter Berücksichtigung spezieller Restriktionen angegeben. Ein ausführlicher Überblick wird u. a. in einzelnen Beiträgen von [27] und weiteren dort zitierten Arbeiten dargeboten. Dabei wird von der Vorstellung ausgegangen, dass alle partialen Bilanzgleichungen für die Konstituierenden sowie die Bilanzgleichungen für das Kontinuum in Analogie zu den entsprechenden Beziehungen der klassischen Kontinuumsmechanik für Einphasenmedien formuliert werden können (siehe dazu auch die von Truesdell angegebenen so genannten *metaphysischen Prinzipien* [75]). In diesem Zusammenhang werden die Interaktionen zwischen den Konstituierenden durch zusätzliche so genannte *Austauschterme* (auch *Produktionsterme*) erfasst.

$$(\varrho_S)'_S + \varrho_S \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_S)'_S = 0 \tag{27a}$$

$$(\varrho_F)'_F + \varrho_F \operatorname{div} \boldsymbol{v}_F = 0 \tag{27b}$$

Nach Einsetzen der Beziehungen (26a), (26b) sowie (27a), (27b) in die Volumenbilanz (25) ergibt sich unter Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung (23) für das Porenfluid und einer analogen Beziehung zur Inkompressibilität des Festkörperskeletts:

$$\begin{aligned}(\phi_S)'_S + (\phi_F)'_S &= -\phi_S \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_S)'_S - \phi_F \operatorname{div} \boldsymbol{v}_F \\ &\quad - (\operatorname{grad}\phi_F)^T \boldsymbol{w}_F \\ &= -\phi_S \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_S)'_S - \phi_F \operatorname{div} \boldsymbol{w}_F \\ &\quad -\phi_F \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_S)'_S - (\operatorname{grad}\phi_F)^T \boldsymbol{w}_F \\ &= -(\phi_S + \phi_F) \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_S)'_S - \operatorname{div}(\phi_F \boldsymbol{w}_F)\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Bei der Herleitung wurde zusätzlich von der Nulladdition des Terms $\phi_F \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_S)'_S$ Gebrauch gemacht.

Mit der Sättigungsbedingung (3) folgt aus (28) die Volumenbilanz eines zweiphasigen, fluidgesättigten porösen Mediums in räumlicher Darstellung.

$$\operatorname{div}\left[(\boldsymbol{u}_S)'_S + \phi_F \boldsymbol{w}_F\right] = 0 \tag{29}$$

2.3 Definition von Spannungstensoren für das poröse Medium

Ausgehend von experimentellen Beobachtungen an fluidgesättigten Böden führte von Terzaghi [74] das heuristisch motivierte *Prinzip der Effektivspannungen* für die Spannungsberechnung in porösen Medien ein. Es besagt, dass der Spannungszustand in jedem Raumpunkt der Momentankonfiguration in mehrere Partialspannungen zerlegt werden kann. Ein Anteil wirkt gleichermaßen in den dort befindlichen materiellen Punkten des Fluids sowie des Festkörperskeletts als isotroper Tensor (hydrostatischer Zustand) und wird als *Porenwasserdruck* bezeichnet. Er beschreibt die Interaktion zwischen strömendem Fluid und sich deformierendem Festkörperskelett. Die Gesamtspannung im Kontinuum muss folglich durch weitere Anteile bestimmt werden, die durch die Geschichte der Fluidbewegung bzw. die Deformation des Festkörperskeletts definiert sind. Diese Spannungsanteile werden *effektive* bzw. *wirksame* Spannungen genannt. Während gezeigt werden kann, dass der Porenwasserdruck theoretisch wie ein Lagrangescher

5 Zusammenfassung und Ausblick

Eine Vielzahl praxisrelevanter Aufgabenstellungen, insbesondere aus den Bereichen Hydrologie, Geotechnologie und Biomechanik, ist durch Strömungsvorgänge fluider und/oder gasförmiger Medien in porösen Festkörperskeletten gekennzeichnet. In Abhängigkeit davon, ob die Strömungs- und Transportprozesse oder die Beanspruchung der festen Matrix im Mittelpunkt des betrachteten Anwendungsfalls stehen, gibt es, ausgehend von identischen Bilanzgleichungen, unterschiedliche Ansätze zur Modellierung gekoppelter Mehrphasen-Mehrkomponenten-Probleme. Zur primären Betrachtung des Deformationsverhaltens fluidgesättigter poröser Materialien hat sich beispielsweise die Theorie poröser Medien (TPM) bewährt, eine Kombination der klassischen Mischungstheorie mit dem Konzept der Volumenanteile. Hauptanwendungsgebiet dieser Modellierungsstrategie war zunächst die Bodenmechanik, verbunden mit der Konzentration auf Vorgänge bei kleinen Verzerrungen. Besonders mit dem Einsatz der TPM zur Simulation von Problemen der Biomechanik rückten Prozesse in den Vordergrund, bei denen große Verzerrungen auftreten. Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur thermodynamisch konsistenten Darstellung der theoretischen Grundlagen sowie der numerischen Realisierung der TPM im Rahmen einer gemischten Finite-Elemente-Formulierung unter Berücksichtigung großer Verzerrungen. In diesem Zusammenhang wird das mechanische Verhalten eines deformierbaren porösen Festkörperskeletts unter äußerer Belastung betrachtet, das vollständig mit einem fließfähigen, inkompressiblen Fluid gefüllt ist (gesättigtes poröses Medium).

Die Herleitung der gemischten Randwertaufgabe der TPM erfolgt auf der Basis der schwachen Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen und der Volumenbilanz des als „verschmiertes“ Kontinuum betrachteten Zweiphasenmediums in konsequent materieller Beschreibungsweise. Da im Ergebnis ein Gleichungssystem bezüglich der primären numerischen Prozessvariablen Verschiebungen der festen Phase und Porenwasserdruck sowie der Zeitableitung der Verschiebungen entsteht, wird dieses System zunächst mittels eines impliziten Einschritt-Verfahrens nach der Zeit diskretisiert. Die folgende konsistente Linearisierung der Randwertaufgabe führt in Zusammenhang mit einer geeigneten Ortsdiskretisierung zu einer inkrementell-iterativen Lösungstrategie im Rahmen einer Zweifeld-FE-Formulierung. Die entwickelten numerischen Algorithmen wurden in ein hauseigenes FE-Programm implementiert. Für die stabile Lösung werden Elementansätze nach Taylor-Hood in Verbindung mit einem effizienten iterativen Gleichungssystemlöser verwendet, der auf modernen Vorkonditionierungsstrategien basiert. Das hierarchische Konzept des Lösers kann zweckmäßig mit adaptiven Techniken zur Netzmodifikation verknüpft werden, deren Steuerung mittels eines residualen a posteriori Fehlerschätzers für das gemischte Feldproblem realisiert wird.

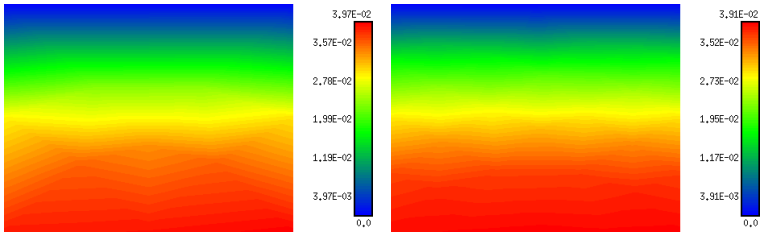


Abb. 12: Stauchen im Gesenk. Verteilung des Porenwasserdrucks (in MPa) nach jeweils 500 s. Vergleich der Ergebnisse für das Gitter mit 16 Dreieckelementen (links, Gitter s. Abb. 11, $p_{\max} = 0,0397\,\mathrm{MPa}$) bzw. 48 Dreieckelementen (rechts, Gitter s. Abb. 11, $p_{\max} = 0,0391\,\mathrm{MPa}$).

Zusammenfassend kann konstatiert werden, dass für das betrachtete Beispiel bei unterschiedlichen Vernetzungen eine gute bis sehr gute Übereinstimmung mit den Literaturergebnissen erzielt wurde. Während dabei die regelmäßigen Viereckgitter relativ unsensibel bezüglich der Elementgröße reagierten, zeigten die Ergebnisse bei Verwendung von unregelmäßigen Dreieckvernetzungen deutlichere Unterschiede. Das Originalnetz aus der Literatur zeichnet sich durch die Verwendung von Viereckelementen mit extremer Anisotropie aus. Da sich die größere Elementausdehnung jedoch in (lateraler) Richtung homogener Verteilungen der Prozess- und inneren Variablen erstreckt, wirkt sich das nicht negativ auf Genauigkeit und Stabilität des numerischen Prozesses aus. Beim Vergleich der maximalen Porenwasserdrücke bei maximaler Belastung kann festgestellt werden, dass gröbere Viereckgitter den realen (asymptotischen) Wert unterschätzen, gröbere Dreieckgitter jedoch überschätzen.

Multiplikator mit der Volumenbilanz (29) als Restriktion bezüglich der Geschwindigkeitszustände der Konstituierenden zu motivieren ist (vgl. [2,12,26] und andere Autoren), müssen für die Effektivspannungsanteile konstitutive Beziehungen formuliert werden.

Die Separation der Spannungsanteile geht konform mit der Beobachtung, dass das Formänderungs- und Festigkeitsverhalten des partialen Festkörpers allein durch den effektiven Spannungsanteil bestimmt wird. Das Effektivspannungskonzept war in der Literatur lange Zeit nicht unumstritten, fand jedoch mit der grundlegenden Annahme der materiellen Inkompressibilität der Konstituierenden allgemeine Akzeptanz. Die Voraussetzung partialer Inkompressibilität ist sinnvoll, da Porenfluide ohnehin in weiten Druckbereichen als inkompressibel gelten können (zumindest, sofern es sich um Flüssigkeiten handelt) und die Kompressibilität des Festkörpermaterials im Vergleich zur Kompressibilität des porösen Gesamtkörpers (bedingt durch die Veränderungen des Porenraumes) zu vernachlässigen ist.

Basierend auf den Darlegungen zum Effektivspannungskonzept können die Partialspannungen für das Festkörperskelett und das Porenfluid eines gesättigten porösen Zweiphasenmediums in räumlicher Darstellung verallgemeinernd in folgender Weise definiert werden:

$$\boldsymbol{\sigma}_S = -\phi_S\, p\, \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\sigma}_S^E\,, \tag{30a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_F = -\phi_F\, p\, \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\sigma}_F^E\,. \tag{30b}$$

Hierbei stellt p den Porenwasserdruck dar. Die Cauchyschen Spannungstensoren $\boldsymbol{\sigma}_S^E$ und $\boldsymbol{\sigma}_F^E$ bezeichnen die Effektivspannungsanteile für das Festkörperskelett bzw. das Porenfluid. Zusätzlich wird von der allgemein gültigen Konvention Gebrauch gemacht, dass im Festkörperskelett Zugspannungen als positiv angesehen werden, bezüglich des hydrostatischen Zustandes jedoch der Porenwasserdruck ein positives Vorzeichen erhält. Da nach den verwendeten Modellvorstellungen das partiale Ersatzkontinuum für das Festkörperskelett den gesamten Kontrollraum lückenlos ausfüllt, muss für $\boldsymbol{\sigma}_S^E$ auch bei materieller Inkompressibilität auf der Mikroebene (Festkörperskelett, vollständig mit Porenfluid gefüllt) ein Deformationsgesetz zur Beschreibung kompressiblen Verhaltens formuliert werden. Auf der Makroebene treten Volumenänderungen auf, die durch die Evolution des Porenraumes (Porosität) bei äußerer Belastung bedingt sind.

Der effektive Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}_S^E$ kann durch die Deformation des Festkörperskeletts sowie zusätzlich durch nichtmechanische Prozesse (z. B. (elektro)chemische Vorgänge in der Geo- bzw. Biomechanik) beeinflusst werden. Das führt zu einer weiteren additiven Aufspaltung dieser Partialspannung, deren einzelne Anteile durch konstitutive Gleichungen bestimmt werden. Wie im klassischen

phänomenologischen Fall des Einphasenkontinuums lassen sich geeignete Entwicklungsgleichungen unter Berücksichtigung der bekannten Axiome der Materialtheorie thermodynamisch konsistent unter Berücksichtigung einer häufig als *Clausius-Duhem-Ungleichung* bezeichneten Beziehung ableiten. Diese stellt eine Verknüpfung des ersten und zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik dar.

Ohne wiederum auf Details der Herleitung einzugehen, gelten für die partialen Clausius-Duhem-Ungleichungen der Konstituierenden eines fluidgesättigten porösen Mediums bei Vernachlässigung von Masseaustausch und Betrachtung isothermer Vorgänge folgende Beziehungen in räumlicher Darstellung:

$$\boldsymbol{\sigma}_S \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_S \;-\; \varrho_S \left(\bar{\psi}_S\right)'_S + \widehat{\varepsilon}_S \;-\; \widehat{\zeta}_S \;\;\geq\;\; 0\,, \tag{31a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_F \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_F \;-\; \varrho_F \left(\bar{\psi}_F\right)'_F + \widehat{\varepsilon}_F \;-\; \widehat{\zeta}_F \;\;\geq\;\; 0\,. \tag{31b}$$

Hierbei werden mit $\boldsymbol{d}_S$, $\boldsymbol{d}_F$ die partialen Deformationsgeschwindigkeitstensoren und mit $\bar{\psi}_S$, $\bar{\psi}_F$ die partialen Funktionen der freien Helmholtz-Energiedichte der Konstituierenden bezeichnet. Die Größen $\widehat{\varepsilon}_S$, $\widehat{\varepsilon}_F$ sowie $\widehat{\zeta}_S$, $\widehat{\zeta}_F$ stellen Zusatzterme für die innere Energie bzw. die Entropie dar, die den möglichen Austausch der entsprechenden Größen durch Wechselwirkungsmechanismen zwischen den Konstituierenden beschreiben. Sie folgen somit nicht der für die jeweilige Konstituierende gültigen Beziehung zwischen den partialen Größen freie Helmholtz-Energiedichte, innere Energie und Entropie. (vgl. [25,27] u. a.) Aus dem Vergleich der partialen Bilanzgleichungen mit denen für das Kontinuum folgen die zusätzlichen Restriktionen:

$$\widehat{\varepsilon}_S + \widehat{\varepsilon}_F \;\;=\;\; -\widehat{\boldsymbol{p}}_S \cdot \left(\boldsymbol{u}_S\right)'_S - \widehat{\boldsymbol{p}}_F \cdot \boldsymbol{v}_F\,, \tag{32}$$

$$\widehat{\zeta}_S + \widehat{\zeta}_F \;\;\geq\;\; 0 \tag{33}$$

mit den Impulsproduktionstermen $\widehat{\boldsymbol{p}}_S$ und $\widehat{\boldsymbol{p}}_F$[7]. Zusätzlich folgt aus dem Vergleich der Summe der aus den partialen Impulsbilanzen abgeleiteten Gleichgewichtsbedingungen (diese werden später im Detail formuliert) mit den Gleichgewichtsbedingungen für ein Einphasenkontinuum $\widehat{\boldsymbol{p}}_S = -\widehat{\boldsymbol{p}}_F$. Somit ergibt die Summe von (31a) und (31b) die Clausius-Duhem-Ungleichung für das Kontinuum in räumlicher Darstellung.

$$\boldsymbol{\sigma}_S \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_S + \boldsymbol{\sigma}_F \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_F - \varrho_S \left(\bar{\psi}_S\right)'_S - \varrho_F \left(\bar{\psi}_F\right)'_F - \widehat{\boldsymbol{p}}_F \cdot \boldsymbol{w}_F \geq 0 \tag{34}$$

[7] Entsprechend den in der Theorie poröser Medien üblicherweise verwendeten Begriffen erfassen die Terme $\widehat{\boldsymbol{p}}_S$ und $\widehat{\boldsymbol{p}}_F$ die Änderung volumenbezogener Impulsgrößen pro Zeiteinheit aufgrund der Interaktion der einzelnen Konstituierenden. Physikalisch keinen Impuls darstellend, werden sie in diesem Sinne in der Literatur als Impulsproduktionsterme bezeichnet, welche die Impulsmodifikation einer Konstitutierenden im materiellen Punkt durch Wirkung der anderen Konstituierenden in diesem Punkt beschreiben.

lediglich 0,25 %. Beim Vergleich der Ergebnisse für das hier betrachtete Dreieckgitter mit dem feineren Viereckgitter (64 Elemente) aus Abb. 7 ist sogar völlige Übereinstimmung auch in quantitativer Hinsicht festzustellen (s. a. Abb. 8). Damit ist die prinzipielle Eignung von Dreiecknetzen des Taylor-Hood-Typs $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$ zur Beschreibung der betrachteten Zweiphasenmodelle erwiesen.

