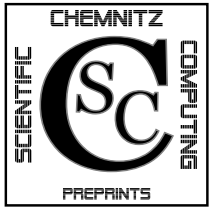
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Uwe-Jens Görke Anke Bucher Reiner Kreißig

Ein numerischer Vergleich alternativer Formulierungen des Materialmodells der anisotropen Elastoplastizität bei großen Verzerrungen

CSC/08-04



Chemnitz Scientific Computing Preprints

Chemnitz Scientific Computing Preprints – ISSN 1864-0087

Impressum:

Chemnitz Scientific Computing Preprints — ISSN 1864-0087
(1995–2005: Preprintreihe des Chemnitzer SFB393)

Herausgeber:
Professuren für
Numerische und Angewandte Mathematik
an der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Chemnitz

Postanschrift:
TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
09107 Chemnitz
Sitz:
Reichenhainer Str. 41, 09126 Chemnitz

http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/

07-06 A. Bucher, U.-J. Görke, P. Steinhorst, R. Kreißig, A. Meyer. Ein Beitrag zur adaptiven gemischten Finite-Elemente-Formulierung der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen. September 2007.

07-07 U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig Zur Numerik der inversen Aufgabe für gemischte (u/p) Formulierungen am Beispiel der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen. October 2007.

07-08 A. Meyer, P. Steinhorst. Betrachtungen zur Spektraläquivalenz für das Schurkomplement im Bramble-Pasciak-CG bei piezoelektrischen Problemen. Oktober 2007.

07-09 T. Hein, M. Meyer. Identification of material parameters in linear elasticity - some numerical results. November 2007.

07-10 T. Hein. On solving implicitly defined inverse problems by SQP-approaches. December 2007.

The complete list of CSC and SFB393 preprints is available via
`http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/`

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Chemnitz Scientific Computing Preprints

Uwe-Jens Görke Anke Bucher Reiner Kreißig

Ein numerischer Vergleich alternativer Formulierungen des Materialmodells der anisotropen Elastoplastizität bei großen Verzerrungen

CSC/08-04

Zusammenfassung

Following generally accepted axioms and assumptions the authors developed a phenomenological, thermodynamically consistent material model for large anisotropic elastoplastic deformations based on a substructure concept. The material model originally includes a stress relation in rate formulation, evolutional equations for the internal variables modeling the hardening behavior, and the yield condition. Due to the necessary time discretization solving the initial value problem (IVP) this approach is associated with an incremental stress computation. It will be shown that, within this context, the accuracy of stress values essentially deteriorates with increasing load steps. Consequently, the authors substitute the usual stress relation including the symmetric plastic strain tensor of right Cauchy-Green type instead of the stress tensor into the set of unknown constitutive variables. Stresses are explicitly computed from a hyperelastic material law depending on the elastic strain tensor. Furthermore, as an alternative to the plastic strain tensor the solution of the IVP considering an evolutional equation for the plastic part of the deformation gradient has been studied. This procedure simplifies the mathematical structure of the system to be solved as well as the computation of substructure-based variables which are suitable for the analysis of texture development. The presented numerical strategies were implemented into an in-house FE-code. Some examples illustrating their accuracy, stability as well as efficiency are discussed.

CSC/08-04 ISSN 1864-0087 **September 2008**

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

2 Konzept der Substruktur **5**

3 Thermodynamisch konsistentes Deformationsgesetz der anisotropen finiten Elastoplastizität **8**
- 3.1 Kinematik 8
- 3.2 Hyperelastisches Teildeformationsgesetz 11
- 3.3 Plastisches Teildeformationsgesetz – Alternative Formulierungen . 14

4 Numerische Simulation **22**
- 4.1 Zeitdiskretisierung des Deformationsgesetzes 22
- 4.2 Lösung des Anfangswertproblems 24
- 4.3 Konsistente Materialtangente 27
- 4.4 Berechnung des Abbildungstensors zwischen Substruktur- und plastischer Zwischenkonfiguration 29

5 Berechnungsbeispiele **31**
- 5.1 Rohr unter Innendruck 31
- 5.2 Scheibe mit Loch 35

6 Zusammenfassung und Ausblick **38**

Author's addresses:

Uwe-Jens Görke
TU Chemnitz
Fakultät f. Maschinenbau
Professur Festkörpermech.
now at: Helmholtz-Zentrum
f. Umweltforschung – UFZ
Deptmt. Umweltinformatik
Permoserstr. 15
D-04318 Leipzig

Anke Bucher
HTWK Leipzig
Fachbereich Maschinen- und Energietechnik
Professur Angewandte Mechanik
Koburger Str. 16
D-04416 Markkleeberg

Reiner Kreißig
TU Chemnitz
Fakultät f. Maschinenbau
Professur Festkörpermech.
Str. d. Nationen 62
D-09111 Chemnitz

`http://www.tu-chemnitz.de/mb/FestKoerpMech/`
`http://www.htwk-leipzig.de/fbme/`
`http://www.ufz.de`

05-09 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Vergleich der Fehlerindikatoren in Bezug auf die Netzsteuerung Teil I. June 2005.

05-10 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Vergleich der Fehlerindikatoren in Bezug auf die Netzsteuerung Teil II. July 2005.

05-11 A. Meyer, R. Unger. Subspace-cg-techniques for clinch-problems. September 2005.

05-12 P. Ciarlet, Jr, B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, J. Zou. The Fourier Singular Complement Method for the Poisson Problem. Part III: Implementation Issues. October 2005.

05-13 T. Eibner, J. M. Melenk. Multilevel preconditioning for the boundary concentrated *hp*-FEM. December 2005.

05-14 M. Jung, A. M. Matsokin, S. V. Nepomnyaschikh, Yu. A. Tkachov. Multilevel preconditioning operators on locally modified grids. December 2005.

05-15 S. Barrachina, P. Benner, E. S. Quintana-Ortí. Solving Large-Scale Generalized Algebraic Bernoulli Equations via the Matrix Sign Function. December 2005.

05-16 B. Heinrich, B. Jung. Nitsche- and Fourier-finite-element method for the Poisson equation in axisymmetric domains with re-entrant edges. December 2005.

05-17 M. Randrianarivony, G. Brunnett. C^0-paving of closed meshes with quadrilateral patches. December 2005.

05-18 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Quadrilateral removal and 2-ear theorems. December 2005.

05-19 P. Benner, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí. Solving linear-quadratic optimal control problems on parallel computers. December 2005.

06-01 T. Eibner, J. M. Melenk. p-FEM quadrature error analysis on tetrahedra. October 2006.

06-02 P. Benner, H. Faßbender. On the solution of the rational matrix equation $X = Q + LX^{-1}L^{\top}$. September 2006.

06-03 P. Benner, H. Mena, J. Saak. On the Parameter Selection Problem in the Newton-ADI Iteration for Large Scale Riccati Equations. October 2006.

06-04 J. M. Badía, P. Benner, R. Mayo, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, A. Remón. Balanced Truncation Model Reduction of Large and Sparse Generalized Linear Systems. November 2006.

07-01 U. Baur, P. Benner. Gramian-Based Model Reduction for Data-Sparse Systems. February 2007.

07-02 A. Meyer. Grundgleichungen und adaptive Finite-Elemente-Simulation bei „Großen Deformationen". Februar 2007.

07-03 P. Steinhorst. Rotationssymmetrie für piezoelektrische Probleme. Februar 2007.

07-04 S. Beuchler, T. Eibner, U. Langer. Primal and Dual Interface Concentrated Iterative Substructuring Methods. April 2007.

07-05 T. Hein, M. Meyer. Simultane Identifikation voneinander unabhängiger Materialparameter - numerische Studien. Juni 2007.

04-02 S. Grosman. The robustness of the hierarchical a posteriori error estimator for reaction-diffusion equation on anisotropic meshes. March 2004.

04-03 A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke, R. Kreißig. Entwicklung von adaptiven Algorithmen für nichtlineare FEM. April 2004.

04-04 A. Meyer, R. Unger. Projection methods for contact problems in elasticity. April 2004.

04-05 T. Eibner, J. M. Melenk. A local error analysis of the boundary concentrated FEM. May 2004.

04-06 H. Harbrecht, U. Kähler, R. Schneider. Wavelet Galerkin BEM on unstructured meshes. May 2004.

04-07 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Necessary and sufficient conditions for the regularity of a planar Coons map. May 2004.

04-08 P. Benner, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí. Solving Linear Matrix Equations via Rational Iterative Schemes. October 2004.

04-09 C. Pester. Hamiltonian eigenvalue symmetry for quadratic operator eigenvalue problems. October 2004.

04-10 T. Eibner, J. M. Melenk. An adaptive strategy for hp-FEM based on testing for analyticity. November 2004.

04-11 B. Heinrich, B. Jung. The Fourier-finite-element method with Nitsche-mortaring. November 2004.

04-12 A. Meyer, C. Pester. The Laplace and the linear elasticity problems near polyhedral corners and associated eigenvalue problems. December 2004.

04-13 M. Jung, T. D. Todorov. On the Convergence Factor in Multilevel Methods for Solving 3D Elasticity Problems. December 2004.

05-01 C. Pester. A residual a posteriori error estimator for the eigenvalue problem for the Laplace-Beltrami operator. January 2005.

05-02 J. Badía, P. Benner, R. Mayo, E. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, J. Saak. Parallel Order Reduction via Balanced Truncation for Optimal Cooling of Steel Profiles. February 2005.

05-03 C. Pester. CoCoS – Computation of Corner Singularities. April 2005.

05-04 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Einige Elemente, Fehlerschätzer und Ergebnisse. April 2005.

05-05 P. Benner, J. Saak. Linear-Quadratic Regulator Design for Optimal Cooling of Steel Profiles. April 2005.

05-06 A. Meyer. A New Efficient Preconditioner for Crack Growth Problems. April 2005.

05-07 A. Meyer, P. Steinhorst. Überlegungen zur Parameterwahl im Bramble-Pasciak-CG für gemischte FEM. April 2005.

05-08 T. Eibner, J. M. Melenk. Fast algorithms for setting up the stiffness matrix in hp-FEM: a comparison. June 2005.

1 Einführung

Die algorithmische Umsetzung geeigneter Materialmodelle in Berechnungswerkzeuge, die beispielsweise auf der Finite Elemente Methode basieren, ist grundlegende Voraussetzung für die erfolgreiche numerische Simulation des mechanischen Verhaltens von Bauteilen und Konstruktionen. Zur Beschreibung kleiner elastisch-plastischer Verzerrungen haben sich verschiedene Ansätze in der Praxis bewährt. Für eine Vielzahl technischer Fragestellungen, wie etwa Umformprozessen, ist es erforderlich, Materialmodelle zu entwickeln, die große Verzerrungen berücksichtigen. Speziell trifft dies im Fall des Auftretens plastischer Anisotropien zu.

In den vergangenen Dekaden wurden unterschiedliche Modelle zur Erfassung der plastischen Ansiotropie entwickelt. Hill [39] schlug eine quadratische Fließbedingung für den Spezialfall der Anfangsorthotropie vor. Wegen seiner Einfachheit wird das Hill-Kriterium bis heute in seiner Originalformulierung genutzt. Darüber hinaus diente es als theoretisches Fundament einer ganzen Klasse nichtquadratischer anisotroper Fließbedingungen höherer Ordnung, wie sie z. B. von Hill selbst [41, 43], Hosford [44], Barlat und Lian [5] sowie Barlet et al. [6] unter der Annahme isotroper Verfestigung entwickelt wurden. Im Gegensatz dazu berücksichtigen Wu et al. [91] eine Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung.

Zur Modellierung der plastischen Anisotropie in einem allgemeineren, phänomenologischen Sinn diskutierten Besdo [8], Haupt and Tsakmakis [34], Aravas [2], Ning and Aifantis [69], Sansour [74], François [27] und andere Autoren Weiterentwicklungen des Hillschen Ansatzes. In diesem Zusammenhang nahmen sie an, dass die Fließbedingung nicht nur vom Spannungstensor, sondern zusätzlich von geeigneten inneren Variablen abhängt, die verschiedene Formen des Verfestigungsverhaltens beschreiben.

Umfangreiche experimentelle Untersuchungen bestätigten die Auffassung, dass die Verteilung der Kristallorientierungen Hauptursache für das Auftreten von Anisotropien in kristallinen Einphasenmaterialien ist. Das förderte insbesondere in den letzten zwanzig Jahren die Entwicklung von anisotropen elastisch-plastischen Materialmodellen auf der Grundlage mikromechanischer Ansätze der Kristallplastizität. Entsprechende Modelle wurden beispielsweise von Asaro [3], Dafalias and Aifantis [25], Beaudoin et al. [7], Havner [38], Steck [80], Ning and Aifantis [70] und Miehe et al. [67] präsentiert. Sie stellen plausible Konzepte zur Vorhersage der Entwicklung von Anisotropien in Metallen dar. Besonders erwähnenswert ist die Interpretation der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten im Kontext der Kristallplastizität durch Asaro [3] zur Definition der Ausrichtung der plastischen Zwischenkonfiguration.

Unter Berücksichtigung der deformationsinduzierten Anisotropie (Textur) gibt Kersten [48] eine umfassende Darstellung von richtungsabhängigem Materialverhalten bei Metallen, welche eine kristalline Mikrostruktur aufweisen. Neben phänomenologischen Modellen ohne Bezug auf die reale Materialstruktur stellt er zwei prinzipielle Herangehensweisen zur Beschreibung der Anisotropie vor:

- Die phänomenologische Betrachtung auf der Basis von Strukturtensoren (vgl. [37,72,83,93,94]). Dieser Ansatz erfordert wegen der notwendigen Ausrichtung der Strukturtensoren das Vorhandensein einer Anfangsanisotropie. Zudem können nur für orthotrope und transversal isotrope Materialien relativ einfache zweistufige Strukturtensoren angegeben werden. Die Erfassung einer komplexeren Anisotropie ist nur mit höherstufigen Tensoren möglich.
- Mikrostrukturelle Ansätze der Kristallplastizität. In diesem Zusammenhang werden die Kristallorientierung und die Entwicklung von Texturen an die Richtungsvektoren zur Charakterisierung der Gleitsysteme gebunden. Für diese Gleitsysteme werden innere Variablen definiert und deren Entwicklung durch thermodynamisch konsistente Ansätze beschrieben. Im Rahmen der Kristallplastizität ist die Möglichkeit der Entwicklung einer deformationsinduzierten Anisotropie aus einem isotropen Anfangszustand gegeben.

Ausgehend von der Betrachtung der Gleitvorgänge am Einkristall werden dessen Orientierung durch die Lage des Kristallachsensystems gegenüber einem globalen Bezugssystem und die Texturbildung als Orientierungsänderung der Kristallrichtungen modelliert. Mit der so genannten Homogenisierung werden die numerische Textursimulation im Polykristall und damit ein Informationstransfer zwischen den einzelnen Skalen der Materialbeschreibung ermöglicht (vgl. [1,42,48,52,82]).

In der Einkristallplastizität stellt die isokline Zwischenkonfiguration gleichzeitig die plastische Zwischenkonfiguration dar. Sie ist dadurch charakterisiert, dass sich die Orientierung der Gleitsystemvektoren während der Abbildung von der Ausgangs- in die Zwischenkonfiguration nicht ändert. Der plastische Verzerrungsanteil enthält somit keine Drehungen. Nach einem Ansatz von Kersten [48] für polykristalline Werkstoffe unterscheiden sich die isokline und die plastische Zwischenkonfiguration jedoch durch eine reine Drehung voneinander. Er gibt eine Entwicklungsgleichung für diesen Drehtensor an und knüpft somit die Orientierung lokaler Richtungen des Materials (mithin der Anisotropieachsen, verbunden mit der Kristallorientierung) an eine spezielle, zweistufige tensorielle Variable.

Obwohl die Mikromechanik von Ein- und Polykristallmodellen wegen ihres physikalischen Hintergrundes vorteilhaft ist für das Verständnis des anisotropen Verhaltens von Metallen, basieren in der Regel bis heute numerische Simulationsverfahren zur Berechnung des (thermo)mechanischen Verhaltens von Bauteilen und Konstruktionen auf phänomenologischen Modellen. Gründe dafür sind die Komplexität sowie Heterogenität der Mikrostruktur sowie der Deformationsmechanis-

03-01 E. Creusé, G. Kunert, S. Nicaise. A posteriory error estimation for the Stokes problem: Anisotropic and isotropic discretizations. January 2003.

03-02 S. I. Solov'ëv. Existence of the guided modes of an optical fiber. January 2003.

03-03 S. Beuchler. Wavelet preconditioners for the p-version of the FEM. February 2003.

03-04 S. Beuchler. Fast solvers for degenerated problems. February 2003.

03-05 A. Meyer. Stable calculation of the Jacobians for curved triangles. February 2003.

03-06 S. I. Solov'ëv. Eigenvibrations of a plate with elastically attached load. February 2003.

03-07 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet based fast solution of boundary integral equations. February 2003.

03-08 S. I. Solov'ëv. Preconditioned iterative methods for monotone nonlinear eigenvalue problems. March 2003.

03-09 Th. Apel, N. Düvelmeyer. Transformation of hexahedral finite element meshes into tetrahedral meshes according to quality criteria. May 2003.

03-10 H. Harbrecht, R. Schneider. Biorthogonal wavelet bases for the boundary element method. April 2003.

03-11 T. Zhanlav. Some choices of moments of refinable function and applications. June 2003.

03-12 S. Beuchler. A Dirichlet-Dirichlet DD-pre-conditioner for p-FEM. June 2003.

03-13 Th. Apel, C. Pester. Clément-type interpolation on spherical domains - interpolation error estimates and application to a posteriori error estimation. July 2003.

03-14 S. Beuchler. Multi-level solver for degenerated problems with applications to p-version of the fem. *(Dissertation)* July 2003.

03-15 Th. Apel, S. Nicaise. The inf-sup condition for the Bernardi-Fortin-Raugel element on anisotropic meshes. September 2003.

03-16 G. Kunert, Z. Mghazli, S. Nicaise. A posteriori error estimation for a finite volume discretization on anisotropic meshes. September 2003.

03-17 B. Heinrich, K. Pönitz. Nitsche type mortaring for singularly perturbed reaction-diffusion problems. October 2003.

03-18 S. I. Solov'ëv. Vibrations of plates with masses. November 2003.

03-19 S. I. Solov'ëv. Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems. November 2003.

03-20 M. Randrianarivony, G. Brunnett, R. Schneider. Tessellation and parametrization of trimmed surfaces. December 2003.

04-01 A. Meyer, F. Rabold, M. Scherzer. Efficient Finite Element Simulation of Crack Propagation. February 2004.

02-03 H. Harbrecht, M. Konik, R. Schneider. Fully Discrete Wavelet Galerkin Schemes. January 2002.

02-04 G. Kunert. A posteriori error estimation for convection dominated problems on anisotropic meshes. March 2002.

02-05 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet Galerkin Schemes for 3D-BEM. February 2002.

02-06 W. Dahmen, H. Harbrecht, R. Schneider. Compression Techniques for Boundary Integral Equations - Optimal Complexity Estimates. April 2002.

02-07 S. Grosman. Robust local problem error estimation for a singularly perturbed reaction-diffusion problem on anisotropic finite element meshes. May 2002.

02-08 M. Springmann, M. Kuna. Identifikation schädigungsmechanischer Materialparameter mit Hilfe nichtlinearer Optimierungsverfahren am Beispiel des Rousselier Modells. Mai 2002.