Die mit den bisher betrachteten Vernetzungen erzielte gute Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse lässt selbstverständlich erwarten, dass weitere Netzverfeinerungen weder für Viereck- noch für Dreieckgitter zu Resultatsänderungen führen. Es ist zu unterstreichen, dass diese Aussage zunächst lediglich für das diskutierte Beispiel gilt. Zur Analyse eventueller Diskretisierungseinflüsse wurden somit zwei gröbere Dreieckvernetzungen mit 16 bzw. 48 Elementen generiert (vgl. Abb. 11).

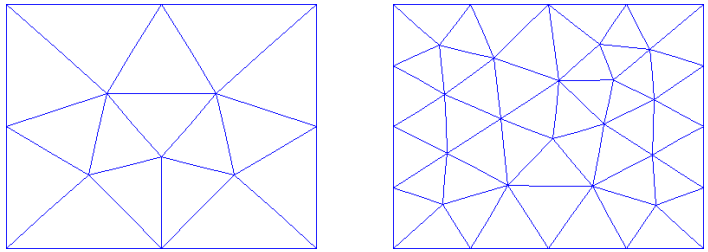


Abb. 11: Stauchen im Gesenk. Vernetzung mit 16 (links) bzw. 48 (rechts) Taylor-Hood-Dreieckelementen.

Für diese beiden Gittertopologien ist in Abb. 12 jeweils die Verteilung des Porenwasserdrucks bei maximaler Belastung ($t = 500\,\mathrm{s}$) dargestellt. Hier zeigen sich interessante Aspekte, die auf einen Einfluss von Diskretisierungsfehlern selbst für das betrachtete einfache Beispiel hinweisen. So ist deutlich zu erkennen, dass die laterale Homogenität der Porenwasserdruckverteilung verletzt wird (je gröber das Netz, desto deutlicher – siehe Abb. 12 links). Dafür ist auch die unregelmäßige Gitterstruktur der Dreieckvernetzung verantwortlich. Quantitativ beträgt die Abweichung des maximalen Porenwasserdrucks bezüglich des gröbsten Dreieckgitters gegenüber der Originalvernetzung mit Viereckelementen aus Abb. 2 bereits 2,3 % (s. a. Abb. 6).

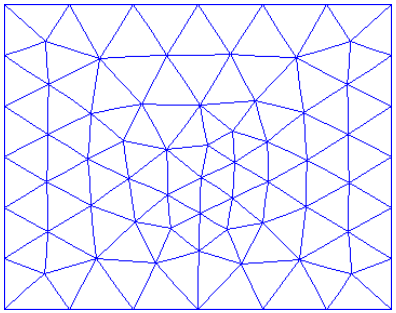


Abb. 9: Stauchen im Gesenk. Vernetzung mit 144 Taylor-Hood-Dreieckelementen.

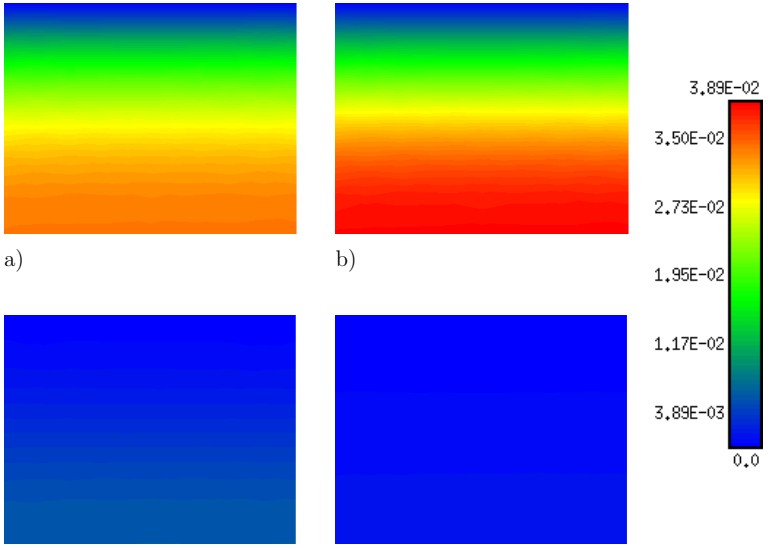


Abb. 10: Stauchen im Gesenk. Verteilung des Porenwasserdrucks (in MPa) nach: a) 250 s, b) 500 s, c) 750 s, d) 1000 s während der Belastungs- und Relaxationsphase für die Vernetzung mit 144 Taylor-Hood-Dreieckelementen nach Abb. 9.

Analog zu den Effektivspannungen wird in der Zerlegung

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_F \;=\; \widehat{\boldsymbol{p}}_F^{\,E} \;+\; p\,\mathrm{grad}\,\phi_F \tag{35}$$

ein effektiver Impulsproduktionsterm definiert. Zusammen mit

$$2\,\boldsymbol{d}_S \;=\; \mathrm{grad}\,(\boldsymbol{u}_S)'_S \;+\; \left(\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{u}_S)'_S\right)^T\,, \qquad 2\,\boldsymbol{d}_F \;=\; \mathrm{grad}\,\boldsymbol{v}_F \;+\; (\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v}_F)^T \tag{36}$$

sowie der Zerlegung (30a), (30b) der partialen Spannungstensoren kann damit unter Berücksichtigung der Sättigungsbedingung (3) und der Volumenbilanz des Kontinuums (29) die Beziehung (34) in der folgenden Weise umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}_S^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_S \;+\; \boldsymbol{\sigma}_F^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_F \;-\; \varrho_S\,(\bar{\psi}_S)'_S \;-\; \varrho_F\,(\bar{\psi}_F)'_F \;-\; \widehat{\boldsymbol{p}}_F^{\,E}\,\boldsymbol{w}_F \\
&-\phi_S\,p\,\boldsymbol{I} \cdot\cdot\, \mathrm{grad}\,(\boldsymbol{u}_S)'_S \;-\; \phi_F\,p\,\boldsymbol{I} \cdot\cdot\, \mathrm{grad}\,\boldsymbol{v}_F \;-\; p\,\mathrm{grad}\,\phi_F\,\boldsymbol{w}_F \\
=\;& \boldsymbol{\sigma}_S^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_S \;+\; \boldsymbol{\sigma}_F^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_F \;-\; \varrho_S\,(\bar{\psi}_S)'_S \;-\; \varrho_F\,(\bar{\psi}_F)'_F \;-\; \widehat{\boldsymbol{p}}_F^{\,E}\,\boldsymbol{w}_F \\
&-\phi_S\,p\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}_S)'_S \;-\; \phi_F\,p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_F \;-\; p\,\mathrm{grad}\,\phi_F\,\boldsymbol{w}_F \\
=\;& \boldsymbol{\sigma}_S^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_S \;+\; \boldsymbol{\sigma}_F^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_F \;-\; \varrho_S\,(\bar{\psi}_S)'_S \;-\; \varrho_F\,(\bar{\psi}_F)'_F \;-\; \widehat{\boldsymbol{p}}_F^{\,E}\,\boldsymbol{w}_F \\
&-\phi_S\,p\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}_S)'_S \;-\; \phi_F\,p\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}_S)'_S \;-\; p\,\phi_F\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{w}_F \;-\; p\,\mathrm{grad}\,\phi_F\,\boldsymbol{w}_F \\
=\;& \boldsymbol{\sigma}_S^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_S \;+\; \boldsymbol{\sigma}_F^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_F \;-\; \varrho_S\,(\bar{\psi}_S)'_S \;-\; \varrho_F\,(\bar{\psi}_F)'_F \;-\; \widehat{\boldsymbol{p}}_F^{\,E}\,\boldsymbol{w}_F \\
&-(\phi_S+\phi_F)\;p\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}_S)'_S \;-\; p\,\mathrm{div}\;(\phi_F\,\boldsymbol{w}_F) \\
=\;& \boldsymbol{\sigma}_S^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_S \;+\; \boldsymbol{\sigma}_F^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_F \;-\; \varrho_S\,(\bar{\psi}_S)'_S \;-\; \varrho_F\,(\bar{\psi}_F)'_F \;-\; \widehat{\boldsymbol{p}}_F^{\,E}\,\boldsymbol{w}_F \;\geq\; 0\,.
\end{aligned} \tag{37}$$

Die Auswertung der Beziehung (37) führt unter anderem mit der Bedingung $-\widehat{\boldsymbol{p}}_F^{\,E}\,\boldsymbol{w}_F > 0$ o.E.d.A. auf eine Entwicklungsgleichung für den effektiven Impulsproduktionsterm $\widehat{\boldsymbol{p}}_F^{\,E}$, die später im Detail diskutiert wird. Im Weiteren soll davon ausgegangen werden, dass die Poren des physikalischen Körpers mit einer reibungsfreien Flüssigkeit gefüllt sind. In diesem Fall kann der Effektivspannungsanteil $\boldsymbol{\sigma}_F^E$, der die Reaktionen auf innere Reibungsvorgänge des Porenfluids erfasst, vernachlässigt werden. Gleichzeitig kann das betreffende Fluid keine innere Energie speichern. Die Clausius-Duhem-Ungleichung in räumlicher Darstellung (37) vereinfacht sich somit zu:

$$\boldsymbol{\sigma}_S^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{d}_S \;-\; \varrho_S\,(\bar{\psi}_S)'_S \;\geq\; 0\,. \tag{38}$$

Nach der Transformation der Beziehungen (30a), (30b) in die Ausgangskonfiguration des (pull-back mit dem Deformationsgradienten $\boldsymbol{F}_S$) ergeben sich unter Berücksichtigung der angegebenen Restriktionen die verallgemeinerten materiellen Darstellungen für die 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensoren der Partialspannungen.

$$\boldsymbol{T}_S = -J_S\,\phi_S\,p\,\boldsymbol{C}_S^{-1} + \boldsymbol{T}_S^E \tag{39a}$$

$$\boldsymbol{T}_F = -J_S\,\phi_F\,p\,\boldsymbol{C}_S^{-1} \tag{39b}$$

Die Gesamtspannung für das Kontinuum entspricht der Summe der Partialspannungen und ergibt sich somit unter Berücksichtigung der Sättigungsbedingung (3) zu

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_S^E - p\,J_S\boldsymbol{C}_S^{-1} = \boldsymbol{T}_S^E - p\,\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}} = \boldsymbol{T}_S^E - \boldsymbol{T}_{\mathrm{v}}\,. \tag{40}$$

Die Beziehung (40) stellt eine völlige Analogie zur Aufspaltung des Spannungstensors in einen hydrostatischen Anteil und einen Anteil zur Beschreibung isochorer Bewegungszustände dar, wie sie aus der Theorie der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen bekannt ist (siehe z. B. [18]). Unter anderem wird aus dieser Tatsache die Motivation abgeleitet, beide Problemstellungen numerisch mit äquivalenten gemischten Formulierungen zu behandeln. Ein entscheidender Unterschied besteht jedoch im Verständnis des hydrostatischen Drucks p. In beiden Fällen stellt er eine kinematisch unbestimmte Größe zur Beschreibung von intrinsisch volumenerhaltenden mechanischen Prozessen dar. Während dazu im Rahmen der nahezu inkompressiblen Elastizität aus heuristischen Überlegungen ein geeigneter Anteil der Funktion der freien Helmholtz-Energiedichte zu definieren ist, existiert in der Theorie poröser Medien über die Volumenbilanz (29) eine Verknüpfung zu physikalisch relevanten Geschwindigkeitszuständen im Kontinuum (siehe dazu auch die Herleitung von (37)). Wie später gezeigt wird, findet das seinen Ausdruck auch in der konsistenten Formulierung von Randbedingungen für den Porenwasserdruck im Rahmen der FE-Realisierung der TPM.

Die Clausius-Duhem-Ungleichung (38) kann mit den üblichen Transformationsbeziehungen für Spannungstensoren und Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren ebenfalls in verallgemeinerter materieller Darstellung formuliert werden.

$$-\varrho_{S0}\,\dot{\tilde{\psi}}_S + \frac{1}{2}\boldsymbol{T}_S^E \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{C}}_S \geq 0 \tag{41}$$

Abhängig von den Materialeigenschaften des Festkörperskeletts ist die freie Helmholtz-Energiedichte eine Funktion von einem elastischen Verzerrungsmaß sowie unterschiedlichen inneren Variablen und bildet somit den Ausgangspunkt der thermodynamisch konsistenten Ableitung der konstitutiven Beziehung für den effektiven Spannungstensor $\boldsymbol{T}_S^E$ sowie möglicher Entwicklungsgleichungen für zu

eckelementen dargestellt. Qualitativ sind die Verteilungen der Druckwerte nicht voneinander zu unterscheiden. Das gilt sowohl für den Vergleich untereinander, als auch für den Vergleich mit dem entsprechenden Zeitpunkt in Abb. 6. Zudem wird deutlich, dass die Gittertopologie für das betrachtete einfache Beispiel auch quantitativ nur geringfügige Auswirkungen auf die Ergebnisse hat. Der Unterschied im maximalen Porenwasserdruck bei maximaler Belastung liegt bezüglich der untersuchten Vernetzungen bei maximal 0,5 %.

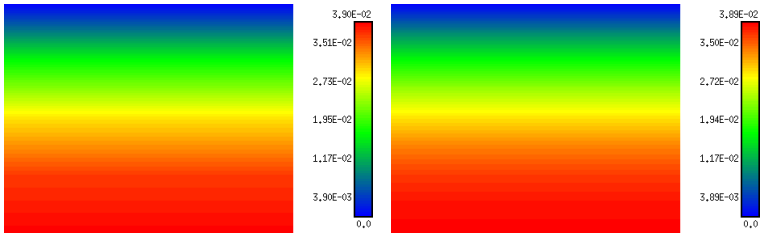


Abb. 8: Stauchen im Gesenk. Verteilung des Porenwasserdrucks (in MPa) nach jeweils 500 s. Vergleich der Ergebnisse für das Gitter mit 16 Viereckelementen (links, Gitter s. Abb. 7, $p_{\max} = 0,0390\,\mathrm{MPa}$) bzw. 64 Viereckelementen (rechts, Gitter s. Abb. 7, $p_{\max} = 0,0389\,\mathrm{MPa}$).

4.3 Berechnungen mit Dreieckelementen vom Typ $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$

Die Verwendung von Dreieckelementen vom Taylor-Hood-Typ $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$ mit biquadratischem Ansatz für die Prozessvariablen Verschiebungskoordinaten und bilinearer Interpolation für die Prozessvariable Porenwasserdruck zur Ortsdiskretisierung des oben beschriebenen Beispiels im Rahmen der gemischten FE-Formulierung dient der Software-Verifizierung bezüglich dieses Elementtyps sowie erneut der Untersuchung von Diskretisierungseinflüssen auf die Ergebnisse.

Zunächst wurde mittels eines hauseigenen Netzgenerators ein relativ feines Gitter mit 144 Dreieckelementen erzeugt (vgl. Abb. 9). Bestandteil des Netzgenerators sind Regularisierungsalgorithmen, die ein Gitter erzeugen, das einer Delaunay-Triangulation nahe kommt.

In Abb. 10 wird wiederum die Verteilung des Porenwasserdrucks zu den bereits oben analysierten Zeitpunkten der Belastungsgeschichte (250 s, 500 s, 750 s, 1000 s) gezeigt. Der Vergleich mit den Einzeldarstellungen in Abb. 6 belegt, dass die hydromechanischen Effekte sowohl qualitativ als auch quantitativ mit Viereck- und Dreieckgittern in gleicher Qualität modelliert werden können. So beträgt beispielsweise die Abweichung des maximalen Porenwasserdrucks bei maximaler Belastung unter Verwendung der in Abb. 2 bzw. Abb. 9 dargestellten Vernetzungen

Tab. 1: Stauchen im Gesenk. Maxima des Porenwasserdrucks zu verschiedenen Zeitpunkten der Belastungs- und Relaxationsphase für die Vernetzung nach Spilker et al. [72].

t [s]	250	500	750	1000
p [MPa]	0,0338	0,0388	0,0059	0,0011

serdruck auf. Dieser nimmt zur Oberseite hin ab und erreicht entsprechend den gewählten Randbedingungen am oberen Rand den Wert Null. Im Verlaufe der Relaxationsphase – bei konstant gehaltener Verschiebung des Kolbens – kann sich der unter hydrostatischem Druck stehende fluide Anteil des Gesamtkontinuums im porösen Medium umverteilen. Dabei wird der Porenwasserdruck vollständig abgebaut, bis allein die Summe der inneren Beanspruchungen des Festkörperskeletts im Gleichgewicht mit der äußeren Belastung steht.

Wie Tab. 1 zu entnehmen ist, hat dieser Vorgang am Ende des betrachteten Zeitraums noch keinen Abschluss gefunden. Die Dauer bis zum Erreichen des asymptotischen Zustandes während der Relaxationsphase hängt wesentlich von der Permeabilität des Materials ab.

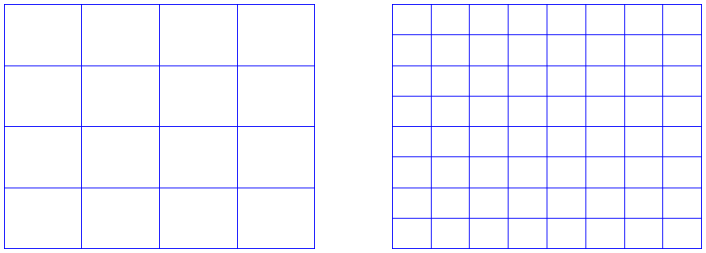


Abb. 7: Stauchen im Gesenk. Vernetzung mit 16 (links) bzw. 64 (rechts) jeweils gleich großen Taylor-Hood-Viereckelementen.

Aus Sicht einer mathematisch sinnvollen Nutzung der FEM ist die von Spilker et al. [72] vorgeschlagene Vernetzung (vgl. Abb. 2) wegen der extrem anisotropen Elementgeometrie unzweckmäßig. Mit anderen Gittertopologien wird der Diskretisierungseinfluss auf die Ergebnisse des betrachteten Beispiels untersucht. Dazu werden zwei Gitter mit nur schwach anisotroper Elementgeometrie und 16 bzw. 64 Taylor-Hood-Viereckelementen verwendet (siehe Abb. 7).

In Abb. 8 sind die Verläufe des Porenwasserdrucks bei jeweils maximaler Belastung ($t = 500\,\mathrm{s}$) für die beiden in Abb. 7 dargestellten Vernetzungen mit Vier-

den inneren Variablen arbeitskonjugierte Größen vom Spannungstyp. Diese Vorgehensweise ist analog zur Modellentwicklung für klassische Einphasenkontinua. In einem späteren Abschnitt wird die Definition eines hyperelastischen Deformationsgesetzes für die Effektivspannung des Festkörperskeletts demonstriert.

2.4 Evolutionsgleichung für die Porosität

Die klassische Mischungstheorie stellt ein geschlossenes System zur Lösung des vollständigen thermomechanischen Problems dar. Das heißt, die Anzahl der Bilanz- und Konstitutivgleichungen stimmt mit der Anzahl der unabhängigen Variablen überein. Durch die Volumenanteile werden im Rahmen der TPM zusätzliche unabhängige Variablen definiert, für die Entwicklungsgleichungen benötigt werden. In phänomenologischen Ansätzen von Einphasenmedien werden derartige Beziehungen durch geeignete Modelle unter Auswertung der Clausius-Duhem-Ungleichung in thermodynamisch konsistenter Weise gewonnen. Da die Volumenanteile mit der Mikrostruktur des Materials verknüpfte Größen darstellen, ist die Möglichkeit, für diese Variablen Entwicklungsgleichungen aus der Clausius-Duhem-Ungleichung der Makroebene abzuleiten, nicht gegeben.

Mit der Sättigungsbedingung (hier (3) für ein Zweiphasenmedium) ist eine Restriktion bezüglich der Volumenanteile gegeben. Im betrachteten Fall ist es somit ausreichend, eine Entwicklungsgleichung für eine der beiden Variablen ϕ_S oder ϕ_F zu formulieren. Ausgangspunkt dafür soll die partiale Massebilanz (27a) für das Festkörperskelett sein. Zusammen mit den Beziehungen (6) zwischen effektiver und partialer Dichte kann Gleichung (27a) zweckmäßig umformuliert werden.

$$(\phi_S)'_S \, \varrho_{SR} + \phi_S \, (\varrho_{SR})'_S + \phi_S \, \varrho_{SR} \operatorname{div} (\boldsymbol{u}_S)'_S = 0 \tag{42}$$

Für die weiteren Analysen sei darauf hingewiesen, dass mit

$$\operatorname{grad} (\boldsymbol{u}_S)'_S = \dot{\boldsymbol{F}}_S \, \boldsymbol{F}_S^{-1} \tag{43}$$

der Geschwindigkeitsgradient eines materiellen Teilchens des Festkörperskeletts zur Zeit t gegeben ist. Dann folgt:

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{u}_S)'_S = \boldsymbol{I} \cdot\cdot \operatorname{grad} (\boldsymbol{u}_S)'_S = \dot{\boldsymbol{F}}_S \cdot\cdot \boldsymbol{F}_S^{-1} . \tag{44}$$

Andererseits gilt mit der Definition der Ableitung der Determinanten eines Tensors nach dem Tensors selbst:

$$\frac{\partial J_S}{\partial \boldsymbol{F}_S} = J_S \, \boldsymbol{F}_S^{-T} \tag{45}$$

und somit unter Berücksichtigung von (44)

$$\begin{aligned} (J_S)'_S &= \frac{\partial J_S}{\partial \boldsymbol{F}_S} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{F}}_S^T = J_S \, \boldsymbol{F}_S^{-T} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{F}}_S^T = J_S \, \dot{\boldsymbol{F}}_S \cdot\cdot \boldsymbol{F}_S^{-1} \\ &= J_S \operatorname{div} (\boldsymbol{u}_S)'_S . \end{aligned} \tag{46}$$

Wird dieser Zusammenhang in (42) eingesetzt, so folgt nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung der materiellen Inkompressibilität des Festkörperskeletts die Differentialgleichung

$$\frac{(\phi_S)'_S}{\phi_S} + \frac{(J_S)'_S}{J_S} = 0\,. \tag{47}$$

Aus deren Lösung $\phi_S = \phi_{S0} J_S^{-1}$ lässt sich mit der Sättigungsbedingung (3) eine (deformationsabhängige) Entwicklungsgleichung für die Porosität ableiten.

$$\phi_F = 1 - (1 - \phi_{F0})\, J_S^{-1} \tag{48}$$

3 Randwertaufgabe der Theorie gesättigter poröser Medien bei großen Verzerrungen in verallgemeinerter Lagrangescher Darstellung

Das Randwertproblem der Theorie poröser Medien wird in Analogie zu den Ansätzen bei [29, 68, 72] und anderer Autoren als gemischtes Zweifeldproblem in U/p-c-Formulierung definiert. Ausgangspunkt für die Herleitung der Feldgleichungen zur Beschreibung der Deformationsprozesse und des eindeutig bestimmten Spannungszustandes im durch das poröse Medium eingenommenen Gebiet Ω_0 sind die Gleichgewichtsbedingungen sowie die Volumenbilanz des Kontinuums. Wie in Abschnitt 2.2 dargestellt, ergibt sich Letztere aus der Sättigungsbedingung unter Berücksichtigung der Massebilanzen für die Konstituierenden. Es wird später verdeutlicht, dass durch die Möglichkeit der Eliminierung der Fluidgeschwindigkeit aus den Bilanzgleichungen im Rahmen der TPM das fluidmechanische Teilproblem nicht explizit betrachtet werden muss.

3.1 Schwache Formulierungen der Gleichgewichtsbedingungen und der Volumenbilanz des Kontinuums

Analog zu den anderen Bilanzgleichungen muss auch die Impulsbilanz zunächst bezüglich jeder einzelnen Konstituierenden unter Berücksichtigung aller partialen externen Einflüsse und der Wechselwirkungsterme mit den anderen Konstituierenden aufgestellt werden. Aus diesen lassen sich für die betrachteten zweiphasigen porösen Medien im Fall quasistatischer Vorgänge bei Vernachlässigung von Masseaustausch zwischen den Konstituierenden die folgenden Gleichgewichtsbedingungen ableiten:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_S + \varrho_S \boldsymbol{b}_S - \widehat{\boldsymbol{p}}_F = \boldsymbol{0}\,, \tag{49a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_F + \varrho_F \boldsymbol{b}_F + \widehat{\boldsymbol{p}}_F = \boldsymbol{0}\,. \tag{49b}$$

Druckgradienten und damit bei konstanter Druckfreiheit am belasteten Rand zu größeren Porenwasserdrücken in der Probe. Das hat ein Anwachsen der Reaktionskraft am Kolben zur Folge. Unabhängig von der Belastungsgeschwindigkeit erreicht die Reaktionskraft in der Realaxationsphase jeweils den gleichen asymptotischen Wert. Dieser repräsentiert einen Gleichgewichtszustand, zu dem der Porenwasserdruck in allen materiellen Punkten vollständig abgebaut wurde. Das Materialverhalten wird dann einzig durch das Festkörperskelett mit dessen effektiven Werkstoffcharakteristika bestimmt. Im betrachteten Beispiel stellen sich homogene Spannungs- und Verzerrungszustände ein. Die Axialverzerrung beträgt dann beispielsweise stets 5 %.

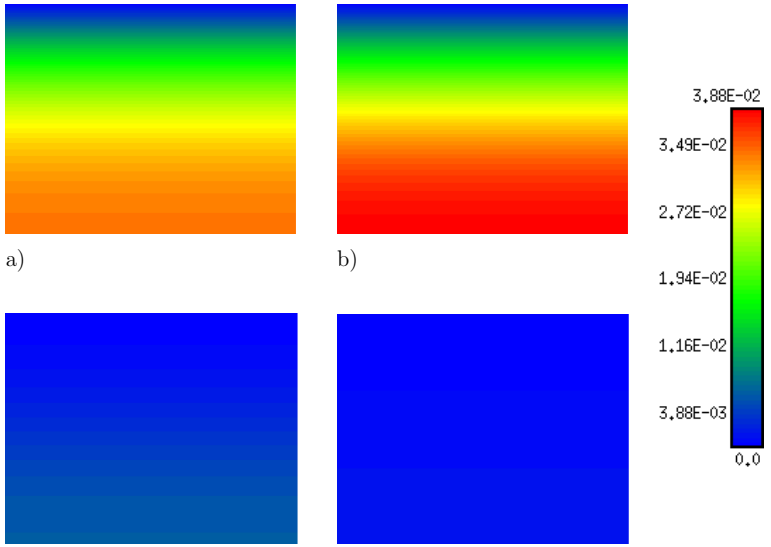


Abb. 6: Stauchen im Gesenk. Verteilung des Porenwasserdrucks (in MPa) nach: a) 250 s, b) 500 s, c) 750 s, d) 1000 s während der Belastungs- und Relaxationsphase für die Vernetzung nach Spilker et al. [72] (vgl. Abb. 2).

Die diskutierten hydromechanischen Effekte sind auch sehr gut in den Einzeldarstellungen der Abb. 6 zu erkennen. Diese stellen die Verteilung des Porenwasserdrucks zu unterschiedlichen Zeitpunkten der Belastungsgeschichte (250 s, 500 s, 750 s, 1000 s) dar. Die maximalen Werte für den Porenwasserdruck zu den betrachteten Zeitpunkten sind in Tab. 1 zusammengefasst.

Während der Belastung baut sich an der Unterseite des Knorpelzylinders, der auf dem impermeablen Boden des Gesenks aufliegt, ein zunehmender Porenwas-

Der Vergleich der Ergebnisse lässt das Fazit zu, dass die vorgestellte Konzeption zur Modellierung von Zweiphasenproblemen (fluidgesättigtes Festkörperskelett) sowie dessen numerische Realisierung im Rahmen des hauseigenen FE-Programms SPC-PM2AdNlMix prinzipiell geeignet sind, entsprechende Aufgabenstellungen realistisch zu beschreiben.

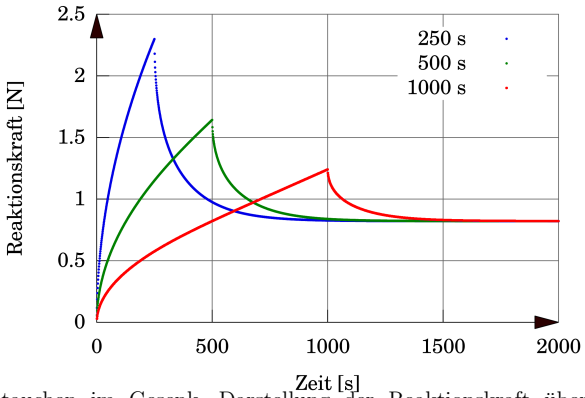


Abb. 5: Stauchen im Gesenk. Darstellung der Reaktionskraft über der Zeit während der Belastungs- und Relaxationsphase bei unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten ($5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}$, $2,5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}$ und $1,25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}$).