02-09 S. Beuchler, R. Schneider, C. Schwab. Multiresolution weighted norm equivalences and applications. July 2002.

02-10 Ph. Cain, R. A. Römer, M. E. Raikh. Renormalization group approach to energy level statistics at the integer quantum Hall transition. July 2002.

02-11 A. Eilmes, R. A. Römer, M. Schreiber. Localization properties of two interacting particles in a quasiperiodic potential with a metal-insulator transition. July 2002.

02-12 M. L. Ndawana, R. A. Römer, M. Schreiber. Scaling of the Level Compressibility at the Anderson Metal-Insulator Transition. September 2002.

02-13 Ph. Cain, R. A. Römer, M. E. Raikh. Real-space renormalization group approach to the quantum Hall transition. September 2002.

02-14 A. Jellal, E. H. Saidi, H. B. Geyer, R. A. Römer. A Matrix Model for $\nu_{k_1 k_2} = \frac{k_1+k_2}{k_1 k_2}$ Fractional Quantum Hall States. September 2002.

02-15 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Parallel implementation of curve reconstruction from noisy samples. August 2002.

02-16 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Parallel implementation of surface reconstruction from noisy samples. September 2002.

02-17 M. Morgenstern, J. Klijn, Chr. Meyer, R. A. Römer, R. Wiesendanger. Comparing measured and calculated local density of states in a disordered two-dimensional electron system. September 2002.

02-18 J. Hippold, G. Rünger. Task Pool Teams for Implementing Irregular Algorithms on Clusters of SMPs. October 2002.

02-19 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelets for the fast solution of boundary integral equations. October 2002.

02-20 H. Harbrecht, R. Schneider. Adaptive Wavelet Galerkin BEM. October 2002.

02-21 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet Galerkin Schemes for Boundary Integral Equations - Implementation and Quadrature. October 2002.

men realer Materialien, Probleme bei der Identifikation genügend genauer Materialparameter im Mikrobereich und vor allem auch der enorme Rechenaufwand für die Modellierung praxisrelevanter Vorgänge (z. B. in der Umformtechnik), der gegenwärtig eine Verwendung von Konzepten auf der Mikro- oder Mesoebene nicht realisierbar erscheinen lässt.

Im Bemühen um eine Verknüpfung der physikalisch motivierten Modelle der Kristallplastizität mit der vergleichsweise einfachen mathematischen Struktur und numerischen Realisierbarkeit phänomenologischer Ansätze auf der Makroskala arbeitet eine zunehmende Anzahl von Autoren an der Entwicklung von phänomenologischen Theorien auf der Makroskala unter Einbeziehung von Informationen aus dem Mikrobereich. Derartige Modelle basieren auf der Drehung von Anisotropieachsen zur Beschreibung der mikrostrukturellen Texturentwicklung im Material durch die Entwicklung kinematischer Rotationsterme bezüglich des Kontinuums (vgl. [18, 49, 91]). Als problematisch erweist sich dabei die Formulierung zweckmässiger Beziehungen zur Beschreibung der Entwicklung der Anisotropieachsen. Hill [40] nahm an, dass im Fall großer Verzerrungen die Materialtextur durch die Kinematik des Kontinuums bestimmt wird. Basierend auf dieser Hypothese beschreiben Lee et al. [56], Tugcu und Neale [84] sowie Yoon et al. [92] die Drehung von Ansisotropieachsen unter Verwendung des inkrementellen Drehtensors der Polarzerlegung des Deformationsgradienten. In diesem Zusammenhang werden die Anisotropieachsen gedanklich mit Richtungsvektoren verknüpft, die die Richtungen materieller Fasern des Materials charakterisieren. Han et al. [31] verknüpfen die Entwicklung von Anisotropieachsen mit der speziellen Formulierung $\widetilde{\boldsymbol{W}}^p = \dot{\boldsymbol{R}}^p \boldsymbol{R}^{p\mathrm{T}}$ für den materiellen Spin, der aus der Polarzerlegung des plastischen Teildeformationsgradienten ermittelt wird.

Eine Entkopplung der Texturentwicklung von der Kinematik des Kontinuums und deren Beschreibung durch die Rotation separater, dem Kontinuum gedanklich unterliegender *Strukturen* bietet das so genannte *Substrukturkonzept*, das auf Arbeiten von Mandel [59, 60] und Dafalias [20, 22] basiert (siehe auch [53, 71] und zu neueren Untersuchungen z. B. [37, 51, 73, 83]). In diesem Zusammenhang werden die mikrostrukturellen Charakteristika des Materials (gebunden an die Substruktur) durch die Definition spezieller interner Variablen auf der Makroebene zur Beschreibung der Substrukturentwicklung berücksichtigt. Es wird angenommen, dass das Kontinuum und die unterliegende Substruktur unterschiedliche Orientierungen besitzen. Im Unterschied zu Hill und anderen Autoren (s. o.) wird die Hypothese aufgestellt, dass die Texturentwicklung nicht durch die allgemeine Deformationskinematik des Kontinuums erfasst werden kann, sondern durch eigene Entwicklungsgesetze beschrieben werden muss. Zusätzlich kritisierte Dafials [23] die Definition des plastischen Spins als antimetrischen Anteil des plastischen Geschwindigkeitsgradienten und führte die Bezeichnung *konstitutiver Spin* ein, der mit der Drehung der Substruktur verbunden ist (vgl. auch [90]).

Das Substrukturmodell kommt der Vorstellung einer Beschreibung von Vorgängen auf der Mikro- oder Mesoskala (an die Substruktur gebunden) mit phänomenologischen Ansätzen auf der Makroskala gegenwärtig am nächsten. Eine Analogie zu diesem Ansatz stellt das Konzept der *fiktiven* Konfigurationen dar (vgl. [47]). In diesem Zusammenhang wird die makroskopische Texturentwicklung in Form von Orientierungen und Steifigkeiten unterliegender (realer) Substrukturen mit Hilfe von Evolutionsgleichungen für eine zweistufige Metrik beschrieben, die auf speziellen Zwischenkonfigurationen (fiktiven Konfigurationen) definiert ist.

In der vorliegenden Arbeit werden Aspekte der Formulierung und Lösung des numerischen Anfangswertproblems im Rahmen einer Weiterentwicklung des phänomenologischen Substrukturkonzepts diskutiert, wie es bei Bucher et al. [9,10,11] dargestellt ist. Dabei werden sowohl große plastische als auch große elastische Verzerrungen berücksichtigt. Die Ausführungen sind wie folgt gegliedert: Im Abschnitt 2 werden die Grundlagen des Konzepts der Substruktur für die Erfassung einer allgemeinen plastischen Anisotropie präsentiert. Der Abschnitt 3 beginnt mit der Erläuterung der Kinematik des inelastischen Strukturmechanikproblems. Weiterhin wird die thermodynamisch konsistente Ableitung der einzelnen Anteile des Deformationsgesetze der Elastoplastizität in teilweise alternativen Formulierungen diskutiert. Spezielles Augenmerk wird im Abschnitt 4 auf die numerische Lösung des Anfangswertproblems einschließlich der Ermittlung der konsistenten Materialtangente sowie der Berechnung von Strukturtensoren zur Beschreibung der Texturentwicklung gelegt. Abschließend werden im Abschnitt 5 die Effizienz und das Konvergenzverhalten der vorgestellten Formulierungen und Algorithmen an zwei Beispielen verdeutlicht.

Bezüglich der verwendeten Notation werden Vektoren und Tensoren in symbolischer Schreibweise durch Fettdruck gekennzeichnet. Die mehrfache Überschiebung von Tensoren wird durch eine entsprechende Anzahl von Punkten zwischen den Variablen markiert. Dahingegen wird bei der einfachen Überschiebung auf den Punkt verzichtet. Mehrfache Überschiebungen sind durch die Bildung von Skalarprodukten der entsprechenden Basisvektoren von innen beginnend nach außen charakterisiert (alternativ existiert in der Literatur die Konvention, die Skalarprodukte fortlaufend mit den ersten Basisvektoren beginnend zu bilden). Für zwei zweistufige Tensoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt somit $\boldsymbol{a} \cdot\cdot \boldsymbol{b} = a_{ij} b^{ji}$. Das tensorielle Produkt wird mit dem Symbol $\otimes$ gekennzeichnet. Der über einem Symbol angeordnete Punkt weist auf die materielle Zeitableitung hin. Die Inversion bzw. Transposition von Tensoren ist in der üblichen Weise mit den oben rechts neben dem Variablensymbol angeordneten Indizes $()^{-1}$ bzw. $()^{\mathrm{T}}$ markiert.

Auf die Ausgangskonfiguration bezogene Variable werden mit Großbuchstaben dargestellt, auf die Momentankonfiguration bezogene mit Kleinbuchstaben. Die analoge Notation gilt für die Indizes von Vektor- und Tensorkoordinaten. Der Bezug auf die plastische Zwischenkonfiguration und die Substrukturkonfiguration

01-20 G. Kunert, S. Nicaise. Zienkiewicz-Zhu error estimators on anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes. July 2001.

01-21 G. Kunert. A posteriori H^1 error estimation for a singularly perturbed reaction diffusion problem on anisotropic meshes. August 2001.

01-22 A. Eilmes, Rudolf A. Römer, M. Schreiber. Localization properties of two interacting particles in a quasi-periodic potential with a metal-insulator transition. September 2001.

01-23 M. Randrianarivony. Strengthened Cauchy inequality in anisotropic meshes and application to an a-posteriori error estimator for the Stokes problem. September 2001.

01-24 Th. Apel, H. M. Randrianarivony. Stability of discretizations of the Stokes problem on anisotropic meshes. September 2001.

01-25 Th. Apel, V. Mehrmann, D. Watkins. Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures. October 2001.

01-26 P. Cain, F. Milde, R. A. Römer, M. Schreiber. Use of cluster computing for the Anderson model of localization. October 2001. Conf. on Comp. Physics, Aachen (2001).

01-27 P. Cain, F. Milde, R. A. Römer, M. Schreiber. Applications of cluster computing for the Anderson model of localization. October 2001. Transworld Research Network for a review compilation entitled "Recent Research Developments in Physics", (2001).

01-28 X. W. Guan, A. Foerster, U. Grimm, R. A. Römer, M. Schreiber. A supersymmetric Uq[(osp)(2—2)]-extended Hubbard model with boundary fields. October 2001.

01-29 K. Eppler, H. Harbrecht. Numerical studies of shape optimization problems in elasticity using wavelet-based BEM. November 2001.

01-30 A. Meyer. The adaptive finite element method - Can we solve arbitrarily accurate? November 2001.

01-31 H. Harbrecht, S. Pereverzev, R. Schneider. An adaptive regularization by projection for noisy pseudodifferential equations of negative order. November 2001.

01-32 G. N. Gatica, H. Harbrecht, R. Schneider. Least squares methods for the coupling of FEM and BEM. November 2001.

01-33 Th. Apel, A.-M. Sändig, S. I. Solov'ev. Computation of 3D vertex singularities for linear elasticity: Error estimates for a finite element method on graded meshes. December 2001.

02-01 M. Pester. Bibliotheken zur Entwicklung paralleler Algorithmen - Basisroutinen für Kommunikation und Grafik. Januar 2002.

02-02 M. Pester. Visualization Tools for 2D and 3D Finite Element Programs - User's Manual. January 2002.

Some titles in this CSC and the former SFB393 preprint series:

01-01 G. Kunert. Robust local problem error estimation for a singularly perturbed problem on anisotropic finite element meshes. January 2001.

01-02 G. Kunert. A note on the energy norm for a singularly perturbed model problem. January 2001.

01-03 U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig. Ein Beitrag zur Materialparameteridentifikation bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen durch Analyse inhomogener Verschiebungsfelder mit Hilfe der FEM. Februar 2001.

01-04 R. A. Römer. Percolation, Renormalization and the Quantum-Hall Transition. February 2001.

01-05 A. Eilmes, R. A. Römer, C. Schuster, M. Schreiber. Two and more interacting particles at a metal-insulator transition. February 2001.

01-06 D. Michael. Kontinuumstheoretische Grundlagen und algorithmische Behandlung von ausgewählten Problemen der assoziierten Fließtheorie. März 2001.

01-07 S. Beuchler. A preconditioner for solving the inner problem of the p-version of the FEM, Part II - algebraic multi-grid proof. March 2001.

01-08 S. Beuchler, A. Meyer. SPC-PM3AdH v 1.0 - Programmer's Manual. March 2001.

01-09 D. Michael, M. Springmann. Zur numerischen Simulation des Versagens duktiler metallischer Werkstoffe (Algorithmische Behandlung und Vergleichsrechnungen). März 2001.

01-10 B. Heinrich, S. Nicaise. Nitsche mortar finite element method for transmission problems with singularities. March 2001.

01-11 T. Apel, S. Grosman, P. K. Jimack, A. Meyer. A New Methodology for Anisotropic Mesh Refinement Based Upon Error Gradients. March 2001.

01-12 F. Seifert, W. Rehm. (Eds.) Selected Aspects of Cluster Computing. March 2001.

01-13 A. Meyer, T. Steidten. Improvements and Experiments on the Bramble–Pasciak Type CG for mixed Problems in Elasticity. April 2001.

01-14 K. Ragab, W. Rehm. CHEMPI: Efficient MPI for VIA/SCI. April 2001.

01-15 D. Balkanski, F. Seifert, W. Rehm. Proposing a System Software for an SCI-based VIA Hardware. April 2001.

01-16 S. Beuchler. The MTS-BPX-preconditioner for the p-version of the FEM. May 2001.

01-17 S. Beuchler. Preconditioning for the p-version of the FEM by bilinear elements. May 2001.

01-18 A. Meyer. Programmer's Manual for Adaptive Finite Element Code SPC-PM 2Ad. May 2001.

01-19 P. Cain, M.L. Ndawana, R.A. Römer, M. Schreiber. The critical exponent of the localization length at the Anderson transition in 3D disordered systems is larger than 1. June 2001

wird durch die entsprechenden Akzente ($\widetilde{\ }$) bzw. ($\widehat{\ }$) jeweils über Großbuchstaben charakterisiert. Oben rechts neben einem Symbol angeordnete Indizes $()^e$, $()^p$ bezeichnen in dieser Reihenfolge elastische bzw. plastische Variable.

2 Konzept der Substruktur

Das hier dargestellte Materialmodell der anisotropen Elastoplastizität beruht speziell auf dem Substrukturkonzept von Mandel und Dafalias. Mandel versuchte, die Entwicklung der plastischen Ansiotropie durch die Definition von Vektortriaden zu beschreiben, die mit der realen Mikrostruktur des Materials (bzw. deren Orientierung) verbunden sein sollten. Die Vektortriaden bezeichnen eine ausgezeichnete Zwischenkonfiguration, deren Orientierung sich von derjenigen der materiallen Linienelemente unterscheidet. Bei Einkristallen definierte Mandel die Richtung der Vektortriaden entsprechend den Kanten des Kristallgitters, für Polykristalle führte er eine (hypothetische) gewichtete Mittelung bezüglich aller Einkristalle ein, die das Polykristall bilden. Hierin liegt ein Schwachpunkt des Ansatzes, da eine solche Mittelung in der Praxis nur mit erheblichem Aufwand zu realisieren ist. Dennoch wird diese Idee des *Mandelschen Spins* als gemittelte Orientierung des Kristallgitters in der neueren Literatur wieder aufgeriffen. Peeters et al. [73] und Van Houtte [86] schlagen beispielsweise vor, den Mandelschen Spin aus kristallographischen Texturbildern zu ermitteln, die die Entwicklung der plastischen Anisotropie charakterisieren.

Im Gegensatz zu Mandel hat Dafalias nicht versucht, die Orientierung der Substruktur in einem mikrophysikalischen Sinn aus der realen Struktur des Kristallgitters abzuleiten. Er führte vielmehr erstmals eine Unterscheidung zwischen der Kinematik des Kontinuums und der Kinematik der (dem Kontinuum unterliegenden) Substruktur ein und definierte zu diesem Zweck den speziellen Deformationsgradienten $\boldsymbol{F}_S = \boldsymbol{F}^e\boldsymbol{\beta}$ für die Beschreibung der Substrukturkinematik. Während mit $\boldsymbol{F}^e$ der elastische Anteil aus der üblichen Zerlegung des Deformationsgradienten $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e\boldsymbol{F}^p$ für die Kontinuumskinematik bezeichnet ist ($\boldsymbol{F}^p$ definiert entsprechend den plastischen Teildeformationsgradienten), stellt $\boldsymbol{\beta}$ einen orthogonalen Tensor dar. In diesem Zusammenhang ist auch bei Dafalias die Substruktur durch ausgezeichnete Richtungen charakterisiert und kann als makroskopische Betrachtung mikrophysikalischer Strukturen interpretiert werden. Im Gegensatz zu Mandel beschreibt Dafalias jedoch diese ausgezeichneten Richtungen mit tensorwertigen inneren Variablen. Diese kennzeichnen anisotrope Struktureigenschaften in einem phänomenologischen Sinn und müssen auf der Basis geeigneter Evolutionsgleichungen berechnet werden. Wie auch Mandel definiert Dafalias unter Nutzung des konstitutiven Spins $\boldsymbol{\omega}_D = \dot{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\beta}^{-1}$ spezielle objektive Zeitableitungen, die mit der Substrukturentwicklung verknüpft sind.

Der Kerngedanke von Dafalias besteht im (heuristischen) Ansatz einer Evolutionsgleichung für den plastischen Spin $\boldsymbol{w}_D^p$, der die Differenz zwischen dem Spin des Kontinuums $\boldsymbol{w}$ und dem Substrukturspin darstellt:

$$\boldsymbol{w}_D^p = \boldsymbol{w} - \bar{\boldsymbol{\omega}}_D \tag{1}$$

und nach Auffassung von Dafalias mit der Texturentwicklung zu verknüpfen ist. Bei Dafalias [21, 24] und Kuroda [54] werden entsprechende Evolutionsgleichungen ohne thermodynamische Begründung für den Fall der elastischen Isotropie angegeben. Formulierungen bei Annahme elastischer Anisotropie finden sich bei Häusler [36] und Cleja-Ţigoiu [17].

Basierend auf den Ideen von Mandel und Dafalias hat Bucher [9] einen verallgemeinerten Substrukturansatz entwickelt, der sowohl große elastische als auch große plastische Verzerrungen berücksichtigt. Dieses konstitutive Modell, dessen grundlegender Vorteil in seiner thermodynamischen Konsistenz liegt, stellt die Basis für den in dieser Arbeit diskutierten Ansatz der finiten Thermoelastoplastizität dar. Im Folgenden sollen lediglich einige Grundgedanken des verwendeten Substrukturkonzepts dargelegt werden. Für Details wird u. a. auf die Arbeiten [9, 10, 11, 29] verwiesen.

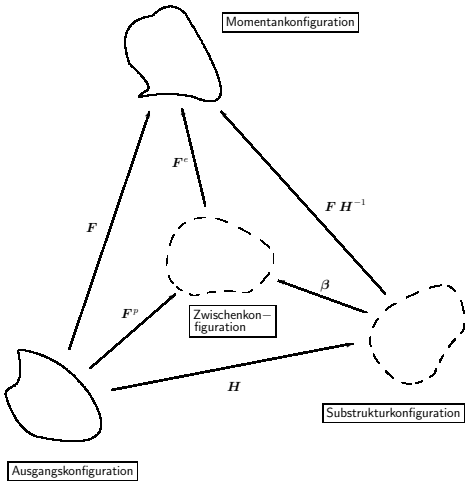


Abbildung 1: Kinematik des mechanischen Teilproblems im Rahmen des Substrukturkonzepts, Konfigurationen und Abbildungsoperatoren.