Neben dem quantitativen Vergleich mit Literaturergebnissen ist es interessant, die während der Belastung und der Relaxation ablaufenden hydromechanischen Prozesse zu analysieren und in ihrer Auswirkung beispielsweise auf die Resonanz des Gesamtsystems in Form der Reaktionskraft zu interpretieren. Da das Festkörperskelett als Neo-Hooke-Material modelliert wurde, das bei den auftretenden Verzerrungen ein nur schwach nichtlineares Verhalten zeigt, ist die starke Nichtlinearität im Reaktionskraftverlauf während der Belastung insbesondere auf den zunehmenden Widerstand des inkompressiblen fluiden Anteils des Gesamtkontinuums gegen den äußeren Druck und somit auf das nichtlineare Ansteigen des heterogen verteilten Porenwasserdrucks zurückzuführen. Im Weiteren ist das Relaxationsverhalten des Materials Ausdruck eines sich verringernden Porenwasserdrucks bei konstant gehaltener Verschiebung durch Umverteilung des fluiden Anteils im porösen Medium, da sich im Gleichgewichtszustand homogene Verteilungen von Porosität, Verzerrungs- und Spannungskoordinaten einstellen.

Entsprechend dem Darcyschen Gesetz (77) als Bestandteil der Prozessgleichungen sind diese Belastungs- und Relaxationsvorgänge geschwindigkeitsabhängig. In Abb. 5 ist dieser Einfluss anschaulich dargestellt. Die Erhöhung der Belastungsgeschwindigkeit führt bei gleichbleibender Permeabilität zu einem größeren

Die partialen Gleichgewichtsbedingungen (49a), (49b) stellen lokale, räumliche Formulierungen dar und drücken die Bilanz zwischen der Divergenz der jeweiligen Cauchyschen Partialspannung, den massebezogenen Kräften $\boldsymbol{b}_S$, $\boldsymbol{b}_F$ zur Charakterisierung von Nah- und Fernfeldwirkungen (z. B. Gravitation) sowie den bereits weiter oben eingeführten, im Volumen wirkenden Impulsproduktionstermen aus. Die ausschließliche Aufnahme des Terms $\widehat{\boldsymbol{p}}_F$ zur Charakterisierung der Impulsänderung durch Wechselwirkung zwischen porösem Festkörper und Porenfluid ergibt sich aus der Voraussetzung, dass die Summe aller Produktionsterme des Mehrphasenmediums Null ergeben muss. Eine solche Annahme ist plausibel, da bezüglich des Kontinuums die Summe der Bilanzgleichungen seiner Konstituierenden formal einer Formulierung zu entsprechen hat, die aus der Kontinuumsmechanik für Einphasenmedien bekannt ist. In diesem Zusammenhang werden für das Kontinuum in der Literatur mitunter als *baryzentrisch* bezeichnete physikalische Größen definiert, die analog sind zu Variablen, mit denen die Physik der Konstituierenden beschrieben wird. So gilt beispielsweise neben der Definition (7) der Massedichte für volumenbezogene Kräfte des Kontinuums:

$$\varrho \boldsymbol{b} \;=\; \varrho_S \boldsymbol{b}_S \;+\; \varrho_F \boldsymbol{b}_F \,. \tag{50}$$

Diese Beziehung charakterisiert die volumenbezogenen Kräfte des Kontinuums als gewichtete Mittelung der massebezogenen Kräfte der Konstituierenden. Wird jedoch vorausgesetzt, dass auf die Konstituierenden die gleichen massebezogenen Kräfte wirken ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_S = \boldsymbol{b}_F$), dann stellt die Gleichung (50) mit der Bedingung (7) eine Identität dar. Da die Gesamtspannung des Kontinuums der Summe der Partialspannungen der Konstituierenden entspricht, ergibt sich letztlich aus (49a), (49b) die lokale, räumliche Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen für das Kontinuum.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \;+\; \varrho \boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{0} \tag{51}$$

Mit Hilfe tensoralgebraischer und tensoranalytischer Betrachtungen (vgl. [36]) kann daraus die folgende verallgemeinerte materielle Darstellung abgeleitet werden:

$$\operatorname{Div}_S \left(\boldsymbol{T} \boldsymbol{F}_S^{T} \right) \;+\; \varrho_0 \boldsymbol{B} \;=\; \boldsymbol{0} \,. \tag{52}$$

Dabei ist diese Beziehung so zu interpretieren, dass die beiden Terme $\operatorname{Div}_S \left(\boldsymbol{T} \boldsymbol{F}_S^{T} \right)$ und $\varrho_0 \boldsymbol{B}$ volumenbezogene Kraftvektoren darstellen, die unter Verwendung des oben erwähnten Shifters auf die Basis der Ausgangskonfiguration des Festkörperskeletts bezogen sind und mit Hilfe des Bewegungsgesetzes (8_1) als Funktionen der Koordinaten dieser Konfiguration definiert werden können.

Nach Multiplikation von (52) mit einer beliebigen Testfunktion $\boldsymbol{V}_S = \boldsymbol{V}_S(\boldsymbol{X}_S)$ (wobei gilt: $\boldsymbol{V}_S \in (H_0^1(\Omega_0))^3$, $\boldsymbol{V}_S = \boldsymbol{0}$ auf Γ_{0DU}) und Integration über das Volumen des undeformierten Gebietes Ω_0 folgt aus (52) die gewichtete Form der

Gleichgewichtsbedingungen für das Kontinuum – deren schwache Formulierung:

$$\int_{\Omega_0} \mathrm{Div}_S\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_S^T\right)\boldsymbol{V}_S\,d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \varrho_0 \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_S\,d\Omega_0 = \boldsymbol{0}\,. \tag{53}$$

Wird die Testfunktion als virtuelle Verschiebung interpretiert, stellt (53) das Prinzip der virtuellen Arbeit dar.

Mit der Regel zur Berechnung der Divergenz eines einfachen Skalarproduktes aus einem beliebigen zweistufigen Tensor $\boldsymbol{Z}$ und einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{W}$ als Funktionen der Koordinaten der Ausgangskonfiguration

$$\mathrm{Div}_S\left(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{W}\right) = \left(\mathrm{Div}_S\,\boldsymbol{Z}\right)\boldsymbol{W} + \boldsymbol{Z} \cdot\cdot \left(\mathrm{Grad}_S\,\boldsymbol{W}\right)^T \tag{54}$$

$$\text{mit}\quad \mathrm{Grad}_S\,\boldsymbol{W} = \boldsymbol{G}_S^K \frac{\partial\left(W^I(\boldsymbol{G}_S)_I\right)}{\partial X_S^K} \tag{55}$$

kann das erste Integral in Gleichung (53) auch geschrieben werden als

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_0} \mathrm{Div}_S\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_S^T\right)\,\boldsymbol{V}_S\,d\Omega_0\\ &= \int_{\Omega_0} \mathrm{Div}_S\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_S^T\boldsymbol{V}_S\right)\,d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_S^T \cdot\cdot \left(\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{V}_S\right)^T d\Omega_0\,.\end{aligned} \tag{56}$$

Nach dem Integralsatz von Gauß-Ostrogradski gilt mit der identischen Erfüllung von Dirichlet-Randbedingungen durch die Funktion $\boldsymbol{V}_S$:

$$\int_{\Omega_0} \mathrm{Div}_S\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_S^T\boldsymbol{V}_S\right)\,d\Omega_0 = \int_{\Gamma_{0NU}} \mathfrak{N}\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_S^T\boldsymbol{V}_S\right)\,d\Gamma_0 \tag{57}$$

mit dem nach außen gerichteten Normalenvektor $\mathfrak{N}$ auf dem Rand des Gebietes Ω_0. Damit lautet die schwache Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen des Kontinuums:

$$\int_{\Gamma_{0NU}} \mathfrak{N}\,\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_S^T\boldsymbol{V}_S\,d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_S^T \cdot\cdot \left(\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{V}_S\right)^T\,d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \varrho_0\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_S\,d\Omega_0 = \boldsymbol{0}\,. \tag{58}$$

Bei Vernachlässigung volumenförmiger Kräfte sowie Beachtung von Rechenregeln für einfache und doppelte Überschiebungen von Tensoren zweiter Stufe vereinfacht sich (58) zu

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{F}_S^T\left(\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{V}_S\right)^T\,d\Omega_0 = \int_{\Gamma_{0NU}} \mathfrak{N}\,\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_S^T\boldsymbol{V}_S\,d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_{0NU}} \bar{\boldsymbol{R}}_U\boldsymbol{V}_S\,d\Gamma_0 \tag{59}$$

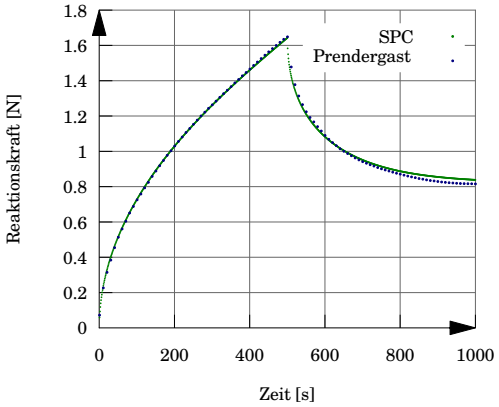


Abb. 3: Stauchen im Gesenk. Darstellung der Reaktionskraft über der Zeit während der Belastungs- und Relaxationsphase. Vergleich zwischen Literaturwerten [62] und Ergebnissen von SPC-PM2AdNlMix.

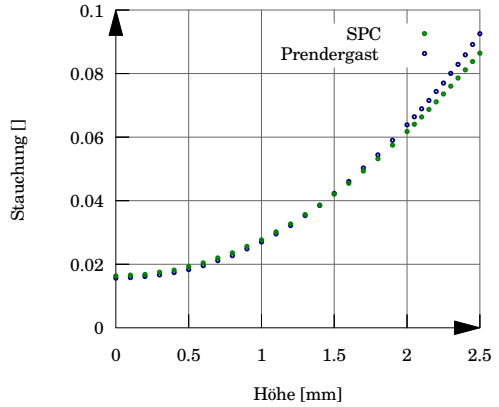


Abb. 4: Stauchen im Gesenk. Darstellung des Verlaufs der axialen Stauchung über der Höhe des Knorpelzylinders (Beginn der Höhenmessung am Probenboden) zum Zeitpunkt $t = 400\,\mathrm{s}$. Vergleich zwischen Literaturwerten [62] und Ergebnissen von SPC-PM2AdNlMix.

Im Folgenden werden einige, mit dem diskutierten Modell erzielte Ergebnisse exemplarisch dargestellt. Als Funktion für die freie Helmholtz-Energiedichte kam der Neo-Hooke-Ansatz (114a) zur Anwendung. Die Materialparameter wurden aus [62] übernommen. Dort sind Werte von $0,4667\,\mathrm{MPa}$ für den Elastizitätsmodul und $0,1667$ für die Querkontraktionszahl angegeben. Daraus lassen sich die Parameter $c_{10} = 0,1\,\mathrm{MPa}$ und $D_2 = 0,0125\,\mathrm{MPa}$ des entwickelten Modells berechnen. Für die Permeabilität nach Definition (79) wird eine isotrope Belegung $\boldsymbol{K} = k J_S \boldsymbol{F}_S^{-1} \boldsymbol{I} \boldsymbol{F}_S^{-T}$ angenommen. Der Faktor $k = 7,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mm^4\,N^{-1}\,s^{-1}}$ als Mittelwert für hyalines Knorpelgewebe ist wiederum in [62] angegeben. Die Porosität beträgt $\phi_F = 0,8$.

4.2 Berechnungen mit Viereckelementen vom Typ $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$

Für den unmittelbaren Vergleich mit ausgewählten Literaturergebnissen wurde zunächst das Originalnetz nach Spilker et al. [72] verwendet (vgl. Abb. 2). Dieses besteht aus insgesamt 15 Taylor-Hood-Viereckelementen $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$ vom Serendipity-Typ mit unvollständigem biquadratischem Ansatz für die Prozessvariablen Verschiebungskoordinaten und bilinearer Interpolation für die Prozessvariable Porenwasserdruck. Während in radialer Richtung die gesamte Breite von $3,175\,\mathrm{mm}$ mit nur jeweils einer Elementschicht erfasst wird, sind in axialer Richtung 15 Elemente über die Höhe angeordnet. Beginnend vom Boden wurden zunächst zehn Elemente mit einer Höhe von jeweils $0,2\,\mathrm{mm}$ generiert. Es folgen fünf Elemente mit einer Höhe von jeweils $0,1\,\mathrm{mm}$ für die oberen $20\,\%$ des Knorpelzylinders.

Von den bei Prendergast et al. [62] dargestellten Ergebnissen sollen hier die Reaktionskraft am Kolben als Funktion der Zeit während der Belastungs- und Relaxationsphase sowie der Axialdehnungsverlauf über die Höhe des Knorpelzylinders zum Zeitpunkt $t = 400\,\mathrm{s}$ analysiert werden. Wie die Abb. 3 und 4 zeigen, ist die Übereinstimmung zwischen den Literaturergebnissen und den von SPC-PM2AdNlMix auf der Basis des vorgestellten Konzepts generierten sehr gut. Während bezüglich der globalen Größe Reaktionskraft erst gegen Ende der Relaxationsphase geringfügige Abweichungen auftreten, weisen die lokal ermittelten Axialdehnungen mit zunehmendem Wert sichtbare Unterschiede auf. Deren Interpretation wird insofern erschwert, da in [62] keine Angaben enthalten sind, ob bei den jeweils untersuchten FEM-Programmen Optionen zur Berücksichtigung großer Verzerrungen verfügbar waren und genutzt wurden. Es fehlen auch Aussagen zu den konstitutiven Beziehungen für das Festkörperskelett. In diesem Zusammenhang muss zudem auch Spekulation bleiben, aus welchem Grund der Verzerrungsverlauf bei Prendergast et al. [62] nach $400\,\mathrm{s}$ und nicht beispielsweise zum Zeitpunkt der maximalen Belastung ($t = 500\,\mathrm{s}$) analysiert wurde.

mit der gegebenen äußeren Belastung $\bar{\boldsymbol{R}}_U$ am Neumann-Abschnitt (Randlasten für das Strukturmechanikproblem des Festkörperskeletts). Unter Berücksichtigung der Beziehung (12) folgt daraus:

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{T} \cdot\cdot \left[(\mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S)^T + \mathrm{Grad}_S \boldsymbol{U}_S \, (\mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S)^T \right] d\Omega_0 = \int_{\Gamma_{0NU}} \bar{\boldsymbol{R}}_U \boldsymbol{V}_S \, d\Gamma_0 \,. \tag{60}$$

Wegen $\boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T \cdot\cdot \boldsymbol{B}^T$ ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ beliebige zweistufige Tensoren) und der Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors gilt:

$$\boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{Y}^T = \frac{1}{2} \boldsymbol{T} \cdot\cdot \left(\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}^T \right) \tag{61}$$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{Y} = (\mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S)^T + \mathrm{Grad}_S \boldsymbol{U}_S \, (\mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S)^T \,.$$

Folglich kann Gleichung (60) mit der zusätzlichen Definition

$$2\,\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) \overset{\text{def}}{=} (\mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S)^T + \mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S + \mathrm{Grad}_S \boldsymbol{U}_S (\mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S)^T + \mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S (\mathrm{Grad}_S \boldsymbol{U}_S)^T \tag{62}$$

sowie der Zerlegung des Spannungstensors (40) wie nachstehend dargestellt werden:

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{T}_S^E \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} p \, (\boldsymbol{S}_\mathrm{v} \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S)) \, d\Omega_0 = \int_{\Gamma_{0NU}} \bar{\boldsymbol{R}}_U \boldsymbol{V}_S \, d\Gamma_0 \,. \tag{63}$$

Die Gleichung (63) weist eine vollständige strukturelle Analogie zur schwachen Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen in der Theorie der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen auf (vgl. [18]). In beiden Fällen stellen Verschiebungen und ein, aus konstitutiven Beziehungen nicht bestimmbarer, hydrostatischer Druck die primären numerischen Prozessvariablen im Rahmen einer gemischten FEM-Formulierung dar. Bei der Modellierung physikalischer Prozesse in porösen Medien auf der Basis der TPM handelt es sich dabei konkret um die Verschiebungen des Festkörperskeletts $\boldsymbol{U}_S$ sowie den Porenwasserdruck p, der die Wechselwirkungen zwischen strömendem Porenfluid und sich deformierendem Festkörperskelett charakterisiert.