Die Hauptidee des hier vorgestellten Konzepts ist in der Definition einer so genannten *Substrukturkonfiguration* zu sehen, die zusätzlich zu den üblichen Konfigurationen zur Beschreibung der Kinematik des Kontinuums eingeführt wird

[91] H.-C. Wu, H.K. Hong and Y.P. Shiao. Anisotropic plasticity with application to sheet metals. *Int. J. Mech. Sci.*, 41:703-724, 1999.

[92] J.W. Yoon, D.Y. Yang, K. Chung and F. Barlat. A general elasto-plastic finite element formulation based on incremental deformation theory for planar anisotropy and its application to sheet forming. *Int. J. Plast.*, 15:35-67, 1999.

[93] J.M. Zhang and J. Rychlewski. Structural tensors for anisotropic solids. *Arch. Mech.*, 42:267-277, 1990.

[94] Q.-S. Zheng and A.J.M Spencer. Tensors which characterize anisotropies. *Int. J. Eng. Sci.*, 31:679-693, 1993.

[95] H. Ziegler and D. Mac Vean. On the notion of an elastic solid. In: *Recent Progress in Appl. Mech. The Folke Odquist Volume*, B. Broberg, J. Hult and F. Niordson (Eds.), Almquist & Wiksell, Stockholm, 561-572, 1965.

[77] F. Sidoroff. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic-plastic finite strain. *Arch. of Mech.*, 25:299-308, 1973.

[78] J.C. Simo. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 66:199-219, 1988.

[79] J.C. Simo and M. Ortiz. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 49:221-245, 1985.

[80] E. Steck. Zur Berücksichtigung von Vorgängen im Mikrobereich metallischer Werkstoffe bei der Entwicklung von Stoffmodellen. *ZAMM*, 75:331-341, 1995.

[81] P. Steinmann. Views on multiplicative elasto-plasticity and the continuum theory of dislocations. *Int. J. Engng. Sci.*, 34(15):1717-1735, 1996.

[82] H. Takahashi, H. Motohashi, M. Tokuda and T. Abe. Elastic-plastic finite element polycrystal model. *Int. J. Plast.*, 10:63-80, 1996.

[83] Ch. Tsakmakis. Description of plastic anisotropy effects at large deformations. Part I: Restrictions imposed by the second law and the postulate of Ilyushin. *Int. J. Plast.*, 20:167-198, 2004.

[84] P. Tugcu and K.W. Neale. On the implementation of anisotropic yield functions into finite strain problems of sheet metal forming. *Int. J. Plast.*, 15:1021-1040, 1999.

[85] V. Ulbricht and H. Röhle. *Berechnung von Rotationsschalen bei nichtlinearem Deformationsverhalten.* PhD thesis, TU Dresden, 1975.

[86] P. Van Houtte. Fast calculation of average Taylor factors and Mandel spins for all possible strain modes. *Int. J. Plast.*, 17:807-818, 2001.

[87] M. Wallin and M. Ristinmaa. Deformation gradient based kinematic hardening model. *Int. J. Plast.*, 21:2015-2050, 2005.

[88] M. Wallin, M. Ristinmaa and N.S. Ottosen. Kinematic hardening in large strain plasticity. *Eur. J. Mech.*, 22:341-356, 2003.

[89] J. Wang, V. Levkovitch, F. Reusch and B. Svendsen. On the modeling and simulation of induced anisotropy in polycrystalline metals with application to springback. *Arch. Appl. Mech.*, 74:890-899, 2005.

[90] H.-C. Wu. On finite plastic deformation of anisotropic metallic materials. *Int. J. Plast.*, 19:91-119, 2003.

(siehe Abbildung 1). Ein Abbildungstensor $\boldsymbol{H}$ realisiert die Transformation tensorieller Variablen zwischen der Ausgangs- und der Substrukturkonfiguration. Entsprechend dient der Tensor $\boldsymbol{F}\boldsymbol{H}^{-1}$ zur Abbildung von Variablen zwischen der Substruktur- und der Momentankonfiguration. Damit kann die Substrukturkonfiguration als inkompatible Zwischenkonfiguration aufgefasst werden, die durch eine spezielle, konstitutiv motivierte multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten charakterisiert wird. Sie unterscheidet sich von der üblichen, die Kinematik des Kontinuums beschreibende plastischen Zwischenkonfiguration lediglich durch eine Drehung, die mittels des eigentlich orthogonalen Tensors $\boldsymbol{\beta}$ erfasst wird. Werden die Basisvektoren eines krummlinigen Koordinatensystems bezüglich der Substrukturkonfiguration als Vektortriaden im Mandelschen Sinne verstanden, können sie als mit der Materialtextur verbunden angesehen werden.

Im Gegensatz zu Mandel und Dafalias werden im vorgestellten Substrukturkonzept die konstitutiven Beziehungen konsequent auf der Ausgangskonfiguration formuliert. Dabei ergibt sich der räumliche plastische Spin

$$\boldsymbol{w}_D^p = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{F}^e\overset{\square}{\boldsymbol{F}}{}^p\boldsymbol{F}^{p-1}\boldsymbol{F}^{e-1} - \boldsymbol{F}^{e-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}}\overset{\square}{\boldsymbol{F}}{}^{p\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{e\mathrm{T}}\right\} \tag{2}$$

$$\text{mit} \quad \overset{\square}{\boldsymbol{F}}{}^p = \dot{\boldsymbol{F}}^p - \boldsymbol{\omega}_D\boldsymbol{F}^p \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega}_D = \dot{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\beta}^{-1}. \tag{3}$$

nach seinem pull-back auf die Ausgangskonfiguration als materielle, kovariante Größe zu

$$\boldsymbol{W}_D^p = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}^{p-1}\overset{\square}{\boldsymbol{F}}{}^p - \overset{\square}{\boldsymbol{F}}{}^{p\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\right\}. \tag{4}$$

Da der Abbildungstensor $\boldsymbol{H}$ durch die Beziehung

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^p \tag{5}$$

definiert ist (vgl. Abbildung 1), folgt daraus für den verbleibenden Anteil der durch die Substruktur bedingten multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{F}^e\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{F}_S. \tag{6}$$

Unter Berücksichtigung der Definitionen (3) und (5) kann die Gleichung (4) umformuliert werden.

$$\boldsymbol{W}_D^p = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}} - \dot{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\right\} \tag{7}$$

Wie bei Bucher [9] gezeigt wird, basiert die Ermittlung der Koordinaten des Abbildungstensors $\boldsymbol{H}$ auf einer speziellen konstitutiven Annahme bezüglich der Entwicklungsgleichung für den plastischen Spin (7).

Im Rahmen des vorgestellten phänomenologischen Materialmodells wird davon ausgegangen, dass die Entwicklung von Spannungen und Verzerrungen auf das

Kontinuum bezogen ist, die Entwicklung von inneren Variablen zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens hingegen auf die dem Kontinuum unterliegende Substruktur. Damit wird es möglich, neben isotroper Verfestigung auch kinematische und formative Verfestigungsanteile zur Beschreibung der plastischen Anisotropie zu erfassen. Die Ableitung der konstitutiven Beziehungen erfolgt in thermodynamisch konsistenter Weise durch geeignete Ansätze bei Erfüllung der Clausius-Duhem-Ungleichung als Verknüpfung von erstem und zweitem Hauptsatz der Thermodynamik.

3 Thermodynamisch konsistentes Deformationsgesetz der anisotropen finiten Elastoplastizität

3.1 Kinematik

In der Referenzkonfiguration (Ausgangskonfiguration) zum Zeitpunkt $t = t_0$ stellt der betrachtete Körper eine Menge $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ materieller Punkte mit dem Rand Γ_0 dar (ein Gebiet im dreidimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$). Der Rand wird in Bereiche Γ_{0D} mit Dirichlet-Randbedingungen und Γ_{0N} mit Neumann-Randbedingungen bezüglich der unabhängigen Systemvariablen (hier: Verschiebungen) unterteilt. Dabei gilt: $\Gamma_0 = \Gamma_{0D} \cup \Gamma_{0N}$ und $\Gamma_{0D} \cap \Gamma_{0N} = \emptyset$. Die materiellen Punkte werden eindeutig durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{X} \in \Omega_0$ bzw. ihre Koordinaten (X_1, X_2, X_3) charakterisiert.

Zum aktuellen Zeitpunt t nimmt der Körper das Gebiet $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ – die Momentankonfiguration – ein. Hier werden die materiellen Punkte in den Abbildungen des Körpers durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{x}$ bzw. ihre Koordinaten (x_1, x_2, x_3) bestimmt. Unter der Bewegung (Deformation) des Körpers wird die zeitliche Aufeinanderfolge von Konfigurationen verstanden. Durch das Bewegungsgesetz

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t) \tag{8}$$

wird für die materiellen Punkte zu jedem Zeitpunkt t ein eindeutiger Zusammenhang zwischen ihrer aktuellen Position im $\mathbb{E}^3$ und ihrer Zuordnung im Referenzzustand hergestellt. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung zwischen Punkten des physikalischen Körpers und materiellen Punkten im $\mathbb{R}^3$ für alle t folgt die Gültigkeit des inversen Bewegungsgesetzes

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t)\,. \tag{9}$$

[64] C. Miehe. On the representation of Prandtl-Reuss tensors within the framework of multiplicative elastoplasticity. *Int. J. Plast.*, 10(6):609-621, 1994.

[65] C. Miehe. Exponential map algorithm for stress updates in anisotropic multiplicative elastoplasticity for single crystals. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39:3367-3390, 1996.

[66] C. Miehe, E. Stein and W. Wagner. Associative multiplicative elastoplasticity: Formulation and aspects of the numerical implementation including stability analysis. *Comp. Struct.*, 52(5):969-978, 1996.

[67] C. Miehe, J. Schotte and J. Schröder. Computational micro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. *Comp. Mat. Sci.*, 16:372-382, 1999.

[68] M.N.L. Narasimhan. *Principles of continuum mechanics*. Wiley, New York, 1993.

[69] J. Ning and E.C. Aifantis. On anisotropic finite deformation plasticity, Part I. A two-back stress model. *Acta Mechanica*, 106:55-72, 1994.

[70] J. Ning and E.C. Aifantis. Anisotropic yield and plastic flow of polycrystalline solids. *Int. J. Plast.*, 12:1221-1240, 1996.

[71] E.T. Onat. Representation of inelastic behaviour in the presence of anisotropy and of finite deformations. In: *Recent advances in creep and fracture of engineering materials and structures.* Pineridge Press, Swansea, 1982.

[72] P. Papadopoulos and J. Lu. On the formulation and numerical solution of problems in anisotropic finite plasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190:4889-4910, 2001.

[73] B. Peeters, E. Hoferlin, P. Van Houtte and E. Aernoudt. Assessment of crystal plasticity based calculation of the lattice spin of polycristalline metals for FE implementation. *Int. J. Plast.*, 17:819-836, 2001.

[74] C. Sansour. On anisotropy at the actual configuration and the adequate formulation of a free energy function. In: *IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogenity and Nonlinearity in Solid Mechanics*, 43-50, 1995.

[75] C. Sansour, I. Karšaj and J. Sorić. On anisotropic flow rules in multiplicative elastoplasticity at finite strains. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 196:1294-1309, 2007.

[76] A.V. Shutov and R. Kreißig. Finite strain viscoplasticity with nonlinear kinematic hardening: phenomenological modeling and time integration. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 197:2015-2029, 2008.

[51] E. Kontou and G. Spathis. Application of finite strain viscoplasticity to polymeric fiber composites. *Int. J. Plast.*, 22:1287-1303, 2006.

[52] M. Kraska. *Textursimulation bei großen inelastischen Verformungen mit der Technik des repräsentativen Volumenelementes (RVE).* PhD thesis, Pro Business Verlag, Berlin, 1999.

[53] J. Kratochvil. Finite strain theory of crystalline elastic-plastic materials. *Acta Mechanica*, 16:127-142, 1973.

[54] M. Kuroda. Interpretation of the behavior of metals under large plastic shear deformations: a macroscopic approach. *Int. J. Plast.*, 13:359-383, 1997.

[55] K.Ch. Le and H. Stumpf. Constitutive equations for elastoplastic bodies at finite strain: thermodynamic implementation. *Act Mechanica*, 100:155-170, 1993.

[56] J.-K. Lee, D.-W. Park and S.-I. Oh. Simulation of deep drawing of square cup using an elasto-plastic finite element method. In: *NUMISHEET'96 Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes*, 1996.

[57] J. Lubliner. A maximum-dissipation principle in generalized plasticity. *Acta Mechanica*, 52:225-237, 1984.

[58] R. Mahnken. Simulation of strength difference for adhesive materials in finite deformation elasto-plasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194:4097-4114, 2005.

[59] J. Mandel. Plasticité classique et viscoplasticité. In: *CISM Courses and Lectures No.97*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[60] J. Mandel. Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *Int. J. Sol. Struct.*, 9:725-740, 1973.

[61] A. Menzel. Relations between material, intermediate and spatial generalized strain measures for anisotropic multiplicative inelasticity. *Acta Mechanica*, 182:231-252, 2006.

[62] D. Michael and A. Meyer. *Some remarks on the simulation of elasto-plastic problems on parallel computers.* TU Chemnitz-Zwickau, Preprint SPC/95-13, 1995.

[63] C. Miehe. *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementation.* Habilitation, Universität Hannover, 1992.

Den Ausgangspunkt der kinematischen Betrachtungen zur Herleitung konstitutiver Gesetze bei großen Verzerrungen bildet der Deformationsgradient

$$\boldsymbol{F} \;=\; (\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \;=\; (\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \;+\; \boldsymbol{I}\,, \tag{10}$$

welcher ein materielles Linienelement von der Ausgangs- in die Momentankonfiguration abbildet. Hierbei stellt $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ den Verschiebungsvektor materieller Teilchen als Funktion der räumlichen Koordinaten und der Zeit dar. Mit dem Bewegungsgesetz (8) kann dieser auch als Funktion der Koordinaten der Ausgangskonfiguration und der Zeit formuliert werden:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t), t) \;=\; \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) \;=\; \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) \;-\; \boldsymbol{X}\,. \tag{11}$$

Dabei ist die Gleichheit der Vektorfelder $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{U}$ (die unterschiedliche Vektorfunktionen sind) in dem Sinne zu verstehen, dass bei oben beschriebener Operation die speziellen Charakteristika des vektoriellen Verschiebungsfeldes vollständig erhalten bleiben. Es wird lediglich als Funktion unterschiedlicher Koordinaten dargestellt. Am Beispiel des Verschiebungsvektors wird die Zweckmässigkeit einer solchen Vorgehensweise besonders augenfällig: Als Vektor, der die Positionen ein und des selben materiellen Punktes zu unterschiedlichen Zeiten miteinander verbindet ist es ohne Bedeutung, aus welchem Bezugssystem heraus er betrachtet wird. Es bleibt der selbe Vektor mit den selben physikalischen Eigenschaften.

Im Rahmen des Wechsels des Systems der als unabhängige Variable gewählten Ortskoordinaten ändern sich in allgemeinen krummlinigen Koordinaten adäquat sowohl die Basisvektoren als auch die Vektorkoordinaten. Eine solche Transformation kann auf beliebige Vektoren oder Tensoren angewandt werden. Sie macht sich häufig erforderlich, wenn in einer Beziehung physikalische Größen miteinenader verknüpft werden sollen (z. B. im Rahmen einer Summation oder Integration), die auf unterschiedliche Punkte im $\mathbb{E}^3$ bezogen sind. Für die Vektor- bzw. Tensorkoordinaten wird die Transformation mit dem so genannten *Shifter* ausgeführt (vgl. [68] u. a.). Der Shifter ist ein zweistufiger Zweipunkttensor, dessen Koordinaten als Skalarprodukte der Basisvektoren der verschiedenen Koordinatensysteme definiert sind. In kartesischen Systemen mit zueinander parallelen Koordinatenachsen stellt der Einheitstensor den Shifter dar. Seine Anwendung auf Vektoren führt in diesem Fall lediglich zu deren Paralleltransport bei konstanten Vektorkoordinaten. Der Deformationsgradient (10) kann mit (11) somit auch wie folgt dargestellt werden:

$$\boldsymbol{F} \;=\; (\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}} \;+\; \boldsymbol{I}\,. \tag{12}$$

Bezüglich der elastisch-plastischen Prozesse im Kontinuum wird im vorliegenden Modell die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e\boldsymbol{F}^p$ in einen elastischen und einen plastischen Teildeformationsgradienten verwendet. Im Zusammenhang damit steht die klassische Definition dreier Konfigurationen

für die Abbildung des physikalischen Körpers in den dreidimensionalen euklidischen Raum (vgl. Abbildung 1): Der Ausgangs- bzw. Referenzkonfiguration, die in der Regel mit dem undeformierten Zustand gleichgesetzt wird, der Momentankonfiguration zum aktuellen Zeitpunkt, deren zeitliche Folge die Bewegung (Deformation) des Körpers beschreibt und die plastische Zwischenkonfiguration als eine (gedanklich) elastisch entlastete, spannungsfreie Konfiguration für die konsequent voneinander getrennte Definition der elastischen und plastischen Verzerrungsanteile (vgl. auch [33, 50, 55, 63, 77, 79]).

Zur Erfassung der plastischen Anisotropie wird ein Substrukturkonzept verwendet, das die Definition einer weiteren Konfiguration einschließt und dessen Grundgedanken im vorangegangenen Abschnitt näher erläutert wurden.

Weder auf der Momentankonfiguration noch auf der Referenzkonfiguration sind die Verzerrungsanteile konsequent voneinander zu trennen. Die diskutierte Aufspaltung des Deformationsgradienten bezüglich des Kontinuums gestattet jedoch eine für die Entwicklung des elastischen Teildeformationsgesetzes notwendige Definition von Verzerrungsmaßen zur Beschreibung rein elastischer, reversibler Prozesse. So stellt der zweistufige kovariante Tensor

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{e} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^{e\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{e} - \widetilde{\boldsymbol{G}}\right) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{C}}^{e} - \widetilde{\boldsymbol{G}}\right) \tag{13}$$

mit der kovarianten Metrik $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ einen elastischen Verzerrungstensor vom Greenschen Typ auf der plastischen Zwischenkonfiguration dar. Entsprechend gilt für den elastischen Strecktensor $\widetilde{\boldsymbol{C}}^{e}$ vom Rechts-Cauchy-Green-Typ[1]

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}^{e} = \boldsymbol{F}^{e\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{e}\,. \tag{14}$$

Analog kann auf der Ausgangskonfiguration ein plastischer Strecktensor $\boldsymbol{C}^{p}$ definiert werden.

$$\boldsymbol{C}^{p} = \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{p} \tag{15}$$

Der Rechts-Cauchy-Green-Tensor der Gesamtverzerrungen $\boldsymbol{C}$ ist somit wie folgt mit den Teildeformationsgradienten verknüpft:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{e\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{e}\boldsymbol{F}^{p} = \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}}^{e}\boldsymbol{F}^{p}\,. \tag{16}$$

[1] Verzerrungsmaße vom Rechts-Cauchy-Green-Typ stellen jeweils das pull-back der Metrik einer Konfiguration auf eine andere dar. Korrekterweise lautet die Beziehung (14) somit $\widetilde{\boldsymbol{C}}^{e} = \boldsymbol{F}^{e\mathrm{T}}\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{F}^{e}$ mit der kovarianten Metrik $\boldsymbol{g}$ der Momentankonfiguration. Da jedoch in symbolischer Schreibweise bei der Überschiebung mit einem anderen Tensor die Metrik wie ein Einheitstensor wirkt, d. h., den an der jeweiligen Operation beteiligten Tensor nicht verändert (jedoch dessen Koordinaten), wird hier und im Weiteren die Metrik nur angegeben, wenn sie als Einzelsymbol auftritt.

[36] O. Häusler. *Anisotropes plastisches Fließen bei großen Deformationen.* Dissertation. Fachbereich Maschinenbau, Universität Karlsruhe, 1999.

[37] O. Häusler, D. Schick and Ch. Tsakmakis. Description of plastic anisotropy effects at large deformations. Part II: The case of transverse isotropy. *Int. J. Plast.*, 20:199-223, 2004.

[38] K.S. Havner. *Finite Plastic Deformation of Crystalline Solids.* Cambridge University Press, 1992.

[39] R. Hill. A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. Roy. Soc. of London*, A 193:281-297, 1948.

[40] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity.* Clarendon Press, Oxford, 1950

[41] R. Hill. Theoretical plasticity of textured aggregates. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85:179-191, 1979.

[42] R. Hill. On the Micro to Macro-Transition in Constitutive Analyses of Elastoplastic Response at Finite Strains. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 98:579-590, 1985.

[43] R. Hill. Constitutive modeling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38:405-417, 1990.

[44] W.F. Hosford. On yield loci of anisotropic cubic metals. In: *7th North American Metalworking Conf.*, SME, Dearborn, MI, 191-197, 1979.

[45] M. Itskov and N. Aksel. A constitutive model for orthotropic elastoplasticity at large strains. *Arch. Appl. Mech.*, 74:75-91, 2004.

[46] G. Johansson, M. Ekh and K. Runesson. Computational modeling of inelastic large ratcheting strains. *Int. J. Plast.*, 21:955-980, 2005.

[47] G. Johansson, A. Menzel and K. Runesson. Modeling of anisotropic inelasticity in pearlitic steel at large strains due to deformation induced substructure evolution. *Eur. J. Mech.*, 24:899-918, 2005.

[48] Th. Kersten. *Materialverhalten von Metallen im Rahmen der anisotropen Viskoplastizität.* Dissertation, Berichte des Instituts für Mechanik (Bericht 1/2004), Universität Kassel, 2004.

[49] A.S. Khan and P. Cheng. An anisotropic elastic plastic constitutive model for single and polycrystalline metals. I – Theoretical developments. *Int. J. Plast.*, 12:147-162, 1996.

[50] M. Kleiber. Kinematics of deformation processes in materials subjected to finite elastic-plastic strains. *Int. J. Engng. Sci.*, 13:513-525, 1975.

[24] Y.F. Dafalias. Orientational evolution of plastic orthotropy in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 48:2231-2255, 2000.

[25] Y.F. Dafalias and E.C. Aifantis. On the microscopic origin of the plastic spin. *Acta Mechanica*, 82:31-48, 1990.

[26] B. Eidel and F. Gruttmann. Finite element analysis of anisotropic structures at large inelastic deformations. In: *Deformation and failure in metallic materials*, K. Hutter and H. Baaser (Eds.), Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, 10:51-78, Springer, 2003.

[27] M. François. A plasticity model with yield surface distorsion for non proportional loading. *Int. J. Plast.*, 17:703-717, 2001.

[28] U.-J. Görke, A. Bucher and R. Kreißig, R. An efficient algorithm for the integration of the initial value problem in anisotropic finite elastoplasticity considering a substructure. In: *Dislocations, Plasticity and Metal Forming*, Proc. of 10th International Symposium on Plasticity and Its Current Applications, Plasticity '03, A. S. Khan (Ed.), NEAT, Maryland, 346-348, 2003.

[29] U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig and D. Michael. *Ein Beitrag zur Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen einschließlich der Materialmodellierung bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen mit Hilfe der FEM.* Preprint SFB393/00-09, TU Chemnitz, 2000.

[30] K. Hackl and M. Schmidt-Baldassari. Time integration algorithms for evolution equations in finite strain plasticity. In: *Trends in Computational Structural Mechanics*, W.A. Wall, K.-U. Bletzinger and K. Schweizerhof (Eds.), CIMNE, Barcelona, 128-139, 2001.

[31] C.-S. Han, K. Chung, R.H. Wagoner and S.-I. Oh. A multiplicative finite elasto-plastic formulation with anisotropic yield functions. *Int. J. Plast.*, 19:197-211, 2003.

[32] S. Hartmann, G. Lührs and P. Haupt. An efficient stress algorithm with applications in viscoplasticity and plasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 40:991-1013, 1997.

[33] P. Haupt On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behavior. *Int. J. Plast.*, 1:303-316, 1985.

[34] P. Haupt and Ch. Tsakmakis. On kinematic hardening and large plastic deformations. *Int. J. Plast.*, 2:279-293, 1986.

[35] P. Haupt and Th. Kersten. On the modelling of anisotropic material behaviour in viscoplasticity. *Int. J. Plast.*, 19:1885-1915, 2003.

3.2 Hyperelastisches Teildeformationsgesetz

Das im Weiteren dargestellte Materialmodell wurde in die hauseigene FE-Software SPC-PM2AdNl der TU Chemnitz implementiert. Diese basiert auf einer Total-Lagrangeschen Beschreibung, was die Definition der konstitutiven Beziehungen auf der Ausgangskonfiguration erfordert.

Unter Berücksichtigung des Konzepts der konjugierten Variablen, das erstmals von Ziegler und Mac Vean [95] diskutiert wurde, kann, ausgehend vom ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, die so genannte *Clausius-Duhem*-Ungleichung für den isothermen Fall auf der Ausgangskonfiguration definiert werden.

$$-\varrho_0 \dot{\psi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{T} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}} \geq 0 \tag{17}$$

Die konsistente Auswertung dieser Beziehung, in der $\boldsymbol{T}$ den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor und ϱ_0 die materielle Massedichte darstellen, führt im Zusammenhang mit geeigneten Ansätzen auf die konstitutiven Beziehungen für das strukturmechanische Problem. Mit der Definition einer symmetrischen zweistufigen tensoriellen inneren Variable $\widehat{\boldsymbol{A}}_1$ und einer schiefsymmetrischen zweistufigen tensoriellen inneren Variable $\widehat{\boldsymbol{A}}_2$ auf der Substrukturkonfiguration wird, entsprechend der multiplikativen Aufspaltung des Deformationsgradienten, eine additive Zerlegung der freien Helmholtz-Energiedichte ψ in einzelne konstitutive Anteile vorgeschlagen.

$$\psi = \bar{\psi}_e \left(\widetilde{\boldsymbol{E}}^e \right) + \psi_p \left(\widehat{\boldsymbol{A}}_1, \widehat{\boldsymbol{A}}_2 \right) \tag{18}$$

Dabei bezeichnet $\bar{\psi}_e$ den elastischen Anteil der freien Helmholtz-Energiedichte, der lediglich vom elastischen Verzerrungsmaß abhängt und ψ_p deren plastischen Anteil, welcher reversibel gespeichert wird und von den inneren Variablen $\widehat{\boldsymbol{A}}_1$ sowie $\widehat{\boldsymbol{A}}_2$ vom Verzerrungstyp abhängt.

Wie oben erwähnt, sollen wegen der bevorzugten materiellen Beschreibung der strukturmechanischen Prozesse die konstitutiven Beziehungen konsequent auf der Ausgangskonfiguration formuliert werden. Zu diesem Zweck sind die Anteile $\bar{\psi}_e$ und ψ_p der freien Helmholtz-Energiedichte in Abhängigkeit materieller Größen zu definieren. Um dem Prinzip der Objektivität zu genügen, wird $\bar{\psi}_e$ zunächst als isotrope Tensorfunktion der Invarianten der unabhängigen Variablen in der plastischen Zwischenkonfiguration betrachtet. Am Beispiel der ersten Grundinvariante des elastischen Verzerrungstensors $\widetilde{\boldsymbol{E}}^e$ soll das pull-back auf die Ausgangskonfiguration demonstriert werden.

$$
\begin{aligned}
J_1(\widetilde{\boldsymbol{E}}^e) &= \widetilde{\boldsymbol{E}}^e \cdot\cdot \widetilde{\boldsymbol{G}}^{-1} = \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{C}}^e \cdot\cdot \widetilde{\boldsymbol{G}}^{-1} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{G}} \cdot\cdot \widetilde{\boldsymbol{G}}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}}^e\boldsymbol{F}^p\boldsymbol{F}^{p-1} \cdot\cdot \widetilde{\boldsymbol{G}}^{-1} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}}^e\boldsymbol{F}^p \cdot\cdot \boldsymbol{F}^{p-1}\widetilde{\boldsymbol{G}}^{-1}\boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{C}^{p-1} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1} \cdot\cdot \boldsymbol{I} - \frac{3}{2} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Zu (19) analoge Beziehungen können für die weiteren Invarianten von $\widetilde{\boldsymbol{E}}^e$ abgeleitet werden (eine ausführliche Darstellung ist in [9] angegeben). Folglich kann der elastische Anteil der freien Helmholtz-Energiedichte als eine (von $\breve{\psi}_e$ verschiedene) Funktion des in die Ausgangskonfiguration transformierten elastischen Verzerrungsmaßes $\widetilde{\boldsymbol{C}}^e$ formuliert werden.

$$
\psi = \breve{\psi}_e\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right) + \psi_p\left(\widehat{\boldsymbol{A}}_1, \widehat{\boldsymbol{A}}_2\right) \qquad (20)
$$

Die für die Auswertung der Clausius-Duhem-Ungleichung benötigte materielle Zeitableitung der freien Helmholtz-Energiedichte lautet somit:

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \frac{\partial\breve{\psi}_e}{\partial\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)} \cdot\cdot \left[\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)^{\cdot}\right]^{\mathrm{T}} + \frac{\partial\psi_p}{\partial\widehat{\boldsymbol{A}}_1} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_1{}^{\mathrm{T}} + \frac{\partial\psi_p}{\partial\widehat{\boldsymbol{A}}_2} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_2{}^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{\partial\breve{\psi}_e}{\partial\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)} \cdot\cdot \left[\dot{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{C}^{p-1} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{C}}^{p-1}\right]^{\mathrm{T}} + \frac{\partial\psi_p}{\partial\widehat{\boldsymbol{A}}_1} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_1 - \frac{\partial\psi_p}{\partial\widehat{\boldsymbol{A}}_2} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_2 \\
&= \frac{\partial\breve{\psi}_e}{\partial\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)} \cdot\cdot \boldsymbol{C}^{p-1}\dot{\boldsymbol{C}} + \frac{\partial\breve{\psi}_e}{\partial\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}^{p-1}\boldsymbol{C} \\
&\quad + \frac{\partial\psi_p}{\partial\widehat{\boldsymbol{A}}_1} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_1 - \frac{\partial\psi_p}{\partial\widehat{\boldsymbol{A}}_2} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_2 \,. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Nach Einsetzen von (21) in (17) sowie einigen zweckmäßigen Umformungen ergibt sich eine spezielle Darstellung der Clausius-Duhem-Ungleichung, die bei der Formulierung von Evolutionsgleichungen für Teilprozesse der betrachteten finiten Elastoplastizität einzuhalten ist.

$$
\begin{aligned}
&- \varrho_0\frac{\partial\psi_p}{\partial\widehat{\boldsymbol{A}}_1} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_1 + \varrho_0\frac{\partial\psi_p}{\partial\widehat{\boldsymbol{A}}_2} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_2 - \varrho_0\,\boldsymbol{C}\frac{\partial\breve{\psi}_e}{\partial\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}^{p-1} \\
&\qquad - \left\{\varrho_0\frac{\partial\breve{\psi}_e}{\partial\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)}\boldsymbol{C}^{p-1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{T}\right\} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}} \;\geq\; 0 \qquad (22)
\end{aligned}
$$

[12] A. Bucher, U.-J. Görke and R. Kreißig. A numerical algorithm for the computation of the plastic spin within the context of an elasto-plastic substructure model. In: *Dislocations, Plasticity, Damage and Metal Forming: Material Response and Multiscale Modeling*, Proc. of 12th International Symposium on Plasticity and Its Current Applications, Plasticity '06, A. S. Khan (Ed.), NEAT, Maryland, 2006.

[13] A. Bucher, U.-J. Görke and R. Kreißig. About an efficient and consistent numerical strategy for the solution of the initial-boundary value problem for anisotropic finite elastoplasticity. In: *Computational Mechanics – Solids, Structures and Coupled Problems*, Proceedings of III European Conference on Computational Solid and Structural Mechanics, C.A.M. Soares, J.A.C. Martins, H.C. Rodrigues, C.A.B. Pina, C.M.M. Soares, E.B.R. Pereira and J. Folgado (Eds.), Springer, Dordrecht, 2006.

[14] A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke and R. Kreißig. *Entwicklung von adaptiven Algorithmen für nichtlineare FEM*. Preprint SFB393/04-03, TU Chemnitz, 2004.

[15] A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke and R. Kreißig. A contribution to error estimation and mapping algorithms for a hierarchical adaptive FE-strategy in finite elastoplasticity. *Comp. Mech.*, 36(3):182-195, 2005.

[16] A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke and R. Kreißig. A comparison of mapping algorithms for hierarchical adaptive FEM in finite elasto-plasticity. *Comp. Mech.*, 39(4):521-536, 2007.

[17] S. Cleja-Ţigoiu. Nonlinear elasto-plastic deformations of transversely isotropic material and plastic spin. *Int. J. Eng. Sci.*, 38:737-763, 2000.

[18] S. Cleja-Ţigoiu. Large elasto-plastic deformations in anisotropic and dissipative materials. In: *Proc. of Euromech 430*, Prague, 2002.

[19] S. Cleja-Ţigoiu. Anisotropic elasto-plastic model for large metal forming deformation processes. *IJFP – Modeling and Experiments*, 10:67-87, 2007.

[20] Y.F. Dafalias. A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations. In: *Plasticity today*, International Symposium on Recent Trends and Results in Plasticity, A. Sawczuk and D. Bianchi (Eds.), Elsevier, Udine, 135-151, 1983.

[21] Y.F. Dafalias. The plastic spin. *J. Appl. Mech.*, 52:865-871, 1985.

[22] Y.F. Dafalias. Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations, Part1: Kinematics. *Acta Mechanica*, 69:119-138, 1987.

[23] Y.F. Dafalias. Plastic spin: necessity or redundancy. *Int. J. Plast.*, 14:909-931, 1998.

Literatur

[1] L. Anand, S. Balasubramanian and M. Kothari. Constitutive modeling of polycrystalline metals at large strain. In: *Large Plastic Deformation of Crystalline Aggregates*, C. Teodosiu Ed.), Vol. 376 of CISM Courses and Lectures, Springer, Wien, New York, 109-172, 1997.

[2] N. Aravas. Finite strain anisotropic plasticity: Constitutive equations and computational issues. *Advances in finite deformation problems in materials processing and structures*, ASME, 125:25-32, 1991.

[3] R.J. Asaro. Crystal plasticity. *J. Appl. Mech.*, 50:921-934, 1983.

[4] R.J. Asaro. Micro-mechanics of Crystals and Polycrystals. *Advances in Applied Mechanics*, 23:1-115, 1983.

[5] F. Barlat and J. Lian. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *Int. J. Plast.*, 5:51-66, 1989.

[6] F. Barlat, Y. Maeda, K. Chung, M. Yanagawa, J.C. Brem, Y. Hayashida, D.J. Lege, K. Matsui, S.J. Murtha, S. Hattori, R.C. Becker and S. Makosey. Yield function development for aluminium alloy sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, 45:1727-1763, 1997.

[7] A.J. Beaudoin, P.R. Dawson, K.K. Mathur, U.F. Kocks and D.A. Korzekwa. Application of polycrystalline plasticity to sheet forming. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 117:49-70, 1991.

[8] D. Besdo. Zur anisotropen Verfestigung anfangs isotroper starrplastischer Medien. *ZAMM*, 51:T97-T98, 1971.

[9] A. Bucher. *Deformationsgesetze für große elastisch-plastische Verzerrungen unter Berücksichtigung einer Substruktur*. Dissertation, Institut für Mechanik der TU Chemnitz, Bericht 4/01, 2001.

[10] A. Bucher, U.-J. Görke and R. Kreißig. Development of a generalized material interface for the simulation of finite elasto-plastic deformations. *Int. J. Sol. Struct.*, 38:9423-9436, 2001.

[11] A. Bucher, U.-J. Görke and R. Kreißig. A material model for finite elasto-plastic deformations considering a substructure. *Int. J. Plast.*, 20:619-642, 2004.

Die Ungleichung (22) stellt einen komplexen Ausdruck dar, der auf unterschiedliche Weise erfüllt werden kann. Sie behält z. B. auch dann ihre uneingeschränkte Gültigkeit, wenn aus Gründen physikalischer Plausibilität für einzelne Anteile vorausgesetzt wird, dass sie für sich genommen nicht negativ oder gleich Null sind. So kann beispielsweise aus der separaten Betrachtung reversibler isothermer elastischer Prozesse (hier gilt die Identität mit der Null in der Clausius-Duhem-(Un)gleichung) abgeleitet werden, dass der Ausdruck in der zweiten Zeile von (22) für beliebige Deformationsvorgänge den Wert Null annimmt. Daraus folgt die explizite Spannungs-Verzerrungs-Beziehung der Hyperelastizität.

$$\boldsymbol{T} \;=\; 2\,\varrho_0\,\frac{\partial \breve{\psi}_e}{\partial\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)}\boldsymbol{C}^{p-1} \tag{23}$$

Unter der Annahme, dass $\breve{\psi}_e$ als Tensorfunktion in den Invarianten von $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}$ formuliert wird, gilt beispielsweise für die erste Grundinvariante (19):

$$J_1(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}) \;=\; \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1} \cdot\cdot\, \boldsymbol{I} \;=\; \boldsymbol{C} \cdot\cdot\, \boldsymbol{C}^{p-1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial J_1}{\partial\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)}\boldsymbol{C}^{p-1} \;=\; \boldsymbol{C}^{p-1} \tag{24a}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{C}} \;=\; \boldsymbol{C}^{p-1} \tag{24b}$$

Eine ausführliche Darstellung analoger Ableitungen bezüglich aller Invarianten und der Auswirkungen auf die Gesamtfunktion $\breve{\psi}_e$ für den isothermen elastisch-plastischen Fall findet sich wiederum in [9]. Im Ergebnis kann die Beziehung (23) für die klassische isotherme Hyperelastizität wesentlich vereinfacht dargestellt werden.

$$\boldsymbol{T} \;=\; 2\,\varrho_0\,\frac{\partial \breve{\psi}_e}{\partial\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)}\boldsymbol{C}^{p-1} \;=\; 2\,\varrho_0\,\frac{\partial \breve{\psi}_e}{\partial \boldsymbol{C}} \;=\; 2\,\frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}} \tag{25}$$

In diesem Zusammenhang wurde zusätzlich angenommen, dass die (konstante) Massedichte ϱ_0 in die Materialkonstanten eingeht. Zur Beschreibung der elastischen Teilprozesse des Materialverhaltens von Metallen wird in [9] der modifizierte Neo-Hooke-Ansatz

$$\psi_e \;=\; c_{10}\;(I_1 - \ln I_3 - 3) \;+\; D_2\;(\ln I_3)^2 \tag{26}$$

mit den Materialparametern $c_{10}\,, D_2$ vorgeschlagen, die für moderate elastische Verzerrungsanteile aus dem Elastizitätsmodul und der Querkontraktionszahl abgeschätzt werden können.