Wegen der Existenz unterschiedlicher Feldvariablen als numerische Prozessgrößen reicht die Beziehung (63) allein nicht aus, das vollständige Feldproblem geschlossen zu lösen. Aus diesem Grunde wird im Weiteren die Volumenbilanz des Kontinuums (29) in der Form

$$\mathrm{div} \left[(\boldsymbol{u}_S)'_S + \widetilde{\boldsymbol{w}}_F \right] = 0 \tag{64}$$

herangezogen. Diese stellt ebenfalls eine Verknüpfung der betrachteten numerischen Prozessvariablen dar, was durch weitere Umformungen verdeutlicht wird. Dazu soll (64) zunächst in die verallgemeinerte materielle Darstellung überführt werden. Bezüglich der Filtergeschwindigkeit gilt mit der Transformation (24):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{w}}_F &= \operatorname{div}\left(J_S^{-1}\boldsymbol{F}_S\,\widetilde{\boldsymbol{W}}_F\right) \\ &= \operatorname{div}\left(J_S^{-1}\boldsymbol{F}_S\right)\,\widetilde{\boldsymbol{W}}_F + J_S^{-1}\boldsymbol{F}_S \operatorname{div}\widetilde{\boldsymbol{W}}_F \\ &= \operatorname{div}\left(\operatorname{cof}\boldsymbol{F}_S^{-T}\right)\,\widetilde{\boldsymbol{W}}_F + J_S^{-1}\operatorname{Div}_S\widetilde{\boldsymbol{W}}_F \\ &= J_S^{-1}\operatorname{Div}_S\widetilde{\boldsymbol{W}}_F\,. \end{aligned} \tag{65}$$

Hierbei wurde davon Gebrauch gemacht, dass die Divergenz des Kofaktors des transponierten inversen Deformationsgradienten den Wert Null ergibt. Die Herleitung dazu beruht auf der Komponentendarstellung dieses Ausdrucks mittels des dreistufigen Permutationstensors (vgl. [58]). Zudem kann leicht gezeigt werden, dass für den materiellen Vektor (bezogen auf die Ausgangskonfiguration des Festkörperskeletts) $\widetilde{\boldsymbol{W}}_F$ folgende Gleichung gilt:

$$\boldsymbol{F}_S \operatorname{div}\widetilde{\boldsymbol{W}}_F = \operatorname{Div}_S\widetilde{\boldsymbol{W}}_F\,. \tag{66}$$

Eine zu (65) analoge Transformation kann auch für die Geschwindigkeit der materiellen Teilchen des Festkörperskeletts abgeleitet werden.

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{u}_S\right)'_S = J_S^{-1}\operatorname{Div}_S\dot{\boldsymbol{U}}_S \tag{67}$$

Andererseits folgt aus der Beziehung für die materielle Zeitableitung der Determinante des Deformationsgradienten (46) unter Berücksichtigung der Symmetrie des Greenschen Verzerrungstensors

$$\operatorname{Div}_S\dot{\boldsymbol{U}}_S = (J_S)'_S = 2\,\frac{\partial J_S}{\partial \boldsymbol{C}_S} \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{E}}_S = J_S\,\boldsymbol{C}_S^{-1} \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{E}}_S\,, \tag{68}$$

womit unter Einbeziehung von (65) und (67) die Volumenbilanz des Kontinuums in verallgemeinerter materieller Darstellung formuliert werden kann.

$$J_S\,\boldsymbol{C}_S^{-1} \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{E}}_S + \operatorname{Div}_S\widetilde{\boldsymbol{W}}_F = 0 \tag{69}$$

Eine weitere Umformung ergibt sich aus der Zerlegung des Spannungstensors (40) sowie der materiellen Zeitableitung des Greenschen Verzerrungstensors (15) unter Berücksichtigung der Definition (62).

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S;\dot{\boldsymbol{U}}_S\right) + \operatorname{Div}_S\widetilde{\boldsymbol{W}}_F = 0 \tag{70}$$

4 Numerisches Beispiel

4.1 Stauchen eines Zylinders im Gesenk

Dieses Problem wurde von Prendergast et al. [62] als Testbeispiel genutzt, verschiedene FE-Programmsysteme (u. a. MSC-Marc) hinsichtlich ihres Potenzials für die Simulation weicher biologischer Gewebe mit Zweiphasenmodellen zu analysieren. Bei dem ursprünglich von Spilker et al. [72] vorgestellten Modell wird ein Knorpelzylinder mittels einer permeablen Belastungsvorrichtung (Kolben) in ein Gesenk mit undurchlässiger Berandung gepresst. Nach der Belastung wird über einen gewissen Zeitraum bei konstanter Verschiebung der Relaxationseffekt beobachtet. Er ist beendet, wenn im aktuellen Gebiet Ω infolge der Randbedingung $p = 0\,\mathrm{MPa}$ keine Strömung des Porenfluids mehr stattfindet.

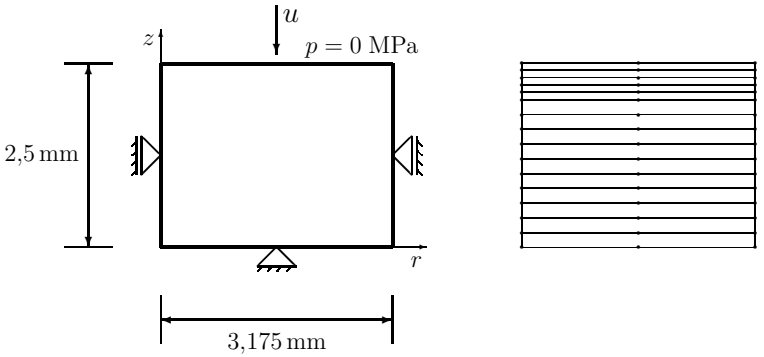


Abb. 2: Stauchen im Gesenk. Links: Geometrie und Randbedingungen des axialsymmetrischen Problems nach [62] ($u = -0,125\,\mathrm{mm}$). Rechts: Originalvernetzung mit Viereckelementen nach [72].

Der Knorpelzylinder wird am Boden fest eingespannt, kann an den Seitenwänden reibungsfrei tangential gleiten und erfährt an der Deckfläche vorgegebene Verschiebungen von maximal $-0,125\,\mathrm{mm}$ (5 % Stauchung bezogen auf die Gesamthöhe). Diese werden in 500 s aufgebracht und weitere 500 s konstant gehalten. An der Belastungsseite tritt kein Porenwasserdruck auf (Dirichlet-Randbedingung bezüglich p), an den Seitenwänden und am Boden wird ein Ausströmen von Porenfluid verhindert (Neumann-Randbedingungen bezüglich p). Es wird ein axialsymmetrischer Zustand vorausgesetzt. In Abb. 2 sind links die geometrischen Abmessungen sowie die Randbedingungen der Struktur dargestellt. Auf der rechten Seite ist das von Spilker et al. verwendete Originalnetz zu sehen.

betrachteten Aufgabenstellungen der TPM außerordentlich effizient mit Taylor-Hood-Elementen zusammenwirkt. Konkret werden im ebenen Fall das Viereckelement $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$ vom Serendipity-Typ mit nicht vollständig biquadratischem Ansatz für die primäre Prozessvariable und bilinearer Interpolation für die duale Prozessvariable sowie das Dreieckelement $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$ genutzt. Taylor-Hood-Elemente zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass sie die Stetigkeit der Lösung sowohl für die primäre als auch für die duale Variable über benachbarte Elemente hinweg garantieren (U/p-c-Formulierung).

Ein wichtiger Aspekt adaptiver numerischer Verfahren ist die Auswahl geeigneter Fehlerschätzer bzw. -indikatoren für die Beurteilung der Güte der Ortsdiskretisierung. Von Meyer wird in [54] ein Fehlerschätzer mit elementorientierten Anteilen η_T für das gemischte Problem hergeleitet, der die globale Lösung auf der Basis der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen beurteilt. Der Autor weist dabei die Analogie zum üblichen residualen a posteriori Fehlerschätzer für das Verschiebungsproblem der Festkörpermechanik nach und zeigt dessen Eignung im Fall großer Verzerrungen nahezu inkompressibel elastischer Materialien (vgl. auch [18]). Die gleiche Vorgehensweise zur Fehlerschätzung wurde auch erfolgreich im Rahmen der TPM genutzt. Auf die Analyse zusätzlicher, problemspezifischer Fehlerindikatoren wurde zunächst verzichtet.

Bei der Realisierung des gemischten Randwertproblems der TPM konnten die für die nahezu inkompressible Elastizität im Fall großer Verzerrungen in SPC-PM2AdNlMix implementierten adaptiven Algorithmen zur Fehlerschätzung und zur Übertragung der Feldvariablen auf neue Netzstrukturen in effizienter Weise zur Anwendung kommen. Ebenso wurden die hierarchischen Strategien zur Elementteilung und -vergröberung genutzt. Das betrifft u. a. auch das Problem der hängenden Knoten. Diese können bei bestimmten Verfeinerungsstrategien vorkommen und werden nicht durch spezielle Elementteilungen am Übergang vom feineren zum gröberen Gitter umgangen, sondern akzeptiert und mit Hilfe spezieller Projektionsoperatoren im Löser behandelt. Knotenbezogene Daten werden mit Hilfe der entsprechenden Formfunktionen auf das neue Netz übertragen. Eine Übertragung stützstellenbezogener Daten ist nicht erforderlich, da im Fall des elastischen Materialverhaltens des Festkörperskeletts alle Informationen aus den knotenbezogenen Variablen auf dem neuen Netz gewonnen werden können. Für Details zur verwendeten adaptiven Vorgehensweise wird z. B. auf [15–17] und weitere, dort angegebene Quellen verwiesen.

Wird die lokale Volumenbilanz des Kontinuums in der verallgemeinerten materiellen Darstellung (70) mit einer beliebigen Testfunktion $q(\boldsymbol{X}_S) \in L_2(\Omega_0)$ multipliziert und anschließend eine Integration über das Volumen des undeformierten Gebietes Ω_0 ausgeführt, dann folgt:

$$\int\limits_{\Omega_0} \left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}} \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S \left(\boldsymbol{U}_S ; \dot{\boldsymbol{U}}_S \right) \right) q \, d\Omega_0 + \int\limits_{\Omega_0} \left(\mathrm{Div}_S \, \widetilde{\boldsymbol{W}}_F \right) q \, d\Omega_0 = 0 \,. \tag{71}$$

Mit einer zu (54) analogen Regel für die Berechnung der Divergenz des Produktes eines Vektors mit eine Skalar kann das zweite Integral der schwachen Formulierung der Volumenbilanz des Kontinuums (71) auch geschrieben werden als

$$\int\limits_{\Omega_0} \left(\mathrm{Div}_S \, \widetilde{\boldsymbol{W}}_F \right) q \, d\Omega_0 = \int\limits_{\Omega_0} \mathrm{Div}_S \left(q \, \widetilde{\boldsymbol{W}}_F \right) d\Omega_0 - \int\limits_{\Omega_0} \left(\mathrm{Grad}_S \, q \right) \widetilde{\boldsymbol{W}}_F \, d\Omega_0 \,. \tag{72}$$

Nach dem Integralsatz von Gauß-Ostrogradski gilt:

$$\int\limits_{\Omega_0} \mathrm{Div}_S \left(q \, \widetilde{\boldsymbol{W}}_F \right) d\Omega_0 = \int\limits_{\Gamma_{0Np}} q \, \mathfrak{N} \widetilde{\boldsymbol{W}}_F \, d\Gamma_0 = \int\limits_{\Gamma_{0Np}} \bar{R}_p \, q \, d\Gamma_0 \tag{73}$$

mit dem gegebenen, von äußeren Einwirkungen induzierten, relativen Fluidstrom $\bar{R}_p$ am Randabschnitt Γ_{0Np}. Folglich kann Gleichung (71) wie nachstehend dargestellt werden:

$$\int\limits_{\Omega_0} \left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}} \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S \left(\boldsymbol{U}_S ; \dot{\boldsymbol{U}}_S \right) \right) q \, d\Omega_0 - \int\limits_{\Omega_0} \left(\mathrm{Grad}_S \, q \right) \widetilde{\boldsymbol{W}}_F \, d\Omega_0 = - \int\limits_{\Gamma_{0Np}} \bar{R}_p \, q \, d\Gamma_0 \,. \tag{74}$$

Schlussendlich gilt es, aus dieser Beziehung die Filtergeschwindigkeit zu eliminieren und dafür den Porenwasserdruck als Prozessvariable zu integrieren. In diesem Zusammenhang soll das so genannte *Darcysche Gesetz* zur Charakterisierung von Fluidströmungen in porösen Medien betrachtet werden. Es ist eine empirisch ermittelte Gesetzmäßigkeit und weist formale Analogien beispielsweise zum Fourierschen Gesetz über den Wärmefluss sowie dem Fickschen Gesetz der Massediffusion auf.

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist die Auswertung des Terms $-\widehat{\boldsymbol{p}}_F^{\,E} \, \boldsymbol{w}_F$ der räumlichen Darstellung der Clausius-Duhem-Ungleichung für das Kontinuum (37). Wird für den darin auftretenden effektiven Impulsproduktionsterm (auch als *effektive Schleppkraft*[8] bezeichnet) unter Voraussetzung laminarer Strömungsprozesse in den Poren die lineare Abhängigkeit

[8] Der Begriff Schleppkraft (englisch *drag* oder *drag force*) bezeichnet in der Strömungsmechanik die Kraft, die ein Fluid beim Durchströmen eines porösen Mediums auf den (dort in der Regel als starr angenommenen) Festkörper ausübt. Sie repräsentiert die volumenbezogene Interaktionskraft zwischen Festkörperskelett und Porenfluid. Ist die Schleppkraft groß genug, kann das Fluid bei granularem Festkörperskelett einzelne Partikel lösen (*mitschleppen*). Die Schleppkraft spielt beispielsweise eine entscheidende Rolle bei der Bildung von Flusstälern.