3.3 Plastisches Teildeformationsgesetz – Alternative Formulierungen

Die vollständige Analyse der konstitutiven Beziehungen auf der Basis eines Substrukturkonzepts ist in [9] ausführlich dargestellt. Daher werden in diesem Abschnitt lediglich die wesentlichen Grundlagen der Definition eines plastischen Teildeformationsgesetzes erläutert und verschiedene, alternative Ansätze diskutiert.

Nach eingehender Betrachtung der (hyperelastischen) Beziehung für den Spannungstensor verbleibt von der Clausius-Duhem-Ungleichung (22) lediglich ein dissipativer, plastischer Anteil.

$$\mathcal{D}^p = -\varrho_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_1} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_1 + \varrho_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_2} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_2 - \varrho_0 \boldsymbol{C} \frac{\partial \breve{\psi}_e}{\partial \left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{p-1}\right)} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}^{p-1} \geq 0 \tag{27}$$

Mit der Definition von Variablen

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \varrho_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_1}, \qquad \widehat{\boldsymbol{T}}^p = -\varrho_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_2} \tag{28}$$

kann diese Beziehung der plastischen Dissipation unter Berücksichtigung von (23) weiter vereinfacht werden.

$$\mathcal{D}^p = -\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_1 - \widehat{\boldsymbol{T}}^p \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{C}^p \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}^{p-1} \geq 0 \tag{29}$$

Dabei entsprechen $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ dem zu $\widehat{\boldsymbol{A}}_1$ arbeitskonjugierten Rückspannungstensor und $\widehat{\boldsymbol{T}}^p$ einem zu $\widehat{\boldsymbol{A}}_2$ arbeitskonjugierten zweistufigen schiefsymmetrischen Tensor vom Spannungstyp.

Unter konsistenter Anwendung von pull-back-Operationen mit dem Abbildungstensor $\boldsymbol{H}$ kann die Beziehung der plastischen Dissipation (29) problemlos in materiellen Größen fromuliert werden.

$$\mathcal{D}^p = -\boldsymbol{\alpha} \cdot\cdot \overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_1 - \boldsymbol{T}^p \cdot\cdot \overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{C}^p \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}}^{p-1} \geq 0 \tag{30}$$

In diesem Zusammenhang gelten folgende Transformationsbeziehungen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{H}^{-1} \widehat{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{H}^{-\mathrm{T}}, & \overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_1 &= \dot{\boldsymbol{A}}_1 - \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{H}} - \dot{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}^{-T} \boldsymbol{A}_1 , \\ \boldsymbol{T}^p &= \boldsymbol{H}^{-1} \widehat{\boldsymbol{T}}^p \boldsymbol{H}^{-\mathrm{T}}, & \overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_2 &= \dot{\boldsymbol{A}}_2 - \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{H}} - \dot{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}^{-T} \boldsymbol{A}_2 . \end{aligned} \tag{31}$$

Das Postulat vom Maximum der plastischen Dissipation führt unter der Restriktion der Erfüllung einer geeigneten Fließbedingung

$$F(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p) \leq 0 \tag{32}$$

dargestellt. Die Leistungsfähigkeit des Modells wurde hier an zwei Beispielen illustriert.

Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit war eine Studie über Effizienz und Genauigkeit unterschiedlicher Formulierungen des Anfangswertproblems. Neben der üblichen Definition einer Spanungs-Verzerrungs-Beziehung in Geschwindigkeitsformulierung wurde deren Ersatz durch eine assoziierte Fließregel diskutiert. In diesem Rahmen fanden Evolutionsgleichungen für einen symmetrischen Tensor vom Rechts-Cauchy-Green-Typ bzw. den plastischen Teildeformationsgradienten zur Beschreibung der Kinematik des plastischen Teildeformationsgesetzes Eingang in das DAE. Für diese Ansätze konnte der Spannungstensor explizit aus dem hyperelastischen Teildeformationsgesetz ermittelt werden. Wie am Beispiel des Rohres unter Innendruck gezeigt werden konnte, ist diese Vorgehensweise mit einer zuverlässigeren Spannungsberechnung bei größen Lastschritten verbunden.

Insbesondere die Definition einer Evolutionsgleichung für den plastischen Teildeformationsgradienten weist neben der möglichen Lastschrittvergrößereung ohne Genauigkeitsverlust weitere Vorteile auf:

- numerische Gewährleistung der plastischen Inkompressibilität durch Verwendung der so genannten *exponential map* Strategie,
- Berücksichtigung anisotrop elastischen Materialverhaltens auf der Basis von Strukturtensoren sowie
- einfachere und stabilere numerische Ermittlung von Abbildungstensoren zur Beschreibung von Texturentwicklungen.

Diese Modellpotenziale konnten hier nur teil- und ansatzweise demonstriert werden. Sie bilden somit die Basis für weitere systematische Untersuchungen zum Substrukturmodell. So ist anzustreben, numerische Strategien wie das *exponential map* oder die in [76] präsentierte Vorgehensweise in die Lösung des Anfangswertproblems zur Gewährleistung der plastischen Inkompressibilität zu integrieren. Weitere Aufgabenstellungen befassen sich mit der experimentellen Verifizierung der Ansätze zur Beschreibung von Texturentwicklungen sowie der Kalibrierung der dazu erforderlichen konstitutiven Beziehungen.

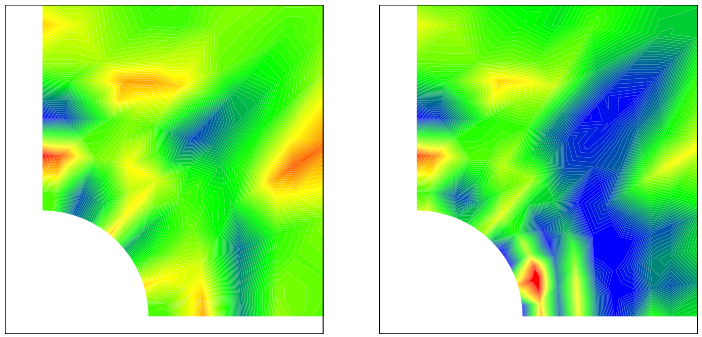


Abbildung 9: Ausschnitt aus der Scheibe mit Loch unter Zugbelastung in vertikaler Richtung. Darstellung von Isoflächen des durch den orthogonalen Tensor $\boldsymbol{\beta}$ im ebenen Fall repräsentierten Winkels gegenüber der horizontalen Koordinatenachse in Grad. Links: Undeformierter Ausgangszustand ($\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{I}$ – entsprechend Abbildung 8). Rechts: Entwicklung von $\boldsymbol{\beta}$ nach 5 % Dehnung.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde ein thermodynamisch konsistentes Deformationsgesetz zur Beschreibung der Elastoplastizität bei großen Verzerrungen diskutiert, das als nichtlineares Algebro-Differentialgleichungssystem (DAE) vorliegt. Für die Lösung derartiger Systeme im Sinne eines Anfangswertproblems wurden in der Literatur unterschiedliche Strategien präsentiert. Hier wurde ein Algorithmus zur simultanen Integration des gesamten DAE auf der Basis einer impliziten Einschritt-Zeitdiskretisierung vorgeschlagen. Diese Vorgehensweise führt auf die Lösung nichtlinearer algebraischer Gleichungssysteme im Integrationspunkt mittels des (lokalen) Newton-Verfahrens zur Ermittlung der Spannungen, inneren Variablen und des plastischen Multiplikators. Der Ansatz hat sich selbst bei Berücksichtigung vergleichsweise großer Lastschritte als effizient und stabil erwiesen.

Die oben beschriebenen numerischen Algorithmen wurden für Modelle mit und ohne Substruktur in das hauseigene FEM-Programm SPC-PM2AdNl implementiert und umfassend getestet. In diesem Zusammenhang gestattet der Substrukturansatz die Berücksichtigung einer allgemeinen plastischen Anisotropie. Materialmodell, Methodik und Ergebnisse der numersichen Simulation sind ausführlich in der Dissertation [9] sowie mehreren Publikationen und Tagungsbeiträgen

auf ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung (vgl. [9, 78]), das mittels des Konzepts von Lagrange-Multiplikatoren wie folgt definiert werden kann:

$$\mathcal{M}\left(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p, y\right) = \mathcal{D}^p\left(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p\right) - \lambda\, G\left(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p, y\right) \quad \rightarrow \quad \text{stat}\,. \tag{33}$$

wobei λ den so genannten *plastischen Multiplikator* bezeichnet und der Zusatzterm

$$G(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p) = F(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p) + y^2 \tag{34}$$

mit der Schlupfvariable y als Gleichheitsnebenbedingung definiert ist.

Die Auswertung von (33) durch Bildung der Ableitungen von $\mathcal{M}$ nach den unabhängigen Variablen als notwendige Bedingungen für die Existenz des Optimums resultiert in einem Gleichungssystem, aus dem das assoziierte Fließgesetz

$$\dot{\boldsymbol{C}}^{p-1} = -2\,\lambda\, \boldsymbol{C}^{-1}\, \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\, \boldsymbol{C}^{p-1} \tag{35}$$

sowie verallgemeinerte Evolutionsgleichungen für die inneren Variablen zur Beschreibung der Verfestigung abgeleitet werden können.

$$\overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_1 = -\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \qquad \overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_2 = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^p} \tag{36}$$

Zunächst wird bezüglich der inneren Variablen $\widehat{\boldsymbol{A}}_1$ und $\widehat{\boldsymbol{A}}_2$ ein Ansatz für den plastischen Anteil der freien Helmholtz-Energiedichte vorgeschlagen, der lediglich die zweiten Grundinvarianten der unabhängigen Variablen berücksichtigt.

$$\psi_p\left(\widehat{\boldsymbol{A}}_1, \widehat{\boldsymbol{A}}_2\right) = \frac{1}{2}\,\bar{c}_1\, \widehat{\boldsymbol{A}}_1 \cdot\cdot\, \widehat{\boldsymbol{A}}_1 - \frac{1}{2}\,\bar{c}_2\, \widehat{\boldsymbol{A}}_2 \cdot\cdot\, \widehat{\boldsymbol{A}}_2 \tag{37}$$

Damit folgt unter Nutzung der Definitionen (28) auf der Substrukturkonfiguration

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = c_1\, \widehat{\boldsymbol{A}}_1\,, \qquad \widehat{\boldsymbol{T}}^p = -c_2\, \widehat{\boldsymbol{A}}_2 \tag{38}$$

mit

$$c_1 = \varrho_0 \bar{c}_1\,, \qquad c_2 = \varrho_0 \bar{c}_2. \tag{39}$$

Das nachfolgende pull-back auf die Ausgangskonfiguration unter Verwendung des Abbildungstensors $\boldsymbol{H}$ führt auf die Beziehungen

$$\boldsymbol{\alpha} = c_1\, \boldsymbol{X}\, \boldsymbol{A}_1\, \boldsymbol{X}\,, \qquad \boldsymbol{T}^p = -c_2\, \boldsymbol{X}\, \boldsymbol{A}_2\, \boldsymbol{X} \tag{40}$$

mit

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}^{-1} \boldsymbol{H}^{-\mathrm{T}}\,. \tag{41}$$

Es kann leicht gezeigt werden, dass die Zeitableitung der Beziehungen (40) den folgenden Gleichungen entspricht:

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\alpha}} = c_1 \boldsymbol{X} \overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_1 \boldsymbol{X} \tag{42a}$$

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{T}}^p = -c_2 \boldsymbol{X} \overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_2 \boldsymbol{X} \,. \tag{42b}$$

Diese Beziehungen lassen sich unter Berücksichtigung der Definitionen (36) weiter vereinfachen und konkretisieren.

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\alpha}} = -c_1 \lambda \boldsymbol{X} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{X} \tag{43a}$$

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{T}}^p = -c_2 \lambda \boldsymbol{X} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^p} \boldsymbol{X} \tag{43b}$$

Die numerische Integration von elastisch-plastischen Materialmodellen, die gewöhnlich als Algebro-Differentialgleichungssystem (DAE) vorliegen, erfordert geeignete Zeitintegrationsverfahren. Zu diesem Zweck ist es erforderlich, einen Zusammenhang zwischen den "objektiven" Zeitableitungen von $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{T}^p$ ($\triangledown$-Ableitung) sowie den materiellen Zeitableitungen auf der Ausgangskonfiguration herzustellen. Sie werden unter Verwendung einfacher mathematischer Operationen aus (31) abgeleitet.

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \overset{\triangledown}{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{H}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}\dot{\boldsymbol{H}}^T\boldsymbol{H}^{-T} \tag{44a}$$

$$\dot{\boldsymbol{T}}^p = \overset{\triangledown}{\boldsymbol{T}}^p - \boldsymbol{H}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{T}^p - \boldsymbol{T}^p\dot{\boldsymbol{H}}^T\boldsymbol{H}^{-T} \tag{44b}$$

Wegen der Abhängigkeit der Fließbedingung von einer Vergleichsspannung T_F, die ihrerseits im Sinne einer Regel zur Beschreibung der isotropen Verfestigung eine Funktion der plastischen Bogenlänge E_v^p darstellt, wird zusätzlich eine Evolutionsgleichung für E_v^p benötigt. Entsprechend der in [9] verwendeten Definition wird die Geschwindigkeit der Änderung der plastischen Bogenlänge mit

$$\dot{E}_v^p = \lambda \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{C}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot \boldsymbol{C}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}} \tag{45}$$

angegeben.

In der klassischen Elastoplastizität wird zur Vervollständigung der konstitutiven Beziehungen den oben diskutierten Evolutionsgleichungen für innere Variablen zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens ein Spannungs-Verzerrungs-Ansatz in Geschwindigkeitsdarstellung hinzugefügt. Bucher zeigt in [9] ausführlich, dass die materielle Zeitableitung von (23) auf die Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{T}} = -\lambda \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} + \frac{1}{2} \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}} - \lambda \left(\boldsymbol{T} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{C}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \boldsymbol{T} \right) \tag{46}$$

Wie in der Abbildung 7 gezeigt wird, kommt es durch die Zugbelastung zur Ausbildung plastischer Anisotropien, die erwartungsgemäß in der Nähe der Bohrung am stärksten ausgeprägt sind. Die Entwicklung des orthogonalen Tensors $\boldsymbol{\beta}$ weist auf eine Drehung der Substruktur (verbunden mit der Mikroebene) gegenüber dem Kontinuum hin. Es wird daraus geschlussfolgert, dass die Berechnung einer Änderung von Orientierungen und damit die Simulation von Texturentwicklungen mit Hilfe von $\boldsymbol{\beta}$ prinzipiell möglich ist.

In einer abschließenden Studie wurden die oben beschriebenen Parameter, Anfangs- und Randbedingungen für das Beispiel der Scheibe mit Loch unter Zugbelastung lediglich dahin geändert, dass der Tensor $\boldsymbol{\beta}$ entsprechend Abbildung 8 eine anisotrope, stochastisch initiierte (Normalverteilung) Anfangsbelegung besitzt.

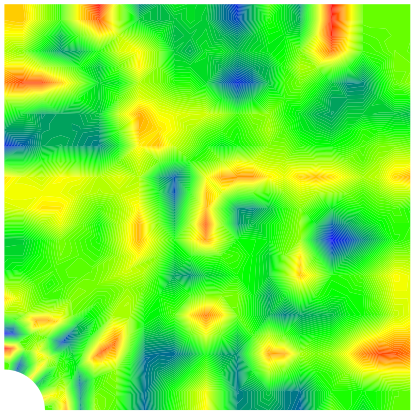


Abbildung 8: Scheibe mit Loch unter Zugbelastung in vertikaler Richtung. Darstellung von Isoflächen einer anisotropen Anfangsbelegung des durch den orthogonalen Tensor $\boldsymbol{\beta}$ im ebenen Fall repräsentierten Winkels gegenüber der horizontalen Koordinatenachse in Grad.

Der in Abbildung 9 präsentierte Probenausschnitt aus der unmittelbare Umgebung der Bohrung weist am Beispiel der Veränderung des durch den orthogonalen Tensor $\boldsymbol{\beta}$ repräsentierten Winkels wiederum deutlich auf die Entwicklung von Orientierungen hin[4].

[4] Das komplexe Verfestigungsverhalten des Substrukturansatzes lässt sich nur mit relativ kleinen Lastinkrementen numerisch stabil erfassen (mehrere, ineinander geschachtelte Iterationsschleifen). Zudem liegt die maximale, lokale Winkeländerung im Bereich der maximalen Hauptdehnung. Um bei akzeptabler Rechenzeit die Entwicklung von $\boldsymbol{\beta}$ in Isoflächendarstellung sichtbar werden zu lassen, wurde für die betrachtete stochastische Anfangsbelegung dieses Abbildungstensors der Bereich zulässiger Winkel auf $0° \ldots 15°$ begrenzt.

Zur Charakterisierung des kompressiblen elastischen Materialverhaltens wurde wie im Beispiel des Rohrs unter Innendruck der modifizierte Neo-Hooke-Ansatz (26) mit den oben angegebenen Materialparametern verwendet.

Bei den Untersuchungen zum elastisch-plastischen Materialverhalten wurde im Gegensatz zum vorigen Beispiel eine Fließbedingung nach von Mises genutzt, die um den Substrukturansatz

$$\boldsymbol{M}_S \;=\; (\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^p)\,\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^p) \tag{104}$$

erweitert ist.

$$F \;=\; \left(\hat{\boldsymbol{T}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\boldsymbol{C} \cdot\cdot \left(\hat{\boldsymbol{T}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\boldsymbol{C} \;+\; c_s \boldsymbol{M}_S\boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{M}_S\boldsymbol{C} \;-\; \frac{2}{3}T_F^2 \;=\; 0 \tag{105}$$

Während für die isotrope und die kinematische Verfestigung wiederum die gleichen Ansätze einschließlich identischer Materialparameter wie im Beispiel 5.1 angenommen wurden, gilt zur Beschreibung der formativen Verfestigung der Evolutionsansatz (43b) für die Variable $\boldsymbol{T}^p$ vom Spannungstyp. Bezüglich der das Substrukturmodell charakterisierenden Materialparameter wurden die Werte $c_s = 100\,\mathrm{MPa}^{-2}$ bzw. $c_2 = 0,005\,\mathrm{MPa}$ festgesetzt.

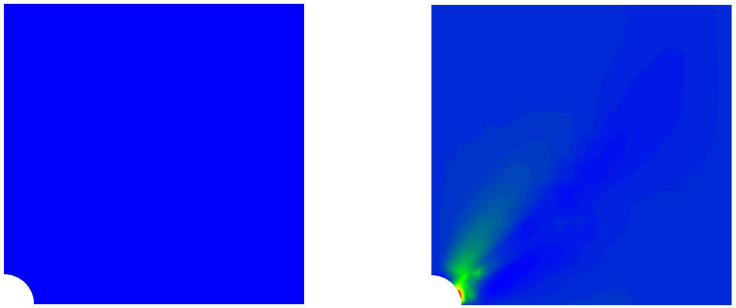


Abbildung 7: Scheibe mit Loch unter Zugbelastung in vertikaler Richtung. Darstellung von Isoflächen des durch den orthogonalen Tensor $\boldsymbol{\beta}$ im ebenen Fall repräsentierten Winkels gegenüber der horizontalen Koordinatenachse in Grad. Links: Undeformierter Ausgangszustand ($\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{I}$). Rechts: Entwicklung von $\boldsymbol{\beta}$ nach 5 % Dehnung.

Die Gesamtbelastung für die dargestellten Studien von 5 % Dehnung wurde in jeweils 500 Lastschritten aufgebracht. Zunächst wurde postuliert, dass Substruktur und Kontinuum im undeformierten Ausgangszustand die gleiche Orientierung haben, d. h., der Abbildungstensor $\boldsymbol{H}$ entspricht anfangs dem Einheitstensor. Ebenso wurde bezüglich der kinematischen Verfestigung Anfangsisotropie vorausgesetzt.

mit

$$\underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \;=\; 4\,\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}\partial \boldsymbol{C}} \tag{47}$$

führt.

Zusammenfassend kann das plastische Teildeformationsgesetz des betrachteten elastoplastischen Modells im Rahmen eines Substrukturansatzes unter Berücksichtigung der Beziehungen (46) sowie (43a), (43b) mit (44a), (44b) und (45) als DAE formuliert werden.

$$\dot{\boldsymbol{T}} \;+\; \lambda \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \;-\; \frac{1}{2}\underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}} \;+\; \lambda\left(\boldsymbol{T}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{C}^{-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\boldsymbol{T}\right) \;=\; \boldsymbol{0} \tag{48a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} \;+\; c_1\,\lambda\,\boldsymbol{X}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{H}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\dot{\boldsymbol{H}}^T\boldsymbol{H}^{-T} \;=\; \boldsymbol{0} \tag{48b}$$

$$\dot{\boldsymbol{T}}^p \;+\; c_2\,\lambda\,\boldsymbol{X}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^p}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{H}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{T}^p + \boldsymbol{T}^p\dot{\boldsymbol{H}}^T\boldsymbol{H}^{-T} \;=\; \boldsymbol{0} \tag{48c}$$

$$\dot{E}_v^p - \lambda\sqrt{\frac{2}{3}\,\boldsymbol{C}^{-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot \boldsymbol{C}^{-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}} \;=\; 0 \tag{48d}$$

$$F\,(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p) \;=\; 0 \tag{48e}$$

Für die Lösung des Anfangswertproblems ist das DAE (48a)-(48e) nach der Zeit zu diskretisieren (vgl. Abschnitt 4). Numerische Untersuchungen zeigen (siehe Abschnitt 5), dass die damit im Zusammenhang stehende Ermittlung des aktuellen Spannungstensors auf der Basis einer Addition von Spannungsinkrementen bei größeren Lastschrittweiten gegenüber der konsistenten Nutzung der nichtlinearen Beziehung (25) zu ungenauen Ergebnissen führt. Als Alternative wurde somit von Bucher [9] der Ersatz von (48a) im Deformationsgesetz der Elastoplastizität durch das assoziierte Fließgesetz (35) vorgeschlagen. Zur numerischen Gewährleistung der Symmetrie des plastischen Verzerrungsmaßes $\boldsymbol{C}^p$ wird dabei zunächst die Regel

$$\dot{\boldsymbol{C}}^{p-1} \;=\; \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{C}}^{p-1} + \dot{\boldsymbol{C}}^{p-\mathrm{T}}\right) \;=\; -\lambda\left(\boldsymbol{C}^{-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{C}^{p-1} + \boldsymbol{C}^{p-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{C}^{-1}\right) \tag{49}$$

genutzt, womit sich eine alternative Formulierung des DAE (48a)-(48e) ergibt.

$$\dot{\boldsymbol{C}}^{p-1} + \lambda \left(\boldsymbol{C}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \boldsymbol{C}^{p-1} + \boldsymbol{C}^{p-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \boldsymbol{C}^{-1} \right) = \boldsymbol{0} \tag{50a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} + c_1 \lambda \boldsymbol{X} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{X} + \boldsymbol{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} \dot{\boldsymbol{H}}^{T} \boldsymbol{H}^{-T} = \boldsymbol{0} \tag{50b}$$

$$\dot{\boldsymbol{T}}^{p} + c_2 \lambda \boldsymbol{X} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^{p}} \boldsymbol{X} + \boldsymbol{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{T}^{p} + \boldsymbol{T}^{p} \dot{\boldsymbol{H}}^{T} \boldsymbol{H}^{-T} = \boldsymbol{0} \tag{50c}$$

$$\dot{E}_v^p - \lambda \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{C}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot \boldsymbol{C}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}} = 0 \tag{50d}$$

$$F(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^{p}) = 0 \tag{50e}$$

Bei bestimmten Aufgaben ist es zweckmäßig, anstelle des plastischen Rechts-Cauchy-Green-Tensors (15) direkt über den plastischen Teildeformationsgradienten zu verfügen, der ohne Nebenbedingungen nicht eindeutig aus $\boldsymbol{C}^p$ abgeleitet werden kann. Entsprechende Formulierungen der konstitutiven Beziehungen werden seit mehreren Dekaden untersucht. So verweist beispielsweise Lubliner [57] darauf, dass bereits Mandel [59] den Teildeformationsgradienten $\boldsymbol{F}^p$ in die Liste der unabhängigen Variablen für das Materialmodell aufnahm. Zur Herleitung einer Evolutionsgleichung für $\boldsymbol{F}^p$ soll zunächst die freie Helmholtz-Energiedichte in ihrer ursprünglichen Formulierung (18) auf der plastischen Zwischenkonfiguration betrachtet werden. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \frac{\partial \bar{\psi}_e}{\partial \widetilde{\boldsymbol{E}}^e} \cdot\cdot \dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}^{e\,\mathrm{T}} + \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_1} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_1^{\,\mathrm{T}} + \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_2} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_2^{\,\mathrm{T}} \\
&= \frac{\partial \bar{\psi}_e}{\partial \widetilde{\boldsymbol{E}}^e} \cdot\cdot \dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}^{e} + \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_1} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_1 - \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_2} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_2 \\
&\underset{(13)}{=} \frac{\partial \bar{\psi}_e}{\partial \widetilde{\boldsymbol{C}}^e} \cdot\cdot \dot{\widetilde{\boldsymbol{C}}}^{e} + \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_1} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_1 - \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_2} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_2 \,.
\end{aligned} \tag{51}$$

Weiterhin folgt aus der Definition des Rechts-Cauchy-Green-Tensors (16):

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{C}} &= \dot{\boldsymbol{F}}^{p\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{C}}^{e} \boldsymbol{F}^{p} + \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}} \dot{\widetilde{\boldsymbol{C}}}^{e} \boldsymbol{F}^{p} + \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{C}}^{e} \dot{\boldsymbol{F}}^{p} \\
&= \dot{\boldsymbol{F}}^{p\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{C}}^{e} \boldsymbol{F}^{p} + \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}} \dot{\widetilde{\boldsymbol{C}}}^{e} \boldsymbol{F}^{p} + \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{C}}^{e} \boldsymbol{F}^{p} \boldsymbol{F}^{p-1} \dot{\boldsymbol{F}}^{p} \\
&= \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}} \dot{\widetilde{\boldsymbol{C}}}^{e} \boldsymbol{F}^{p} + \boldsymbol{C} \boldsymbol{F}^{p-1} \dot{\boldsymbol{F}}^{p} + \dot{\boldsymbol{F}}^{p\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \,,
\end{aligned} \tag{52}$$

elastisch-plastischen Fall. In diesem Zusammenhang ist bei der Interpretation der Kurven, insbesondere in Abbildung 4, zu beachten, dass der Versuch der elastisch-plastischen Modellierung mit ein bzw. zwei Lastschritten zu einer Aktivierung der automatischen Lastschrittverkleinerung geführt hat. Somit sind die dargestellten Abweichungen der Spannungslösung für die entsprechenden Probleme als Unterschätzung zu betrachten, was bei berechtigter Annahme eines stetigen Kurvenverlaufs augenfällig ist.

5.2 Scheibe mit Loch

An dem in der Literatur zur Plastizitätstheorie weit verbreiteten Standardbeispiel der Scheibe mit Loch unter Zugbelastung werden einige Analysen zur Entwicklung des eigentlich orthogonalen Abbildungstensors $\boldsymbol{\beta}$ vorgestellt. Damit kann die Drehung der dem Kontinuum unterliegenden Substruktur beschrieben werden. Die in diesem Zusammenhang beabsichtigte Beschreibung von Texturentwicklungen bedarf im Weiteren ihrer experimentellen Bestätigung.

Aus Symmetriegründen wird von der Scheibe mit Loch unter den Bedingungen des ebenen Verzerrungszustandes lediglich ein Viertel des Querschnitts betrachtet. Die Kantenlänge der quadratischen Kontur beträgt jeweils 100 mm, die mittige Bohrung hat einen Radius von 10 mm. Die Zugbelastung wird am oberen Rand mittels Dirichlet-Randbedingungen (vorgegebene Vertikalverschiebungen) eingeprägt. Geometrie, Vernetzung und Randbedingungen für das Beispiel sind in Abbildung 6 dargestellt.

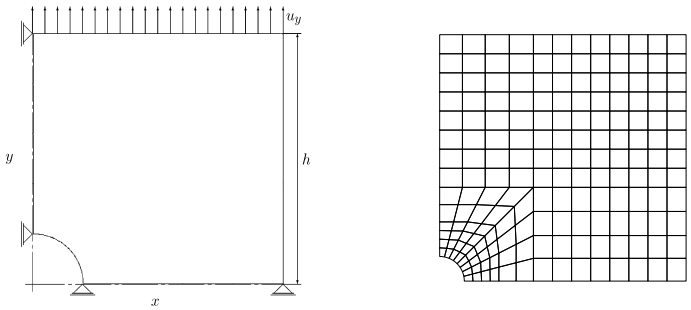


Abbildung 6: Scheibe mit Loch unter Zugbelastung in vertikaler Richtung. Links: Geometrie und Randbedingungen. Rechts: FE-Netz mit 176 Viereck-Elementen vom Serendipity-Typ.

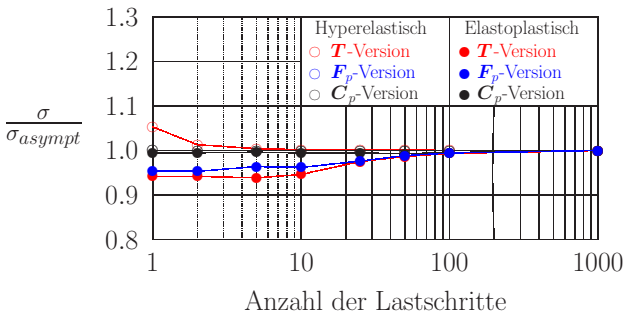


Abbildung 5: Rohr unter Innendruck. Verhältnis der Cauchyschen Axialspannung σ_{33} am Innenrand bei maximaler Belastung zu ihrem asymptotischen Wert in Abhängigkeit von der Anzahl der Lastschritte für Hyperelastizität sowie elastisch-plastisches Materialverhalten unter Berücksichtigung verschiedener Formulierungen des plastischen Teildeformationsgesetzes.

modell Abweichungen von den asymptotischen Werten bis maximal 5 % auftreten. Für alle drei Koordinaten des Spannungstensors ist jedoch offensichtlich, dass die explizite Ermittlung der Spannungen, basierend auf dem hyperelastischen Teildeformationsgesetz (25), (naturgemäß) deutliche Vorteile gegenüber der Addition von Spannungsinkrementen besitzt. Die explizite Spannungsberechnung wird bei den Versionen mit Evolutionsgleichungen für plastische Verzerrungsvariablen praktiziert (vgl. (64b) bzw. (64c)). Im rein elastischen Fall ist für diese beiden Varianten des Deformationsgesetzes sogar jeweils ein Lastschritt ausreichend, die Spannungen genügend genau zu berechnen. Dabei erfolgt keine Entwicklung plastischer Variablen, und der Spannungstensor hängt allein von der Kinematik der Gesamtdeformationen ab, die im Verlauf der Newton-Iterationen des Lastinkrements ausiteriert werden. Darüber hinaus ist selbst bei den vergleichsweise geringen Abweichungen bezüglich der Radial- und der Axialspannung auch im elastisch-plastischen Fall die eindeutige Tendenz zu erkennen, dass eine korrekte Spannungsberechnung bei Berücksichtigung der Evolutionsgleichung (64a) im plastischen Teildeformationsgesetz kleinere Lastinkremente erfordert. Hier schneidet zudem die Evolutionsgleichung für das plastische Verzerrungsmaß $\boldsymbol{C}^{p-1}$ gegenüber der für den plastischen Teildeformationsgradienten $\boldsymbol{F}^p$ hinsichtlich aller Koordinaten des Spannungstensors etwas besser ab.

Bei der Analyse der (dominierenden) Umfangsspannung wird der negative Einfluss der Addition von Spannungsinkrementen gegenüber der Verwendung der expliziten Spannungs-Verzerrungs-Funktion (25) auf die Lösungsgenauigkeit besonders deutlich (vgl. Abbildung 4). Das gilt für den rein elastischen sowie den

woraus sich unter Berücksichtigung der Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors folgende Beziehung für die Spannungsleistung ergibt:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}} &= \boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}} \dot{\widetilde{\boldsymbol{C}}}^{e} \boldsymbol{F}^{p} + \boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{C} \boldsymbol{F}^{p-1} \dot{\boldsymbol{F}}^{p} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{F}}^{p\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{F}^{p} \boldsymbol{T} \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}} \cdot\cdot \dot{\widetilde{\boldsymbol{C}}}^{e} + 2\, \boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{C} \boldsymbol{F}^{p-1} \dot{\boldsymbol{F}}^{p} \\ &= \boldsymbol{F}^{p} \boldsymbol{T} \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}} \cdot\cdot \dot{\widetilde{\boldsymbol{C}}}^{e} + 2\, \boldsymbol{T}\boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{F}^{p-1} \dot{\boldsymbol{F}}^{p} . \end{aligned} \tag{53}$$

Der zweite Summand der rechten Seite von Beziehung (53) ist vergleichbar mit einem aus der Literatur bekannten Ansatz

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{F}^{p-1} \dot{\boldsymbol{F}}^{p} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{L}^{p} . \tag{54}$$

Hier werden jedoch der so genannte *Mandelsche Spannungstensor*[2] $\boldsymbol{\Sigma}$ sowie der plastische Geschwindigkeitsgradient $\boldsymbol{L}^p$ konsequent in ihren auf die Ausgangskonfiguration transformierten Formulierungen verwendet.

Nach Einsetzen von (51) sowie (53) in die Clausius-Duhem-Ungleichung (17) ergibt sich wiederum mit einigen zweckmäßigen Umformungen eine Beziehung, die bei der Formulierung von Evolutionsgleichungen für Teilprozesse der betrachteten finiten Elastoplastizität zu erfüllen ist. Im Gegensatz zu (22) wird der elastische Anteil originär auf der plastischen Zwischenkonfiguration betrachtet.

$$\begin{aligned} &- \varrho_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_1} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_1 + \varrho_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial \widehat{\boldsymbol{A}}_2} \cdot\cdot \dot{\widehat{\boldsymbol{A}}}_2 + \boldsymbol{T}\boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{F}^{p-1} \dot{\boldsymbol{F}}^{p} \\ &\qquad - \left\{ \varrho_0 \frac{\partial \bar{\psi}_e}{\partial \widetilde{\boldsymbol{C}}^{e}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{F}^{p} \boldsymbol{T} \boldsymbol{F}^{p\mathrm{T}} \right\} \cdot\cdot \dot{\widetilde{\boldsymbol{C}}}^{e} \;\geq\; 0 \end{aligned} \tag{55}$$

Auf der Basis analoger Überlegungen, wie sie bei der Analyse der Clausius-Duhem-Ungleichung in der Form (22) angestellt wurden, folgt aus (55) eine zu (23) alternative explizite Spannungs-Verzerrungs-Beziehung der Hyperelastizität.

$$\boldsymbol{T} = 2\, \varrho_0\, \boldsymbol{F}^{p-1} \frac{\partial \bar{\psi}_e}{\partial \widetilde{\boldsymbol{C}}^{e}} \boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}} \tag{56}$$

[2] Häufig wird in der Literatur die Definition $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}$ des Mandelschen Spannungstensors angegeben. Hintergrund sind unterschiedliche Regeln für das Ausführen einer mehrfachen Überschiebung von Tensoren. Während dabei hier die Bildung entsprechender Skalarprodukte der Basisvektoren von innen nach außen favorisiert wird, ist in der Literatur vielfach eine andere Reihenfolge dieser Skalarprodukte zu finden: Es wird mit den jeweils ersten (links stehenden) Basisvektoren begonnen und kontinuierlich nach rechts mit den nächsten Basen fortgesetzt. Bei konsequenter Beachtung der jeweiligen Regel und richtiger Behandlung transponierter Tensoren führen beide Vorgehensweisen in der Koordinatenschreibweise erwartungsgemäß auf die gleichen Ergebnisse.