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_F^E \;=\; -\phi_F^2\,\mu_{FR}\,\boldsymbol{k}_S^{-1}\,\boldsymbol{w}_F \tag{75}$$

angenommen, so gilt $-\widehat{\boldsymbol{p}}_F^E\,\boldsymbol{w}_F > 0$. Dabei wurde berücksichtigt, dass die konstitutiven Parameter Fluidviskosität μ_{FR} und spezifische intrinsische Permeabilität des Festkörperskeletts $\boldsymbol{k}_S$ stets positive Werte annehmen. Unter diesen Voraussetzungen bleibt (37) o.E.d.A. erfüllt.

Wie leicht gezeigt werden kann, vereinfachen sich die partialen Gleichgewichtsbedingungen bezüglich des Porenfluids (49b) nach Einsetzen der konstitutiven Zerlegungen für den Spannungstensor (30b) und den Impulsproduktionsterm (35) sowie unter der Voraussetzung zu vernachlässigender Viskosität des Fluids.

$$\widehat{\boldsymbol{p}}_F^E \;-\; \varrho_F\,\operatorname{grad} p \;+\; \varrho_F \boldsymbol{b}_F \;=\; \boldsymbol{0} \tag{76}$$

Mit dem Ansatz (75) ergibt sich daraus der geforderte Zusammenhang zwischen der Filtergeschwindigkeit und dem Porenwasserdruck (speziell: dessen Gradienten) – das Darcysche Gesetz in räumlicher Darstellung.

$$\widetilde{\boldsymbol{w}}_F \;=\; \phi_F\,\boldsymbol{w}_F \;=\; -\,\frac{\boldsymbol{k}_S}{\mu_{FR}}\,(\operatorname{grad} p \;-\; \varrho_F \boldsymbol{b}_F) \;=\; -\boldsymbol{k}\,(\operatorname{grad} p \;-\; \varrho_F \boldsymbol{b}_F) \tag{77}$$

Hier und im Weiteren soll mit dem zweistufigen Tensor $\boldsymbol{k}$ elementar die Permeabilität des porösen Mediums bezeichnet werden[9]. In diesem Zusammenhang kann auch eine Anisotropie bezüglich der Durchlassfähigkeit des porösen Mediums makroskopisch beschrieben werden, die der Topologie und/oder Anordnung der Poren auf der Mikroebene geschuldet sein kann.

Abschließend soll (77) in die verallgemeinerte materielle Darstellung überführt werden. Diese Transformation ist unter Berücksichtigung der Abbildung

$$\operatorname{grad} p \;=\; \boldsymbol{F}_S^{-T}\,\operatorname{Grad}_S p \tag{78}$$

sowie des Zusammenhanges (24) problemlos zu verwirklichen. Es folgt bei Vernachlässigung volumenförmiger Kräfte:

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}_F \;=\; -\boldsymbol{K}\,\operatorname{Grad}_S p \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{K} \;=\; J_S \boldsymbol{F}_S^{-1} \boldsymbol{k}\, \boldsymbol{F}_S^{-T}\,. \tag{79}$$

[9] Mit dem Terminus *Permeabilität* werden in der Literatur unterschiedliche Größen im Zusammenhang mit Strömungsvorgängen in porösen Medien benannt. Ihnen allen ist gemein, dass sie die Durchlassfähigkeit des Materials beschreiben. Daher wird mitunter auch synonym von *hydraulischer Leitfähigkeit* gesprochen. Diese hängt allgemein von der Porosität des Festkörperskeletts sowie charakteristischen Eigenschaften des Porenfluids (beispielsweise dessen Viskosität) ab. Gebräuchlich sind die Verwendung der spezifischen intrinsischen Permeabilität $\boldsymbol{k}_S$ sowie der Darcy-Permeabilität $\boldsymbol{k}_F$. Zwischen diesen Definitionen gilt der Zusammenhang $\boldsymbol{k}_F = (\gamma_{FR}\,\boldsymbol{k}_S)/\mu_{FR}$ mit der realen Wichte $\gamma_{FR} = \varrho_{FR}\,g = \varrho_{FR}\,|\boldsymbol{b}_F|$ des Porenfluids. Bei der Übernahme von Literaturwerten für die Permeabilität ist daher stets auf die verwendete Definition dieser Größe zu achten.

folgt zusätzlich auf der Basis eines Fehlerindikators zur Erfüllung der Fließbedingung. Für die Ermittlung der Knoten- und Gaußpunktwerte der neu generierten Elemente wird eine Übertragungsstrategie auf der Basis der Extrapolation der Gaußpunktwerte des alten Netzes mit zusätzlicher Glättung in den Knoten des modifizierten Netzes diskutiert.

Die oben vorgestellte Vorgehensweise zur numerischen Lösung von Anfangs-Randwert-Aufgaben der Theorie poröser Medien im Falle eines fluidgesättigten Zweiphasenmaterials bei großen Verzerrungen wurde im hauseigenen FE-Programm SPC-PM2AdNlMix realisiert. Dieses basiert auf der an der TU Chemnitz entwickelten Programmversion SPC-PMA2dNl zur Simulation des mechanischen Verhaltens hyperelastischer (im Fall ihrer Kompressibilität) und anisotroper elastisch-plastischer Werkstoffe bei großen Verzerrungen (vgl. [14, 46]). Dabei konnte besonders im Sinne einer adaptiven Strategie in effektiver Weise auf die hierarchischen Datenstrukturen, deren intelligente Ausnutzung durch den Gleichungssystemlöser sowie die offenen Materialschnittstellen aufgebaut werden. Größere Veränderungen waren naturgemäß mit der Realisierung eines Lösers für Mehrfeldprobleme und geeigneter Elementroutinen verbunden. Zur effektiven Nutzung bisheriger Programmstrukturen wurde die Ortsdiskretisierung für das gemischte Problem mit Taylor-Hood-Elementen realisiert, die eine besonders gute Kompatibilität mit den vorhandenen hierarchischen Datenstrukturen aufweisen. In einer ersten Entwicklungsphase wurde im Rahmen von SPC-PM2AdNlMix die numerische Simulation von Aufgaben der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen umgesetzt. Die dabei entstandenen Algorithmen und Programmstrukturen konnten für die Realisierung der TPM vollständig genutzt werden.

Die numerische Approximation der linearisierten Randwertaufgabe (99a), (99b) bzw. (105) mittels gemischter Finite-Elemente-Strategien führt in jedem Newton-Schritt auf ein Gleichungssystem der Form:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & -\boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\widehat{\boldsymbol{U}}_S \\ \Delta\widehat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{f}} \\ \widehat{g} \end{pmatrix}. \tag{115}$$

Während die Teilmatrix $\boldsymbol{K}$ symmetrisch und positiv definit ist, gilt für die Gesamtsystemmatrix lediglich die Symmetrie. Sie ist im Allgemeinen indefinit. Die effiziente Lösung dieses Gleichungssystems erfordert besondere Techniken. In SPC-PM2AdNlMix wird eine iterative Lösungsstrategie verwendet, die auf einer Idee von Bramble und Pasciak [13] basiert. Kerngedanke ist dabei, das indefinite System mit einer geeigneten Vorkonditionierung zu einem positiv definiten System umzuformen. In [55] wurde eine Verallgemeinerung des Bramble-Pasciak-CG vorgeschlagen und bei der Lösung gemischter Finite-Elemente-Schemata für Elastizitätsprobleme eingesetzt. Für Details zur Auswahl von Steuergrößen dieses Algorithmus und dessen Konvergenzverhalten wird u. a. auf [56] verwiesen. Es zeigte sich, dass dieser auf hierarchischen Strukturen basierende Löser auch für die

In Zusammenhang mit der numerischen Simulation spezieller Anwendungen in der Biomechanik weicher Gewebe (vorrangig Gelenkknorpel) wurden bereits komplexere Materialmodelle zur Charakterisierung des Festkörperskeletts entwickelt und über eine Nutzerschnittstelle in das kommerzielle FE-Paket MSC-Marc implementiert (vgl. [35, 39–41]). Die dort verwendeten Ansätze basieren auf dem so genannten *overlay-Konzept* (Superposition des Spannungstensors entsprechend separater Materialcharakteristika) und betreffen die Beschreibung von elastischer Anisotropie, Zug-Druck-Nichtlinearitäten (Bimodularität), intrinsischer Viskoelastizität des Festkörperskeletts sowie dem Einfluss elektrischer Potenziale durch repulsive Kräfte elektrisch nicht neutraler Makromoleküle. Diese Ansätze können ohne großen Aufwand in die hauseigene Software übertragen werden. Ähnliches gilt ebenso für die im Rahmen von Forschungsprojekten zur Metallplastizität entwickelten Modelle der anisotropen Elastoplastizität bei großen Verzerrungen (siehe z. B. [14, 46]). Sie können ohne Einschränkungen zur Charakterisierung des Festkörperskeletts genutzt werden, wenn experimentelle Ergebnisse ein entsprechendes Vorgehen nahe legen. Hierbei ist jedoch die Implementierung wegen der erforderlichen iterativen Lösung des Anfangswertproblems mit größerem Aufwand verbunden.

3.4 Stabile Elementformulierung und adaptive Netzanpassung im Kontext eines hierarchischen Lösers

In der Literatur zur Kontinuumsmechanik sind nur wenige Untersuchungen bezüglich Fragen der Lösungsstabilität von FE-Ansätzen und der damit verbundenen Elementauswahl bei gemischten Problemen für Mehrphasenmedien zu finden. Lewis und Schrefler [50] geben Hinweise, dass hierbei von den Erfahrungen bei nahezu inkompressiblem Verhalten von Elastomeren profitiert werden kann und schlagen die Verwendung von Taylor-Hood-Elementen vor.

Auch zu den Fragen der Adaptivität im Rahmen von FE-Realisierungen der Theorie poröser Medien gibt es erst in jüngster Zeit verstärkt Veröffentlichungen. So stellt beispielsweise Ehlers [26] die numerischen Grundlagen der Raum- und Zeit-Adaptivität der FEM gemischter Probleme der Theorie poröser Medien dar. Bei Ehlers basiert die Raumadaptivität auf der Auswertung von problemangepassten Fehlerschätzern des Zienkiewicz-Zhu-Typs. Damit erfolgt die Erfassung von Fehlern der wichtigsten Feldgrößen zur Beschreibung der Mechanik eines Mehrphasenkontinuums für komplette Neuvernetzungen und hierarchische Strategien. In Ergänzung dazu schlagen Wunderlich et al. [80] einen modifizierten residualen a posteriori Fehlerschätzer bezüglich des Gleichgewichts vor. Einen Fehlerschätzer im Sinne eines Zienkiewicz-Zhu-Ansatzes verwenden die genannten Autoren zur Ermittlung der Approximationsgüte für das Darcysche Gesetz. Die Netzsteuerung bezüglich des elastisch-plastischen Materialverhaltens des Festkörperskeletts er-

Mit den Beziehungen (63), (74) sowie unter Berücksichtigung des Darcyschen Gesetzes in der Darstellung (79) besteht somit die gemischte Randwertaufgabe der Theorie poröser Medien im Falle eines gesättigten Zweiphasenmaterials bei großen Verzerrungen in der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$a_0(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{V}_S) + b_0(\boldsymbol{U}_S;p,\boldsymbol{V}_S) = f(\boldsymbol{V}_S) \qquad \forall \boldsymbol{V}_S \in (H_0^1(\Omega_0))^3 \tag{80a}$$

$$b_0(\boldsymbol{U}_S;\dot{\boldsymbol{U}}_S,q) - c_0(p,q) = g(q) \qquad \forall q \in L_2(\Omega_0) \tag{80b}$$

bezüglich der Feldgrößen Verschiebungen des Festkörperskeletts $\boldsymbol{U}_S$ und Porenwasserdruck p. Dabei gilt für die einzelnen Teile des Systems:

$$a_0(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{V}_S) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{T}_S^E(\boldsymbol{U}_S) \cdot\cdot\, \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{V}_S)\, d\Omega_0\,, \tag{81a}$$

$$b_0(\boldsymbol{U}_S;p,\boldsymbol{V}_S) = -\int_{\Omega_0} p\,(\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{U}_S) \cdot\cdot\, \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{V}_S))\, d\Omega_0\,, \tag{81b}$$

$$f(\boldsymbol{V}_S) = \int_{\Gamma_{0NU}} \bar{\boldsymbol{R}}_U \boldsymbol{V}_S\, d\Gamma_0\,, \tag{81c}$$

$$c_0(p,q) = \int_{\Omega_0} (\mathrm{Grad}_S\, q)\ \boldsymbol{K}\ (\mathrm{Grad}_S\, p)\, d\Omega_0\,, \tag{81d}$$

$$g(q) = \int_{\Gamma_{0Np}} \bar{R}_p\, q\, d\Gamma_0\,. \tag{81e}$$

Zur Vereinfachung der weiteren Betrachtungen wird einschränkend davon ausgegangen, dass eingeprägte Kräfte und Randflüsse nicht von den numerischen Prozessvariablen abhängen.

3.2 Linearisierung der schwachen Formulierungen

Zur Lösung des Gleichungssystems (80a) und (80b) mit Hilfe des Newton-Verfahrens macht sich eine Linearisierung erforderlich. Dazu ist zu bemerken, dass lediglich die Abhängigkeit von $\boldsymbol{U}_S$ in $a_0(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{V}_S)$, $b_0(\boldsymbol{U}_S;p,\boldsymbol{V}_S)$ sowie $b_0(\boldsymbol{U}_S;\dot{\boldsymbol{U}}_S,q)$ nichtlinearen Charakter trägt. Hinsichtlich $\boldsymbol{V}_S$, q und auch p ist das System (80a), (80b) linear. Damit bestehen wiederum Analogien zur Theorie

der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen. Erschwerend für die Lösung des gemischten Randwertproblems kommt im Fall der TPM jedoch eine lineare Abhängigkeit von der zeitlichen Ableitung der Verschiebungen des Festkörperskeletts in $b_0(\boldsymbol{U}_S; \dot{\boldsymbol{U}}_S, q)$ hinzu. Vor der Linearisierung des Gleichungssystems ist somit zunächst eine geeignete zeitliche Auflösung von Zeitdifferentialen durch Differenzenansätze durchzuführen.