Unter der Annahme, dass $\bar{\psi}_e$ als Tensorfunktion in den Invarianten von $\widetilde{\boldsymbol{C}}^e$ formuliert wird, gilt beispielsweise für die erste Grundinvariante (19):

$$J_1(\widetilde{\boldsymbol{C}}^e) \;=\; \widetilde{\boldsymbol{C}}^e \cdot\cdot\, \widetilde{\boldsymbol{G}}^{-1}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{F}^{p-1}\frac{\partial J_1}{\partial \widetilde{\boldsymbol{C}}^e}\boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}} \;=\; \boldsymbol{F}^{p-1}\widetilde{\boldsymbol{G}}^{-1} \;=\; \boldsymbol{C}^{p-1} \tag{57a}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{C}} \;=\; \boldsymbol{C}^{p-1} \tag{57b}$$

Es kann leicht gezeigt werden, dass analoge Ableitungen bezüglich aller Invarianten (einschließlich der gemischten bei Einbeziehung von Strukturtensoren zur Erfassung elastischer Anisotropien) existieren. Im Ergebnis ist auch die Beziehung (56) wesentlich vereinfacht in Form der klassischen isothermen Hyperelastizität darstellbar.

$$\boldsymbol{T} \;=\; 2\,\varrho_0\,\boldsymbol{F}^{p-1}\frac{\partial \bar{\psi}_e}{\partial \widetilde{\boldsymbol{C}}^e}\boldsymbol{F}^{p-\mathrm{T}} \;=\; 2\,\varrho_0\,\frac{\partial \breve{\psi}_e}{\partial \boldsymbol{C}} \;=\; 2\,\frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}} \tag{58}$$

Nach Eliminierung des hyperelastischen Teildeformationsgesetzes und einigen zweckmäßigen Umformungen (vgl. (27) und (28)) verbleibt von der Clausius-Duhem-Ungleichung (55) die plastische Dissipationsbeziehung.

$$\mathcal{D}^p \;=\; -\,\boldsymbol{\alpha} \cdot\cdot\, \overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_1 \;-\; \boldsymbol{T}^p \cdot\cdot\, \overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_2 \;+\; \boldsymbol{T}\boldsymbol{C} \cdot\cdot\, \boldsymbol{F}^{p-1}\dot{\boldsymbol{F}}^p \;\geq\; 0 \tag{59}$$

Wird auch in diesem Fall, wie oben beschrieben, das Postulat vom Maximum der plastischen Dissipation auf ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung zurückgeführt, kann aus (59) eine Entwicklungsgleichung für den plastischen Teildeformationsgradienten abgeleitet werden.

$$\dot{\boldsymbol{F}}^p \;=\; \lambda\,\boldsymbol{F}^p\boldsymbol{C}^{-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \tag{60}$$

In der Konsequenz liegt somit eine weitere alternative Formulierung des DAE (48a)-(48e) vor.

$$\dot{\boldsymbol{F}}^p \;-\; \lambda\,\boldsymbol{F}^p\boldsymbol{C}^{-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \;=\; \boldsymbol{0} \tag{61a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} \;+\; c_1\,\lambda\,\boldsymbol{X}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{H}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}}\,\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\dot{\boldsymbol{H}}^{T}\boldsymbol{H}^{-T} \;=\; \boldsymbol{0} \tag{61b}$$

$$\dot{\boldsymbol{T}}^p \;+\; c_2\,\lambda\,\boldsymbol{X}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^p}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{H}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}}\,\boldsymbol{T}^p + \boldsymbol{T}^p\dot{\boldsymbol{H}}^{T}\boldsymbol{H}^{-T} \;=\; \boldsymbol{0} \tag{61c}$$

$$\dot{E}^p_v - \lambda\sqrt{\frac{2}{3}\,\boldsymbol{C}^{-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{C}^{-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}} \;=\; 0 \tag{61d}$$

$$F\,(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p) \;=\; 0 \tag{61e}$$

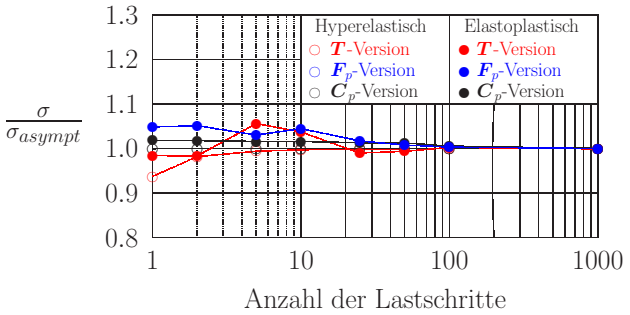


Abbildung 3: Rohr unter Innendruck. Verhältnis der Cauchyschen Radialspannung σ_{11} am Innenrand bei maximaler Belastung zu ihrem asymptotischen Wert in Abhängigkeit von der Anzahl der Lastschritte für Hyperelastizität sowie elastisch-plastisches Materialverhalten unter Berücksichtigung verschiedener Formulierungen des plastischen Teildeformationsgesetzes.

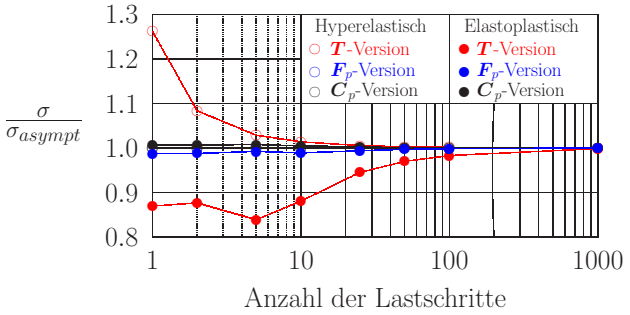


Abbildung 4: Rohr unter Innendruck. Verhältnis der Cauchyschen Umfangsspannung σ_{22} am Innenrand bei maximaler Belastung zu ihrem asymptotischen Wert in Abhängigkeit von der Anzahl der Lastschritte für Hyperelastizität sowie elastisch-plastisches Materialverhalten unter Berücksichtigung verschiedener Formulierungen des plastischen Teildeformationsgesetzes.

Ansätze bezüglich der Lastschrittgröße einschätzen. Die Ergebnisse sind nach Koordinaten des Spannungstensors getrennt in den Abbildungen 3 bis 5 dargestellt.

Es ist zunächst auffällig, dass bezüglich der Radial- und der Axialspannung selbst bei Lastaufbringung in einem Inkrement unabhängig vom konkreten Material-

folgt. Da jedes hyperelastische Deformationsgesetz bei kleinen Verzerrungen das Hookesche Gesetz erfüllen muss, können Zusammenhänge zwischen den Materialparametern des Neo-Hooke-Ansatzes einerseits sowie dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν andererseits abgeleitet werden, die für den Beginn des Deformationsprozesses Gültigkeit haben.

$$c_{10} \approx \frac{E}{4(1+\nu)}, \qquad D_2 \approx \frac{c_{10}}{2}\,\frac{\nu}{1-2\nu} \tag{100}$$

Konkret wurden im betrachteten Beispiel folgende Materialparameter des hyperelastischen (Teil-)Deformationsgesetzes verwendet: $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa und $\nu = 0,3$.

In den Untersuchungen zum elastisch-plastischen Materialverhalten wurden die Fließbedingung nach von Mises

$$F = \left(\hat{\boldsymbol{T}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\boldsymbol{C} \cdot\cdot \left(\hat{\boldsymbol{T}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\boldsymbol{C} - \frac{2}{3}T_F^2 = 0 \tag{101}$$

mit

$$\hat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T} - \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{C}^{-1}, \tag{102a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{\alpha} \cdot\cdot \boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{C}^{-1}, \tag{102b}$$

die isotrope Verfestigung mit der Evolutionsgleichung für die plastische Vergleichsspannung T_F nach Ulbricht und Röhle [85]

$$T_F = T_{F0} + a\left[(E_v^p + \beta)^n + \beta^n\right], \tag{103}$$

sowie die kinematische Verfestigung auf der Basis eines Evolutionsansatzes nach Prager (43a) mit den Materialparametern $T_{Fo} = 400\,\mathrm{MPa}$, $a = 5000\,\mathrm{MPa}$, $n = 0,3$, $c_1 = 500\,\mathrm{MPa}$ und dem Parameter $\beta = 10^{-8}$ angenommen.

Die Gesamtbelastung wurde in einer unterschiedlichen Anzahl von Lastschritten (Verschiebungsinkrementen) aufgebracht. Begonnen wurde mit der Belastung in einem einzigen Schritt bis hin zu deren Unterteilung in 1000 Inkremente. Bezüglich der Spannungslösung wurden dabei, erwartungsgemäß, asymptotische Werte erreicht, d. h., eine weitere Vergrößerung der Lastschrittzahl führt zu keinen Veränderungen. Analysiert wurde das Verhältnis der Koordinaten des Spannungstensors am Innenrand des Rohres bei Maximalbelastung im Vergleich zu den asymptotischen (somit numerisch „richtigen“) Werten im rein elastischen Fall sowie für das elastisch-plastische Materialverhalten bei Berücksichtigung der unterschiedlichen Ansätze (64a)-(64c) für das plastische Teildeformationsgesetz (62a)-(62e). In der Konsequenz lässt sich das Konvergenzverhalten der speziellen

Wie bereits erwähnt, wird eine ähnliche Vorgehensweise in der Literatur breit diskutiert. Im Gegensatz zum hier präsentierten Ansatz wird von anderen Autoren jedoch ausschließlich eine Evolutionsgleichung (Normalenregel) für den plastischen Geschwindigkeitsgradienten $\widetilde{\boldsymbol{L}}^p = \dot{\boldsymbol{F}}^p\boldsymbol{F}^{p-1}$ bezüglich der plastischen Zwischenkonfiguration entwickelt. Während dazu in [19,26,45,46,58,61,64,81,87,88,89] und anderen Arbeiten keine besondere Motivation angegeben ist, wird beispielsweise in [30,65,66,75] ein Zusammenhang mit dem so genannten *exponential map* zur Lösung des Anfangswertproblems bei gleichzeitiger Gewährleistung der plastischen Inkompressibilität angegeben.

Es kann leicht gezeigt werden, dass die Evolutionsgleichung für den plastischen Teildeformationsgradienten bzw. den plastischen Geschwindigkeitsgradienten zwar objektiv, im Allgemeinen aber nicht unabhängig gegenüber Drehungen der Zwischenkonfiguration ist. Haupt und Kersten [35, 48] weisen jedoch am Beispiel der Normalenregel des plastischen Geschwindigkeitsgradienten nach, dass für den Spezialfall einer isoklinen Zwischenkonfiguration diese Unabhängigkeit gewährleistet werden kann (vgl. auch [83]). Zudem ist es nach Sansour et al. [75] diskutabel, ob eine Invarianz der Evolutionsgleichung für den plastischen Teildeformationsgradienten gegenüber beliebigen Drehungen der plastischen Zwischenkonfiguration überhaupt gefordert werden muss, da $\dot{\boldsymbol{F}}^p$ in den Materialfunktionen, wie etwa der Clausius-Duhem-Ungleichung, stets in solchen Kombinationen mit anderen Variablen auftritt, dass der jeweilige Gesamtausdruck die geforderte Unabhängigkeit streng erfüllt.

Zusammenfassend kann das Deformationsgesetz der anisotropen finiten Elastoplastizität unter Berücksichtigung eines Substrukturkonzepts als DAE

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_1 + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p, \lambda) = \boldsymbol{0} \tag{62a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p, \lambda) = \boldsymbol{0} \tag{62b}$$

$$\dot{\boldsymbol{T}}^p + \boldsymbol{Q}_2(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p, \lambda) = \boldsymbol{0} \tag{62c}$$

$$\dot{E}_v^p + Q_3(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p, \lambda) = 0 \tag{62d}$$

$$F\left(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p\right) = 0 \tag{62e}$$

mit

$$\boldsymbol{Q}_1 = c_1\,\lambda\,\boldsymbol{X}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{H}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}}\,\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\dot{\boldsymbol{H}}^T\boldsymbol{H}^{-T} \tag{63a}$$

$$\boldsymbol{Q}_2 = c_2\,\lambda\,\boldsymbol{X}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^p}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{H}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{T}^p + \boldsymbol{T}^p\dot{\boldsymbol{H}}^T\boldsymbol{H}^{-T} \tag{63b}$$

$$Q_3 = -\lambda\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{C}^{-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot \boldsymbol{C}^{-1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}} \tag{63c}$$

angegeben werden. Während die Evolutionsgleichungen zur Ermittlung der Verfestigungsvariablen sowie die Fließbedingung in einer unveränderten, verallgemeinerten Form vorliegen, steht die Variable $\boldsymbol{\mathcal{F}}_1$ wahlweise für $\boldsymbol{T}$ (48a), $\boldsymbol{C}^{p-1}$ (50a) bzw. $\boldsymbol{F}^p$ (61a). Entsprechend wurden für die Beziehung $\boldsymbol{\mathcal{G}}_1 = \dot{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_1 + \boldsymbol{\mathcal{H}}_1 = \boldsymbol{0}$ drei alternative Formulierungen entwickelt.

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1 = \dot{\boldsymbol{T}} + \lambda \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} - \frac{1}{2} \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{C}} + \lambda \left(\boldsymbol{T} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{C}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \boldsymbol{T} \right) \tag{64a}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1 = \dot{\boldsymbol{C}}^{p-1} + \lambda \left(\boldsymbol{C}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \boldsymbol{C}^{p-1} + \boldsymbol{C}^{p-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \boldsymbol{C}^{-1} \right) \tag{64b}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1 = \dot{\boldsymbol{F}}^p - \lambda \boldsymbol{F}^p \boldsymbol{C}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} \tag{64c}$$

Das im Randwertproblem der Strukturmechanik eingebettete Anfangswertproblem besteht nunmehr in der Integration des DAE (62a)-(62e) mit der jeweils zugehörigen Beziehung aus (64a)-(64c), d. h. der Ermittlung von Spannungen und inneren Variablen, basierend auf deren (bekannten) Werten aus der vorhergehenden Gleichgewichtsiteration sowie den aktuellen kinematischen Größen.

4 Numerische Simulation

4.1 Zeitdiskretisierung des Deformationsgesetzes

Für die Lösung des Anfangswertproblems ist zunächst das DAE (62a)-(62e) in geeigneter Weise nach der Zeit zu diskretisieren. Hierzu wird das verallgemeinerte implizite Einschritt-Differenzen-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + (\alpha\, f_{n+1} + (1-\alpha)\, f_n)\, \Delta t \tag{65}$$

für die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = f(t, y) \tag{66}$$

mit dem Zeitschritt Δt

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \tag{67}$$

und dem Wichtungsfaktor α

$$\alpha \in [0,1], \qquad \alpha = \begin{cases} 0,0 & : \text{ Euler vorwärts} \\ 1,0 & : \text{ Euler rückwärts} \\ 0,5 & : \text{ Crank-Nicolson (Trapezregel)} \end{cases}$$

5 Berechnungsbeispiele

5.1 Rohr unter Innendruck

Zunächst sollen am axialsymmetrischen Beispiel eines Rohres unter Innendruck die Genauigkeit sowie das Konvergenzverhalten der Lösung bezüglich des Cauchyschen Spannungstensors für die unterschiedlichen Formulierungen des plastischen Teildeformationsgesetzes in Abhängigkeit von der Lastschrittgröße untersucht werden. Um die Spannungsantwort auf eine äußere mechanische Belastung miteinander vergleichen zu können, wird ausschließlich mit Dirichlet-Randbedingungen gearbeitet. Dazu wird die Innenwand des Rohres mit einem Innendurchmesser von 10 mm und einer Wandstärke von 1 mm um insgesamt 2 mm radial nach außen verschoben. Geometrie, Vernetzung und Randbedingungen sind in Abbildung 2 dargestellt.

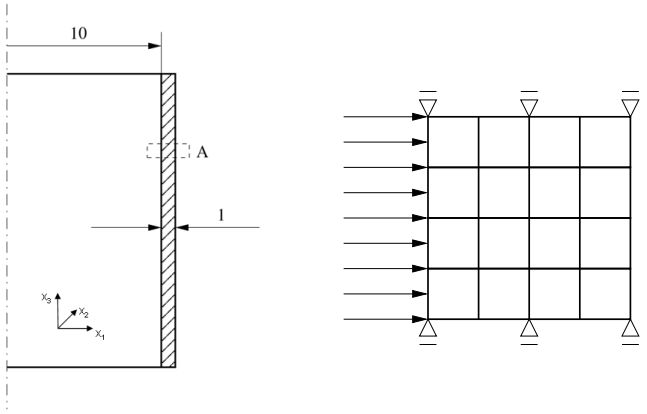


Abbildung 2: Rohr unter Innendruck. Links: Geometrie. Rechts: Ausschnitt A mit FE-Netz (16 Viereck-Elemente vom Serendipity-Typ) und Randbedingungen.

Bei den Analysen wurden der rein elastische sowie der elastisch-plastische Fall betrachtet. Zur Charakterisierung des kompressiblen elastischen Materialverhaltens wurde der modifizierte Neo-Hooke-Ansatz (26) verwendet, woraus unter Berücksichtigung des hyperelastischen Teildeformationsgesetzes (25) für den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor die Beziehung

$$\boldsymbol{T} = c_{10}\, \boldsymbol{C}^{p-1} - 2\,(c_{10} - 2D_2 \ln I_3)\, \boldsymbol{C}^{-1} \tag{99}$$

gilt und der Abbildungstensor $\boldsymbol{H}$ sowie, bei Berücksichtigung der Evolutionsgleichungen (64a) bzw. (64b) im plastischen Teildeformationsgesetz (62a)-(62e), auch der plastische Teildeformationsgradient nicht explizit bekannt sind und sich ohne ergänzende Informationen auch nicht eindeutig ermitteln lassen, ist zur Bestimmung von $\boldsymbol{\beta}$ ein zusätzlicher Iterationsprozess erforderlich.

An dieser Stelle soll nochmals die Aussage aus dem Abschnitt 2 erwähnt werden, dass der Abbildungstensor $\boldsymbol{H}$ basierend auf dem plastischen Spin (7) ermittelt werden soll. Als Grundlage wird die folgende konstitutive Beziehung vorgeschlagen:

$$\boldsymbol{W}_D^p \overset{\text{def}}{=} \overset{\triangle}{\boldsymbol{A}}_2 \underset{(36)}{=} \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^p}\,. \tag{96}$$

Aus dieser Annahme folgt gemeinsam mit der Definition des plastischen Spins (7) die tensorielle Gleichung:

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{H}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}} - \dot{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \;=\; 2\,\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^p}\,. \tag{97}$$

Das System von Differentialgleichungen (97) wird auf der Basis des oben vorgestellten verallgemeinerten impliziten Einschritt-Verfahrens nach der Zeit diskretisiert und das entstehende nichtlineare algebraische Gleichungssystem mit dem Newton-Verfahren iterativ gelöst (zu Details siehe Bucher [9]). Mit dem dann vorliegenden Resultat für $\boldsymbol{H}$ ist es möglich, sowohl den Drehtensor $\boldsymbol{\beta}$ als auch den plastischen Teildeformationsgradienten $\boldsymbol{F}^p$ zu bestimmen. Bei Bucher [9] ist ausführlich dargestellt, wie sich aus der numerischen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^p && \text{(98a)}\\
\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{I} && \text{(98b)}\\
\det \boldsymbol{F}^p &= 1 && \text{(98c)}
\end{aligned}$$

die Koordinaten der gesuchten Tensoren $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{F}^p$ ergeben.