Die Zeitdiskretisierung erfolgt unter Nutzung des verallgemeinerten Einschritt-Differenzen-Verfahrens (Integrationsalgorithmus)

$$y_{n+1} = y_n + (\alpha\, f_{n+1} + (1-\alpha)\, f_n)\, \Delta t \tag{82}$$

mit

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \tag{83}$$

und

$$\alpha \in [0,1], \qquad \alpha = \begin{cases} 0,0 & : \text{ Euler vorwärts} \\ 1,0 & : \text{ Euler rückwärts} \\ 0,5 & : \text{ Crank-Nicolson (Trapezregel)} \end{cases}$$

für eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \dot{y} = f(t,\, y)\,. \tag{84}$$

Bezüglich der zeitlichen Ableitung der Verschiebungen des Festkörperskeletts kann somit eine zu (82) analoge Beziehung angegeben werden.

$$(\boldsymbol{U}_S)_{n+1} = (\boldsymbol{U}_S)_n + \left[\alpha\,(\dot{\boldsymbol{U}}_S)_{n+1} + (1-\alpha)\,(\dot{\boldsymbol{U}}_S)_n\right] \Delta t \tag{85}$$

Hier weist der Index $(.)_n$ auf Variablen zum Zeitpunkt t_n hin, die aus der Lösung des vorangegangenen Lastschritts bekannt sind, der Index $(.)_{n+1}$ auf Variablen, die Bestandteil der aktuellen Lösung zur Zeit t_{n+1} sind. Deren spezielle Kennzeichnung soll im Weiteren unterbleiben. Nach Umstellung von (85) ergibt sich somit:

$$\dot{\boldsymbol{U}}_S = \frac{1}{\alpha\,\Delta t}\,\boldsymbol{U}_S - \frac{1}{\alpha\,\Delta t}\,(\boldsymbol{U}_S)_n - \frac{1-\alpha}{\alpha}\,(\dot{\boldsymbol{U}}_S)_n\,. \tag{86}$$

Die Anwendung dieser Zeitdiskretisierung auf die Beziehungen (80a), (80b) führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem, in dem nur noch die aktuellen (unbekannten) Werte der Primärvariablen selbst, jedoch nicht mehr deren Ableitungen zur Zeit t_{n+1} enthalten sind:

$$a_0(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) + b_0(\boldsymbol{U}_S; p, \boldsymbol{V}_S) = f(\boldsymbol{V}_S) \tag{87a}$$

$$b_1(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{U}_S, q) - \alpha\,\Delta t\, c_0(p,q) = \alpha\,\Delta t\, g(q) \tag{87b}$$

des Verzerrungstensors dargestellt wird (mit $\boldsymbol{G}_S^{-1}$ ist dabei der Metriktensor der dualen Basis bezeichnet), gilt für die materialunabhängigen Ableitungen des elastischen Tangentenmoduls:

$$\frac{\partial I(\boldsymbol{C}_S)}{\partial \boldsymbol{C}_S} = \boldsymbol{G}_S^{-1}\,, \tag{113a}$$

$$\frac{\partial II(\boldsymbol{C}_S)}{\partial \boldsymbol{C}_S} = \boldsymbol{G}_S^{-1}\left(\boldsymbol{C}_S \cdot\cdot\, \boldsymbol{G}_S^{-1}\right) - \boldsymbol{G}_S^{-1}\boldsymbol{C}_S\,\boldsymbol{G}_S^{-1}\,, \tag{113b}$$

$$\frac{\partial III(\boldsymbol{C}_S)}{\partial \boldsymbol{C}_S} = J_S^2\,\boldsymbol{C}_S^{-1}\,, \tag{113c}$$

$$\frac{\partial^2 I(\boldsymbol{C}_S)}{\partial \boldsymbol{C}_S \partial \boldsymbol{C}_S} = \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{0}}\,, \tag{113d}$$

$$\frac{\partial^2 II(\boldsymbol{C}_S)}{\partial \boldsymbol{C}_S \partial \boldsymbol{C}_S} = \boldsymbol{G}_S^{-1} \otimes \boldsymbol{G}_S^{-1} - \boldsymbol{G}_S^{-1}\underset{\boldsymbol{4}}{\tilde{\boldsymbol{I}}}\,\boldsymbol{G}_S^{-1}\,, \tag{113e}$$

$$\frac{\partial^2 III(\boldsymbol{C}_S)}{\partial \boldsymbol{C}_S \partial \boldsymbol{C}_S} = J_S^2\left(\boldsymbol{C}_S^{-1} \otimes \boldsymbol{C}_S^{-1} - \boldsymbol{C}_S^{-1}\underset{\boldsymbol{4}}{\tilde{\boldsymbol{I}}}\,\boldsymbol{C}_S^{-1}\right). \tag{113f}$$

Im Laufe mehrerer Dekaden wurde eine Vielzahl von Arbeiten zur Hyperelastizität und der Auswahl geeigneter Funktionen für die freie Helmholtz-Energiedichte veröffentlicht. Umfangreiche Analysen zu speziellen invariantenbasierten Modellen werden beispielsweise in [60] vorgestellt. Die unten präsentierten numerischen Untersuchungen wurden am Beispiel von drei konkreten Realisierungen für die Funktion der freien Helmholtz-Energiedichte analysiert.

$$\psi_S = c_{10}\,(I - \ln III - 3) + D_2\,(\ln III)^2 \tag{114a}$$

$$\psi_S = c_{10}\,(I-3) + c_{01}\,(II-3) - (c_{10} + 2c_{01})\ln III + D_2\,(\ln III)^2 \tag{114b}$$

$$\psi_S = \frac{c_{10}}{\alpha}\left[e^{\alpha(I - \ln III - 3)} - 1\right] + D_2\,(\ln III)^2 \tag{114c}$$

Die ersten beiden Ansätze (in der angegebenen Reihenfolge: Neo-Hooke und Mooney-Rivlin) finden breite praktische Anwendung bei der Modellierung des Materialverhaltens von Elastomeren und gehören zu den Standardformulierungen in kommerziellen FEM-Programmen. Der dritte Ansatz basiert auf Funktionen, die von Fung (siehe z. B. [32]) vor ca. 30 Jahren untersucht wurden und das spezifische, versteifende Materialverhalten biologischer Gewebe im elastischen Bereich besser approximieren als Polynomansätze bezüglich der Invarianten geeigneter Verzerrungsmaße. Die Größen c_{10}, c_{01}, D_2 sowie α stellen Materialparameter dar.

3.3 Deformationsgesetz für den Effektivspannungstensor des Festkörperskeletts und konsistente Materialtangente

Mit dem Tangentenmodul (der konsistenten Materialtangente)

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{E}_S} = \frac{\partial \boldsymbol{T}_S^E}{\partial \boldsymbol{E}_S} - p\frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}}{\partial \boldsymbol{E}_S} \tag{107}$$

basierend auf der additiven Zerlegung des Spannungstensors (40) ist wiederum eine Analogie zur Theorie der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen gegeben (vgl. [18]). Zu beachten ist jedoch die abweichende Vorzeichenkonvention bezüglich des hydrostatischen Drucks p im Rahmen der TPM (hier: der Porenwasserdruck). Mit der Definition eines vierstufigen isotropen Tensors

$$\tilde{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{4}} = \delta_I^K \delta_L^J \boldsymbol{G}^I \otimes \boldsymbol{G}_J \otimes \boldsymbol{G}_K \otimes \boldsymbol{G}^L \tag{108}$$

gilt für den Anteil, der die Wechselwirkungen zwischen strömendem Porenfluid und sich deformierendem Festkörperskelett charakterisiert:

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}}{\partial \boldsymbol{E}_S} = 2\frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}}{\partial \boldsymbol{C}_S} = J_S\left(\boldsymbol{C}_S^{-1}\otimes\boldsymbol{C}_S^{-1} - 2\,\boldsymbol{C}_S^{-1}\tilde{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{4}}\,\boldsymbol{C}_S^{-1}\right). \tag{109}$$

Diese Beziehung ist unabhängig vom konkreten, intrinsischen Materialverhalten des Festkörperskeletts wirksam. Wie oben diskutiert, ist jenes durch den Effektivspannungstensor $\boldsymbol{T}_S^E$ gekennzeichnet. In diesem Zusammenhang wird im Weiteren zunächst von kompressiblem, isotrop elastischem Materialverhalten ausgegangen. Bei Existenz einer entsprechenden Funktion der freien Helmholtz-Energiedichte in ausschließlicher Abhängigkeit von einem elastischen Verzerrungsmaß, das dabei den Gesamtverzerrungen $\boldsymbol{C}_S$ entspricht, lassen sich aus (41) die übliche explizite Spannungs-Verzerrungs-Beziehung der Hyperelastizität

$$\boldsymbol{T}_S^E = 2\frac{\partial\left(\varrho_{S0}\,\widetilde{\psi}_S\right)}{\partial \boldsymbol{C}_S} = 2\frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{C}_S} \tag{110}$$

und damit der zugehörige Tangentenmodul ableiten.

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}_S^E}{\partial \boldsymbol{E}_S} = 2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}_S}\left(2\frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{C}_S}\right) = 4\frac{\partial^2 \psi_S}{\partial \boldsymbol{C}_S \partial \boldsymbol{C}_S} \tag{111}$$

Für den Fall, dass $\psi_S(\boldsymbol{C}_S)$ als isotrope Tensorfunktion der Invarianten

$$I(\boldsymbol{C}_S) = \boldsymbol{C}_S \cdot\cdot\, \boldsymbol{G}_S^{-1}, \tag{112a}$$

$$II(\boldsymbol{C}_S) = \frac{1}{2}\left[(I(\boldsymbol{C}_S))^2 - \boldsymbol{C}_S\boldsymbol{G}_S^{-1} \cdot\cdot\, \boldsymbol{C}_S\boldsymbol{G}_S^{-1}\right], \tag{112b}$$

$$III(\boldsymbol{C}_S) = \det \boldsymbol{C}_S = J_S^2 \tag{112c}$$

mit

$$\begin{aligned} b_1(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{U}_S,q) &= b_0(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{U}_S,q) - b_0(\boldsymbol{U}_S;(\boldsymbol{U}_S)_n,q) \\ &- (1-\alpha)\,\Delta t\, b_0(\boldsymbol{U}_S;(\dot{\boldsymbol{U}}_S)_n,q). \end{aligned} \tag{88}$$

Für die Linearisierung des nichtlinearen Systems (87a), (87b) im Sinne des Newton-Verfahrens werden im Folgenden Taylor-Entwicklungen bezüglich beider Feldvariablen $\boldsymbol{U}_S$ und p betrachtet. Diese Vorgehensweise ist hinsichtlich einer Linearisierung von p nicht zwingend erforderlich, wird hier jedoch im Sinne einer konsequent inkrementellen FE-Formulierung bevorzugt.

Gegeben sei die Lösung des Zweifeldproblems $(\boldsymbol{U}_S,p) \overset{\text{def}}{=} (\boldsymbol{U}^i_{S(t+\Delta t)}, p^i_{(t+\Delta t)})$ aus der i-ten Newton-Iteration zur Zeit t_{n+1} mit $((\boldsymbol{U}_S)_n, p_n) \overset{\text{def}}{=} (\boldsymbol{U}^0_{S(t+\Delta t)}, p^0_{(t+\Delta t)})$, gesucht ist die Lösung $(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S, p+\Delta p) \overset{\text{def}}{=} (\boldsymbol{U}^{i+1}_{S(t+\Delta t)}, p^{i+1}_{(t+\Delta t)})$ in der (aktuellen) $(i+1)$-ten Newton-Iteration zum Zeitpunkt t_{n+1}. Der Effektivspannungstensor des Festkörperskeletts $\boldsymbol{T}_S^E$ sowie die Größe $\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}} = J_S\boldsymbol{C}_S^{-1}$ aus der Spannungszerlegung (40) können als nichtlineare Funktionen des Verzerrungstensors $\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S)$ angesehen werden. Ihre Linearisierung erfolgt über Taylor-Entwicklungen, die nach dem ersten Glied abgebrochen werden:

$$\boldsymbol{T}_S^E(\boldsymbol{E}_S+\Delta\boldsymbol{E}_S) = \boldsymbol{T}_S^E(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S)) + \frac{\partial \boldsymbol{T}_S^E(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S))}{\partial \boldsymbol{E}_S} \cdot\cdot\, \Delta\boldsymbol{E}_S, \tag{89a}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S+\Delta\boldsymbol{E}_S) = \boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S)) + \frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S))}{\partial \boldsymbol{E}_S} \cdot\cdot\, \Delta\boldsymbol{E}_S. \tag{89b}$$

Dabei gilt:

$$\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S) = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S)^T + \mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S + \mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S(\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S)^T\right], \tag{90a}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S) = \frac{1}{2}\big[&(\mathrm{Grad}_S(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S))^T + \mathrm{Grad}_S(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S) + \\ &\mathrm{Grad}_S(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S)(\mathrm{Grad}_S(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S))^T\big] \end{aligned} \tag{90b}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{E}_S &= \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S) - \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S) \\ &= \frac{1}{2}\big[(\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S)^T + \mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S + \mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S(\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S)^T \\ &\quad + \mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S(\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S)^T + \mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S(\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S)^T\big] \\ &= \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S;\Delta\boldsymbol{U}_S) + \frac{1}{2}\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S(\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S)^T. \end{aligned} \tag{91}$$

Weiterhin folgt für $\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S)$ die Beziehung:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{V}_S\right) &= \boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{V}_S\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S(\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{V}_S)^T+\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{V}_S(\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S)^T\right] \quad (92)\end{aligned}$$

und mit der Definition (62) ergeben sich letztlich unter struktureller Berücksichtigung der Linearisierung (92):

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S\right)\\ &=\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{U}_S\right)+\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S;\Delta\boldsymbol{U}_S\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S(\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S)^T+\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S(\mathrm{Grad}_S\boldsymbol{U}_S)^T\right], \quad (93)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S;(\boldsymbol{U}_S)_n\right)\\ &=\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S;(\boldsymbol{U}_S)_n\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}_S(\boldsymbol{U}_S)_n(\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S)^T+\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S(\mathrm{Grad}_S(\boldsymbol{U}_S)_n)^T\right]. \quad (94)\end{aligned}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit soll bezüglich der Zeitdiskretisierung zunächst lediglich der Sonderfall des (auch in der Literatur in der Regel diskutierten) impliziten Euler-Verfahrens mit $\alpha = 1$ betrachtet werden, da es auf einfachere mathematische Strukturen führt und im Gegensatz zu $\alpha \neq 1$ eine symmetrische Systemmatrix gewährleistet. Dann folgt für die Linearisierung des Systemanteils (88) unter Beachtung von (89b), (91), (93) sowie (94) und Vernachlässigung von Termen, die in $\Delta\boldsymbol{U}_S$ nichtlinear sind:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S+\Delta\boldsymbol{E}_S)\cdot\cdot\left[\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S\right)-\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S+\Delta\boldsymbol{U}_S;(\boldsymbol{U}_S)_n\right)\right]\\ &=\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S))\cdot\cdot\,\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S;\Delta\boldsymbol{U}_S\right)\\ &\quad+\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S))\cdot\cdot\,\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{U}_S-(\boldsymbol{U}_S)_n\right)\\ &\quad+\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S;\Delta\boldsymbol{U}_S\right)\cdot\cdot\,\frac{\partial\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S))}{\partial\boldsymbol{E}_S}\cdot\cdot\,\boldsymbol{E}_S\left(\boldsymbol{U}_S;\boldsymbol{U}_S-(\boldsymbol{U}_S)_n\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S))\cdot\cdot\,\mathrm{Grad}_S(\boldsymbol{U}_S-(\boldsymbol{U}_S)_n)(\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S)^T\\ &\quad+\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S))\cdot\cdot\,\mathrm{Grad}_S\Delta\boldsymbol{U}_S(\mathrm{Grad}_S(\boldsymbol{U}_S-(\boldsymbol{U}_S)_n))^T. \quad (95)\end{aligned}$$

Nach der ersten Iteration des Newton-Verfahrens ist $\Delta\boldsymbol{U}_S$ gleich der Differenz $\boldsymbol{U}_S - (\boldsymbol{U}_S)_n$. Im Verlaufe der folgenden Newton-Iterationen wird $\Delta\boldsymbol{U}_S$ permanent kleiner um letztlich gegen Null zu streben. Aus diesem Grunde werden im

eine in $\dot{\boldsymbol{U}}_S$, $\dot{p}$ und p lineare gemischte Formulierung der Theorie poröser Medien im Falle eines gesättigten Zweiphasenmaterials bei großen Verzerrungen.

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{U}_S;\dot{\boldsymbol{U}}_S,p,\boldsymbol{V}_S) &+ b(\boldsymbol{U}_S;\dot{p},\boldsymbol{V}_S) &= \dot{f}(\boldsymbol{V}_S) \quad (102a)\\ b(\boldsymbol{U}_S;\dot{\boldsymbol{U}}_S,q) &- c(p,q) &= g(q) \quad (102b)\end{aligned}$$

Basierend auf der üblichen Ortsdiskretisierung kann aus diesem System eine gemischte FE-Formulierung abgeleitet werden.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{UU} & \boldsymbol{M}_{Up}\\ \boldsymbol{M}_{Up}^T & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{U}}_S\\ \dot{p}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{K}_{pp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_S\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{f}\\ g\end{pmatrix} \quad (103)$$

Dabei ergeben sich die Teilmatrizen $\boldsymbol{M}_{UU}$, $\boldsymbol{M}_{Up}$, $\boldsymbol{K}_{pp}$ entsprechend aus den Funktionalen $a(\bullet)$, $b(\bullet)$, $c(\bullet)$ des Gleichungssystems (102a), (102b). Zur übersichtlicheren Darstellung soll das FEM-System verkürzt symbolisch geschrieben werden.

$$\boldsymbol{M}\,\dot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{Y}=\tilde{\boldsymbol{f}} \quad (104)$$

Wird dieses System im Sinne von (84) als Differentialgleichungssystem aufgefasst, kann darauf das Diskretisierungsschema (82) Anwendung finden. Nach einigen unkomplizierten Transformationen folgt:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{M}_{n+1}+\alpha\,\Delta t\,\boldsymbol{K}_{n+1})\,\Delta\boldsymbol{Y} &= \left(\alpha\,\Delta\tilde{\boldsymbol{f}}+\tilde{\boldsymbol{f}}_n\right)\Delta t\\ &\quad-(\alpha\boldsymbol{K}_{n+1}+(1-\alpha)\,\boldsymbol{K}_n)\,\Delta t\,\boldsymbol{Y}_n. \quad (105)\end{aligned}$$

Dieses FE-System stellt gleichzeitig die Linearisierung und Zeitdiskretisierung von (104) zur Ermittlung der Inkremente $\Delta\boldsymbol{U}_S$ und Δp der Prozessvariablen in einem Lastschritt $[t_n, t_{n+1}]$ dar. Da es nicht aus einer konsistenten Linearisierung abgeleitet wurde, sind zu seiner iterativen Lösung weitere Überlegungen erforderlich. Zunächst sei darauf hingewiesen, dass bezüglich der rechten Seite für die Verschiebungen des Festkörperskeletts entsprechend (82) gilt

$$\alpha\,\Delta\,\dot{f}+\left(\dot{f}\right)_n=\frac{\Delta f}{\Delta t}. \quad (106)$$

Weiterhin ist zu bemerken, dass die Matrizen $\boldsymbol{M}_{n+1}$ von $\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S$ und $p + \Delta p$ sowie $\boldsymbol{K}_{n+1}$ von $p + \Delta p$ und somit von Größen, die zu Beginn des Lastschrittes noch nicht bekannt sind, abhängen. Im Sinne eines modifizierten Newton-Verfahrens werden die Matrizen zunächst mit den Werten aus der ausiterierten Lösung des vorangegangenen Lastschritts gebildet und danach iterativ so lange an die aktuellen Werte der Prozessvariablen angepasst, bis ein zweckmäßig zu wählendes residuales Abbruchkriterium erfüllt ist.

$$\bar{f}(\boldsymbol{U}_S; p, \boldsymbol{V}_S) = \int_{\Gamma_{0NU}} \bar{\boldsymbol{R}}_U \boldsymbol{V}_S \, d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}_S) \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) \, d\Omega_0 \tag{101c}$$

$$b(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, q) = -\int_{\Omega_0} (\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{U}_S) \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S)) \, q \, d\Omega_0 \tag{101d}$$

$$c(\Delta p, q) = \int_{\Omega_0} (\mathrm{Grad}_S \, q) \, \boldsymbol{K} \, (\mathrm{Grad}_S \, \Delta p) \, d\Omega_0 \tag{101e}$$

$$\bar{g}(\boldsymbol{U}_S; p, q) = \Delta t \int_{\Gamma_{0Np}} \bar{R}_p \, q \, d\Gamma_0 + \Delta t \int_{\Omega_0} (\mathrm{Grad}_S \, q) \, \boldsymbol{K} \, (\mathrm{Grad}_S \, p) \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} (\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{U}_S) \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{U}_S - (\boldsymbol{U}_S)_n)) \, q \, d\Omega_0 \tag{101f}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S), p) &= \boldsymbol{T}_S^E(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S)) - p \, \boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S)) \\ &= \boldsymbol{T}_S^E(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S)) - p \, J_S \boldsymbol{C}_S^{-1} \end{aligned} \tag{101g}$$

Nach Ortsdiskretisierung kann das System (99a), (99b) in geeigneten Ansatzteilräumen $\Delta\boldsymbol{U}_S$, $\boldsymbol{V}_S \in \mathbb{V}_h^3 \subset \mathbb{V}^3$ und Δp, $q \in \mathbb{X}_h \subset \mathbb{X}$ im Rahmen einer gemischten FE-Formulierung gelöst werden. In diesem Zusammenhang soll erneut auf die strukturellen Analogien zur gemischten Formulierung der Theorie der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen hingewiesen werden. Diese Entsprechungen gestatten die effiziente Verwendung gleichartiger Verfahren und Algorithmen für beide Problemklassen.

Neben der oben diskutierten konsistenten Linearisierung des Gleichungssystems (80a), (80b) kann dessen Linearisierung und Zeitdiskretisierung auf der Basis des Integrationsschemas (82) in alternativer Weise gestaltet werden, die für beliebige Diskretisierungsparameter α zu einem symmetrischen System führt. Dieses Vorgehen erfordert jedoch die Verwendung eines modifizierten Newton-Verfahrens zur iterativen Lösung im Lastinkrement. Ausgangspunkt sind die materielle Zeitableitung der schwachen Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen (63) und die schwache Formulierung der Volumenbilanz des Kontinuums in der vorliegenden Form. Unter Verwendung der oben eingeführten Bezeichnungen ergibt sich

Sinne der Linearisierung Produkte von $\Delta\boldsymbol{U}_S$ und $\boldsymbol{U}_S - (\boldsymbol{U}_S)_n$ als Annäherung an der quadratischen Term $(\Delta\boldsymbol{U}_S)^2$ vernachlässigt und in der Konsequenz von dem Ansatz (95) lediglich die Terme

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S + \Delta\boldsymbol{E}_S) \cdot\cdot [\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S) - \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S; (\boldsymbol{U}_S)_n)] \\ &= \boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S)) \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S) \\ &\quad + \boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S)) \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{U}_S - (\boldsymbol{U}_S)_n) \end{aligned} \tag{96}$$

berücksichtigt.

Wiederum aus Gründen der numerischen Vereinfachung wird auf die Linearisierung des Permeabilitätstensors verzichtet, obwohl allein sein pull-back auf die Ausgangskonfiguration des Festkörperskeletts (79) eine Abhängigkeit von den Verschiebungsvariablen $\boldsymbol{U}_S$ anzeigt und zudem Versuche belegen, dass die Durchlassfähigkeit des porösen Festkörpers in der Regel deformationsabhängig ist. Mit einem Verweis auf [31] bemerkt Benke dazu (vgl. [2], S. 68), dass mit dieser Abweichung von einer konsequent konsistenten Linearisierung das Konvergenzverhalten der inkrementell-iterativen Lösung des Randwertproblems nicht merklich beeinträchtigt wird. Es ist zweckmäßig, den Permeabilitätstensor während eines Lastschrittes konstant zu lassen und an dessen Ende in einer Art Postprozessing an den aktuellen Deformationszustand anzupassen. Alternativ kann der Permeabilitätstensor auch während der Gleichgewichtsiterationen mit den jeweiligen Verzerrungen neu berechnet werden. Eine einfache Beziehung zur Ermittlung der deformationsabhängigen Permeabilität wird in [62] vorgeschlagen.

Werden die oben angegebenen Linearisierungen von Verzerrungs- und Spannungsvariablen in das Gleichungssystem (87a), (87b) mit den Ausdrücken (81a)-(81e) und (88) eingesetzt, folgt bei Vernachlässigung von Termen, die mindestens quadratisch in den Inkrementen der Prozessvariablen $\Delta\boldsymbol{U}_S$ sowie Δp sind bzw. deren Produkt enthalten, für die Teilfunktionale des Systems:

$$\begin{aligned} &a_0(\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) \\ &= \int_{\Omega_0} \boldsymbol{T}_S^E(\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S) \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) \, d\Omega_0 \\ &= a_0(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) + a_1(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, \boldsymbol{V}_S), \end{aligned} \tag{97a}$$

$$\begin{aligned} &b_0(\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S; p + \Delta p, \boldsymbol{V}_S) \\ &= -\int_{\Omega_0} (p + \Delta p) \, (\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S) \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S)) \, d\Omega_0 \\ &= b_0(\boldsymbol{U}_S; p, \boldsymbol{V}_S) + b_0(\boldsymbol{U}_S; \Delta p, \boldsymbol{V}_S) + b_2(\boldsymbol{U}_S; p, \Delta\boldsymbol{U}_S, \boldsymbol{V}_S), \end{aligned} \tag{97b}$$

$$
\begin{aligned}
&b_1(\boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{U}_S + \Delta\boldsymbol{U}_S, q) \\
&\quad = b_0(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, q) \; + \; b_0(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{U}_S - (\boldsymbol{U}_S)_n, q)\,, \qquad (97c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_0(p + \Delta p, q) \\
&\quad = \int_{\Omega_0} (\mathrm{Grad}_S\, q) \; \boldsymbol{K} \; (\mathrm{Grad}_S\, (p + \Delta p)) \; d\Omega_0 \\
&\quad = c_0(p, q) \; + \; c_0(\Delta p, q)\,. \qquad (97d)
\end{aligned}
$$

Hier stellen $\Delta\boldsymbol{U}_S$ und Δp die in der aktuellen Newton-Iteration des betrachteten Lastschritts zu berechnenden Feldgrößeninkremente dar, während $\boldsymbol{U}_S$ sowie p aus der Lösung der vorangegangenen Newton-Iteration und $(\boldsymbol{U}_S)_n$ aus der Lösung des vorherigen Lastschritts als bekannt vorausgesetzt werden. Für die in (97a)-(97d) neu definierten Funktionale gilt:

$$
\begin{aligned}
&a_1(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, \boldsymbol{V}_S) \\
&\quad = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{E}_S\,(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) \cdot\cdot \frac{\partial \boldsymbol{T}_S^E(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S))}{\partial \boldsymbol{E}_S} \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S\,(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S)\; d\Omega_0 \\
&\qquad + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{T}_S^E(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S)) \cdot\cdot \mathrm{Grad}_S \Delta\boldsymbol{U}_S (\mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S)^T \, d\Omega_0\,, \qquad (98a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_2(\boldsymbol{U}_S; p, \Delta\boldsymbol{U}_S, \boldsymbol{V}_S) \\
&\quad = -\int_{\Omega_0} p \left(\boldsymbol{E}_S\,(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) \cdot\cdot \frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S))}{\partial \boldsymbol{E}_S} \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S\,(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S) \right) \; d\Omega_0 \\
&\qquad - \int_{\Omega_0} p \left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S)) \cdot\cdot \mathrm{Grad}_S \Delta\boldsymbol{U}_S (\mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S)^T \right) \; d\Omega_0\,. \qquad (98b)
\end{aligned}
$$

In ihrer linearisierten, unter Berücksichtigung des Schemas (85) nach der Zeit diskretisierten Form bei Betrachtung des speziellen Falls des impliziten Euler-Ansatzes ($\alpha = 1$) besteht die gemischte Randwertaufgabe der Theorie poröser Medien für das gesättigte Zweiphasenkontinuum bei großen Verzerrungen in der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$
\boxed{
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, p, \boldsymbol{V}_S) \;+\; b(\boldsymbol{U}_S; \Delta p, \boldsymbol{V}_S) \;&=\; \bar{f}(\boldsymbol{U}_S; p, \boldsymbol{V}_S) \qquad (99a) \\
b(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, q) \;-\; \Delta t\; c(\Delta p, q) \;&=\; \bar{g}(\boldsymbol{U}_S; p, q) \qquad (99b)
\end{aligned}
}
$$

bezüglich der Feldgrößeninkremente $\Delta\boldsymbol{U}_S$ und Δp, gültig für alle $\boldsymbol{V}_S \in (H_0^1(\Omega_0))^3$ sowie alle $q \in L_2(\Omega_0)$. Dabei gilt unter Verwendung der in (81a)-(81e) sowie (98a), (98b) angegebenen Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, p, \boldsymbol{V}_S) &= a_1(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, \boldsymbol{V}_S) + b_2(\boldsymbol{U}_S; p, \Delta\boldsymbol{U}_S, \boldsymbol{V}_S), \qquad (100a) \\
b(\boldsymbol{U}_S; \Delta p, \boldsymbol{V}_S) &= b_0(\boldsymbol{U}_S; \Delta p, \boldsymbol{V}_S), \qquad (100b) \\
\bar{f}(\boldsymbol{U}_S; p, \boldsymbol{V}_S) &= f(\boldsymbol{V}_S) - a_0(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) - b_0(\boldsymbol{U}_S; p, \boldsymbol{V}_S), \qquad (100c) \\
b(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, q) &= b_0(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, q), \qquad (100d) \\
c(\Delta p, q) &= c_0(\Delta p, q), \qquad (100e) \\
\bar{g}(\boldsymbol{U}_S; p, q) &= \Delta t\, g(q) + \Delta t\, c_0(p, q) \\
&\quad - b_0(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{U}_S - (\boldsymbol{U}_S)_n, q)\,. \qquad (100f)
\end{aligned}
$$

Das System (99a), (99b) stellt eine konsistente Linearisierung der Beziehungen (80a), (80b) nach deren Zeitintegration dar und impliziert konsequent das Newton-Raphson-Verfahren zu dessen iterativer Lösung im Lastinkrement. Zur Vervollständigung der Darstellung sollen hier die wesentlichen Anteile des Systems (99a), (99b) nochmals zusammengefasst werden.

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S, p, \boldsymbol{V}_S) &= \int_{\Omega_0} \boldsymbol{E}_S\,(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) \cdot\cdot \frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S), p)}{\partial \boldsymbol{E}_S} \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S\,(\boldsymbol{U}_S; \Delta\boldsymbol{U}_S)\, d\Omega_0 \\
&\quad + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}_S(\boldsymbol{U}_S), p) \cdot\cdot \mathrm{Grad}_S \Delta\boldsymbol{U}_S (\mathrm{Grad}_S \boldsymbol{V}_S)^T \, d\Omega_0 \qquad (101a) \\
b(\boldsymbol{U}_S; \Delta p, \boldsymbol{V}_S) &= -\int_{\Omega_0} \Delta p \left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{U}_S) \cdot\cdot \boldsymbol{E}_S\,(\boldsymbol{U}_S; \boldsymbol{V}_S) \right) \; d\Omega_0 \qquad (101b)
\end{aligned}
$$