Numerische Untersuchungen haben gezeigt, dass die Jakobi-Matrix des Gleichungssystems (98a)-(98c) in der Regel schlecht konditioniert ist und somit der Newton-Prozess wiederholt nicht zu einer konvergenten Lösung von (98a)-(98c) führt. Diese Beobachtung war der Ausschlag gebende Grund, die Evolutionsgleichung für den plastischen Teildeformationsgradienten $\boldsymbol{F}^p$ in das Deformationsgesetz aufzunehmen. Dann können die Koordinaten des Abbildungstensors $\boldsymbol{\beta}$ nach der Lösung des Differentialgleichungssystems (97) unmittelbar aus der Beziehung (95) im Sinne einer Matrizenmultiplikation ermittelt werden (vgl. auch Bucher et al. [12]).

genutzt (vgl. auch [9, 13, 28, 29, 32, 62]). Diese Prozedur führt bezüglich des DAE (62a)-(62e) auf dessen nach der Zeit diskretisierten Form.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{F}}_{1n+1} - \boldsymbol{\mathcal{F}}_{1n} + \left[\alpha\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_{1n+1} + (1-\alpha)\,\boldsymbol{\mathcal{H}}_{1n}\right]\Delta t &= \boldsymbol{0} && \text{(68a)}\\
\boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n + \left[\alpha\,\boldsymbol{Q}_{1n+1} + (1-\alpha)\,\boldsymbol{Q}_{1n}\right]\Delta t &= \boldsymbol{0} && \text{(68b)}\\
\boldsymbol{T}^p_{n+1} - \boldsymbol{T}^p_n + \left[\alpha\,\boldsymbol{Q}_{2n+1} + (1-\alpha)\,\boldsymbol{Q}_{2n}\right]\Delta t &= \boldsymbol{0} && \text{(68c)}\\
E^p_{vn+1} - E^p_{vn} + \left[\alpha\,Q_{3n+1} + (1-\alpha)\,Q_{3n}\right]\Delta t &= 0 && \text{(68d)}\\
F_{n+1}(\boldsymbol{T}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}, \boldsymbol{T}^p_{n+1}) &= 0 && \text{(68e)}
\end{aligned}$$

Die Teilbeziehung (68a) dieses zeitdiskretisierten Systems liegt für die untersuchten alternativen Formulierungen in der entsprechenden Struktur vor.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}_{n+1} - \boldsymbol{T}_n\\
&+\left(\alpha\lambda_{n+1}\underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}}_{n+1} \cdot\cdot\, \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n+1} + (1-\alpha)\lambda_n \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}}_n \cdot\cdot\, \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n}\right)\Delta t\\
&-\frac{1}{2}\underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}}_{n+1} \cdot\cdot\, \Delta \boldsymbol{C}_{n+1} - \frac{1}{2}(1-\alpha)\left(\underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}}_n - \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}}_{n+1}\right) \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{C}}_n \Delta t\\
&+\alpha\lambda_{n+1}\left(\boldsymbol{T}_{n+1}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n+1}\,\boldsymbol{C}^{-1}_{n+1} + \boldsymbol{C}^{-1}_{n+1}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n+1}\,\boldsymbol{T}_{n+1}\right)\Delta t\\
&+(1-\alpha)\lambda_n\left(\boldsymbol{T}_{n}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n}\,\boldsymbol{C}^{-1}_{n} + \boldsymbol{C}^{-1}_{n}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n}\,\boldsymbol{T}_{n}\right)\Delta t \;=\; \boldsymbol{0} \quad \text{(69a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}^{p-1}_{n+1} - \boldsymbol{C}^{p-1}_n\\
&+\alpha\lambda_{n+1}\left(\boldsymbol{C}^{-1}_{n+1}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n+1}\,\boldsymbol{C}^{p-1}_{n+1} + \boldsymbol{C}^{p-1}_{n+1}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n+1}\,\boldsymbol{C}^{-1}_{n+1}\right)\Delta t\\
&+(1-\alpha)\lambda_n\left(\boldsymbol{C}^{-1}_{n}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n}\,\boldsymbol{C}^{p-1}_{n} + \boldsymbol{C}^{p-1}_{n}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n}\,\boldsymbol{C}^{-1}_{n}\right)\Delta t \;=\; \boldsymbol{0} \quad \text{(69b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}^p_{n+1} - \boldsymbol{F}^p_n\\
&-\alpha\lambda_{n+1}\,\boldsymbol{F}^p_{n+1}\boldsymbol{C}^{-1}_{n+1}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n+1}\Delta t - (1-\alpha)\lambda_n\,\boldsymbol{F}^p_n\boldsymbol{C}^{-1}_n\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}\bigg|_{n}\Delta t \;=\; \boldsymbol{0} \quad \text{(69c)}
\end{aligned}$$

4.2 Lösung des Anfangswertproblems

Nach der Zeitdiskretisierung nehmen die konstitutiven Beziehungen die Form einse Systems nichtlinearer algebraischer Gleichgungen (68a)-(68e) an. Es enthält die (unbekannten) Werte der abhängigen Variablen zum Zeitpunkt t_{n+1} sowie deren Anfangswerte zum Zeitpunkt t_n (diese Zeitpunkte repräsentieren Ende und Beginn der aktuellen Gleichgewichtsiteration). Für eine übersichtlichere Betrachtung wird dieses System in der symbolischen Darstellung

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{n+1} \;=\; \boldsymbol{\mathcal{G}}\left(\boldsymbol{z}_{n+1}\right) = \boldsymbol{0} \tag{70}$$

zusammengefasst. Je nach alternativer Formulierung des DAE enthält der Variablenvektor $\boldsymbol{z}$ unterschiedliche Größen.

$$(48a) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{z} \;=\; \left(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p, E_v^p, \lambda_{n+1}\right)^{\mathrm{T}} \tag{71a}$$

$$(50a) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{z} \;=\; \left(\boldsymbol{C}^{p-1}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p, E_v^p, \lambda_{n+1}\right)^{\mathrm{T}} \tag{71b}$$

$$(61a) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{z} \;=\; \left(\boldsymbol{F}^p, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}^p, E_v^p, \lambda_{n+1}\right)^{\mathrm{T}} \tag{71c}$$

Für die Ermittlung des Vektors $\boldsymbol{z}_{n+1}$ der Unbekannten als Lösung des Gleichungssystems (70) wird das Newton-Verfahren genutzt, welches auf folgende iterative Prozedur führt:

$$\boldsymbol{z}_{n+1}^{i+1} \;=\; \boldsymbol{z}_{n+1}^{i} \;-\; \left(\nabla_{\boldsymbol{z}_{n+1}^{i}} \boldsymbol{\mathcal{G}}\right)^{-1} \boldsymbol{\mathcal{G}}_{n+1}^{i}\,. \tag{72}$$

Letztlich resultiert das Anfangswertproblem in der wiederholten Lösung eines Systems linearer algebraischer Gleichungen zur iterativen Ermittlung der Inkremente des Variablenvektors $\boldsymbol{z}$ in jedem Integrationsstützpunkt des FE-Netzes[3].

$$\left(\nabla_{\boldsymbol{z}_{n+1}^{i}} \boldsymbol{\mathcal{G}}\right) \Delta \boldsymbol{z}_{n+1}^{i+1} \;=\; -\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_{n+1}^{i} \tag{73}$$

Die Jakobi-Matrix $\nabla \boldsymbol{\mathcal{G}}$ der Ableitungen des nichtlinearen Gleichungssystems (68a)-(68e) nach den abhängigen Variablen hat je nach alternativer Formulierung die

[3] Im Rahmen einer fehlergesteuerten adaptiven Strategie zur Netzverfeinerung bzw. -vergröberung wird das Anfangswertproblem zusätzlich in den Knoten des FE-Netzes gelöst. Diese Vorgehensweise weist Vorteile bei der Übertragung der Geschichtsvariablen vom alten auf das neue Netz auf(vgl. [14, 15, 16]).

Daraus lässt sich analog zur oben praktizierten Vorgehensweise die konsistente Materialtangente ableiten.

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{E}} \;=\; 2\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{C}} \;=\; \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \;+\; 2\,\underset{\boldsymbol{4}}{\bar{\boldsymbol{D}}} \cdot\cdot\, \frac{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}{\partial \boldsymbol{F}^p} \cdot\cdot\, \frac{d\boldsymbol{F}^p}{d\boldsymbol{C}} \tag{92}$$

Hier sind die Tensoren $\underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}}$ und $\underset{\boldsymbol{4}}{\bar{\boldsymbol{D}}}$ wie auch die Koordinaten des vierstufigen Tensors $\partial \boldsymbol{C}^{p-1}/\partial \boldsymbol{F}^p$ (vgl. dazu (77)) bekannt. Analog zu den vorher beschriebenen Formulierungen des Deformationsgesetzes wird für die Ermittlung des noch unbekannten vierstufigen Tensors $d\boldsymbol{F}^p/d\boldsymbol{C}$ das Gleichungssystem (68a)-(68e) mit (69c) implizit nach dem rechten Cauchy-Green-Tensor $\boldsymbol{C}$ differenziert (siehe (89)). Der Ausdruck $d\boldsymbol{z}/d\boldsymbol{C}$ enthält dann den gesuchten Tensor $d\boldsymbol{F}^p/d\boldsymbol{C}$. Die Lösung des Gleichungssystems (89) führt wie oben auf eine Matrizenmultiplikation mit der aus der Integration des Deformationsgesetzes in invertierter Form vorliegenden Jakobi-Matrix $\nabla \boldsymbol{\mathcal{G}}$. Unter Berücksichtigung der partiellen Ableitung der Beziehung (69c) nach $\boldsymbol{C}$ in Koordinatenschreibweise

$$\bar{M}^i{}_J{}^{KL} \;=\; -\,\alpha\,\lambda\,\Delta t\,\left(F^p\right)^i_M \left(C^{-1}\right)^{MK} \left(C^{-1}\right)^{LN} \frac{\partial F}{\partial T^{JN}} \tag{93}$$

lässt sich eine ausführlicherere Darstellung des gesamten Lösungsvektors angeben.

$$\begin{pmatrix} \frac{d\,\boldsymbol{F}^p}{d\,\boldsymbol{C}}\big|_{n+1} \\ \frac{d\,\boldsymbol{\alpha}}{d\,\boldsymbol{C}}\big|_{n+1} \\ \frac{d\,\boldsymbol{T}^p}{d\,\boldsymbol{C}}\big|_{n+1} \\ \frac{d\,E_v^p}{d\,\boldsymbol{C}}\big|_{n+1} \\ \frac{d\,\lambda}{d\,\boldsymbol{C}}\big|_{n+1} \end{pmatrix} \;=\; \left(\nabla_{\boldsymbol{z}_{n+1}} \boldsymbol{\mathcal{G}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \underset{\boldsymbol{4}}{\bar{\boldsymbol{M}}}_{n+1} \\ \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{0}} \\ \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{0}} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{94}$$

4.4 Berechnung des Abbildungstensors zwischen Substruktur- und plastischer Zwischenkonfiguration

Wie oben erwähnt, unterscheiden sich die Substruktur- und die plastische Zwischenkonfiguration durch eine reine Drehung voneinander. In diesem Zusammenhang wird die Hypothese aufgestellt, dass der zugehörige makroskopische Abbildungstensor $\boldsymbol{\beta}$ (vgl. Abbildung 1) geeignet ist, lokal die Veränderung von Orientierungen der Mikrostruktur in Form von Texturentwicklungen zu beschreiben. Da die Variable $\boldsymbol{\beta}$ kein Bestandteil des Lösungsvektors für das Anfangswertproblem ist, muss sie in einem numerischen Postprocessing aus der Kinematik und den inneren Variablen gewonnen werden. Da nach (5)

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \;=\; \boldsymbol{\beta}^{-1} \;=\; \boldsymbol{H}\,\boldsymbol{F}^{p-1} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\beta} \;=\; \boldsymbol{F}^p\,\boldsymbol{H}^{-1} \tag{95}$$

Weitere Details zu dieser Vorgehensweise einer numerischen Ermittlung der konsistenten Materialtangente sind wiederum bei Bucher [9] angegeben. Das trifft ebenso auf den Fall zu, dass das zeitdiskretisierte Deformationsgesetz (68a)-(68e) unter Berücksichtigung der Evolutionsgleichung für das plastische Verzerrungsmaß $\boldsymbol{C}^{p-1}$ (69b) definiert ist. Ausgangspunkt für die Bestimmung der konsistenten Materialtangente ist dann das hyperelastische Teildeformationsgesetz (25). Zunächst wird dessen vollständiges Differential gebildet:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{T} &= 2\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}\partial \boldsymbol{C}} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{C} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}\left(2\frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}}\right) \cdot\cdot\, d\boldsymbol{C}^{p-1} \\ &= \frac{1}{2}\underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{C} + \underset{\boldsymbol{4}}{\bar{\boldsymbol{D}}} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{C}^{p-1}. \end{aligned} \tag{87}$$

Ausgehend von dieser Beziehung lautet die konsistente Materialtangente:

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{E}} = 2\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{C}} = \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} + 2\,\underset{\boldsymbol{4}}{\bar{\boldsymbol{D}}} \cdot\cdot\, \frac{d\boldsymbol{C}^{p-1}}{d\boldsymbol{C}} \tag{88}$$

mit den bekannten Tensoren $\underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}}$ und $\underset{\boldsymbol{4}}{\bar{\boldsymbol{D}}}$. Zur Ermittlung des noch unbekannten vierstufigen Tensors $d\boldsymbol{C}^{p-1}/d\boldsymbol{C}$ wird das Gleichungssystem (68a)-(68e) mit (69b) implizit nach dem rechten Cauchy-Green-Tensor $\boldsymbol{C}$ differenziert.

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\mathcal{G}}}{d\boldsymbol{C}}\right|_{n+1} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}}{\partial \boldsymbol{C}}\right|_{n+1} + \left(\nabla_{\boldsymbol{z}_{n+1}} \boldsymbol{\mathcal{G}}\right) \left.\frac{d\boldsymbol{z}}{d\boldsymbol{C}}\right|_{n+1} = \boldsymbol{0} \tag{89}$$

Nunmehr enthält der Ausdruck $d\boldsymbol{z}/d\boldsymbol{C}$ den gesuchten Tensor $d\boldsymbol{C}^{p-1}/d\boldsymbol{C}$. Die Lösung des Gleichungssystems (89) stellt sich wiederum als einfache Matrizenmultiplikation mit der aus der Integration des Deformationsgesetzes in invertierter Form vorliegenden Jakobi-Matrix $\nabla \boldsymbol{\mathcal{G}}$ dar.

$$\left.\frac{d\boldsymbol{z}}{d\boldsymbol{C}}\right|_{n+1} = -\left(\nabla_{\boldsymbol{z}_{n+1}} \boldsymbol{\mathcal{G}}\right)^{-1} \left.\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}}{\partial \boldsymbol{C}}\right|_{n+1} \tag{90}$$

Ist das zeitdiskretisierte Deformationsgesetz (68a)-(68e) unter Berücksichtigung der Evolutionsgleichung für den plastischen Teildeformationsgradienten $\boldsymbol{F}^p$ (69c) formuliert, so gilt für das vollständige Differential des hyperelastischen Teildeformationsgesetz (25):

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{T} &= 2\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}\partial \boldsymbol{C}} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{C} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{F}^p}\left(2\frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}}\right) \cdot\cdot\, d\boldsymbol{F}^p \\ &= \frac{1}{2}\underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{C} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}\left(2\frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}}\right) \cdot\cdot\, \frac{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}{\partial \boldsymbol{F}^p} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{F}^p \\ &= \frac{1}{2}\underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{D}} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{C} + \underset{\boldsymbol{4}}{\bar{\boldsymbol{D}}} \cdot\cdot\, \frac{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}{\partial \boldsymbol{F}^p} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{F}^p. \end{aligned} \tag{91}$$

folgende allgemeine Struktur:

$$\begin{pmatrix} \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{M}_{TT} & \boldsymbol{M}_{T\alpha} & \boldsymbol{M}_{TT^p} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{T\lambda} \\ \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{T}}\Delta t & \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{I}} + \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Delta t & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{T}^p}\Delta t & \boldsymbol{0} & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \lambda}\Delta t \\ \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \boldsymbol{T}}\Delta t & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Delta t & \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{I}} + \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \boldsymbol{T}^p}\Delta t & \boldsymbol{0} & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \lambda}\Delta t \\ \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \boldsymbol{T}}\Delta t & \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Delta t & \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \boldsymbol{T}^p}\Delta t & 1 & \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \lambda}\Delta t \\ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}} & \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} & \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^p} & \frac{\partial F}{\partial E_v^p} & 0 \end{pmatrix} \tag{74a}$$

$$\begin{pmatrix} \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{M}_{C^pC^p} & \boldsymbol{M}_{C^p\alpha} & \boldsymbol{M}_{C^pT^p} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{C^p\lambda} \\ \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}\Delta t & \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{I}} + \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Delta t & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{T}^p}\Delta t & \boldsymbol{0} & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \lambda}\Delta t \\ \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}\Delta t & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Delta t & \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{I}} + \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \boldsymbol{T}^p}\Delta t & \boldsymbol{0} & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \lambda}\Delta t \\ \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}\Delta t & \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Delta t & \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \boldsymbol{T}^p}\Delta t & 1 & \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \lambda}\Delta t \\ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}} & \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} & \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^p} & \frac{\partial F}{\partial E_v^p} & 0 \end{pmatrix} \tag{74b}$$

$$\begin{pmatrix} \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{M}_{F^pF^p} & \boldsymbol{M}_{F^p\alpha} & \boldsymbol{M}_{F^pT^p} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{F^p\lambda} \\ \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{F}^p}\Delta t & \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{I}} + \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Delta t & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \boldsymbol{T}^p}\Delta t & \boldsymbol{0} & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial \lambda}\Delta t \\ \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \boldsymbol{F}^p}\Delta t & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Delta t & \underset{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{I}} + \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \boldsymbol{T}^p}\Delta t & \boldsymbol{0} & \alpha\frac{\partial \boldsymbol{Q}_2}{\partial \lambda}\Delta t \\ \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \boldsymbol{F}^p}\Delta t & \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Delta t & \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \boldsymbol{T}^p}\Delta t & 1 & \alpha\frac{\partial Q_3}{\partial \lambda}\Delta t \\ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{F}^p} & \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} & \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}^p} & \frac{\partial F}{\partial E_v^p} & 0 \end{pmatrix} \tag{74c}$$

Die in (74a) und (74b) enthaltenen Teilmatrizen sind bei Bucher [9] in ihrer allgemeinen Form ausführlich dargestellt. Dabei wurde zur numerischen Realisierung der Struktur (74b) an den relevanten Stellen von dem Zusammenhang

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Upsilon}}{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Upsilon}}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot\, \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Upsilon}}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot\, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}\left(2\frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{C}}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{\Upsilon}}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot\, \underset{\boldsymbol{4}}{\bar{\boldsymbol{D}}} \tag{75}$$

Gebrauch gemacht, in welchem $\boldsymbol{\Upsilon}$ eine beliebige skalar- oder tensorwertige Variable sein kann. Folglich lassen sich alle in (74b) auftretenden Differentialquotienten auf Ableitungen zurückführen, welche in (74a) enthalten sind. Teilweise müssen sie doppelt mit dem vierstufigen Tensor $\bar{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{4}}$ überschoben werden. Letzterer ergibt sich aus der zweifachen Differentiation des elastischen Anteils der freien Helmholtz-Energiedichte nach dem Rechts-Cauchy-Green Tensor der Gesamtverzerrungen $\boldsymbol{C}$ und dem plastischen Verzerrungsmaß $\boldsymbol{C}^{p-1}$. Analoge Überlegungen führen mit der Beziehung

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Upsilon}}{\partial \boldsymbol{F}^p} = \frac{\partial \boldsymbol{\Upsilon}}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{F}^p} = \frac{\partial \boldsymbol{\Upsilon}}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}} \cdot\cdot \frac{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}{\partial \boldsymbol{F}^p} = \frac{\partial \boldsymbol{\Upsilon}}{\partial \boldsymbol{T}} \cdot\cdot \bar{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{4}} \cdot\cdot \frac{\partial \boldsymbol{C}^{p-1}}{\partial \boldsymbol{F}^p} \tag{76}$$

zu einer Vereinfachung der Jakobi-Matrix (74c) hinsichtlich ihrer numerischen Realisierung für den Fall, dass bereits eine Programmversion mit der Matrix (74a) existiert. Dabei gilt für die Ableitung des plastischen Verzerrungsmaßes $\boldsymbol{C}^{p-1}$ nach dem plastischen Teildeformationsgradienten in Koordinatenschreibweise:

$$\frac{\partial (C^{p-1})^{IJ}}{\partial (F^p)^{\alpha}_{L}} = -(C^{p-1})^{IM} \left[\delta^{L}_{M} (F^p)^{\alpha}_{N} + (F^p)^{\alpha}_{M} \delta^{L}_{N}\right] (C^{p-1})^{NJ} \tag{77}$$

mit dem Kroneckersymbol $\boldsymbol{\delta}$ (zweistufiger Einheitstensor).

Zur numerischen Lösung von (73) findet ein direktes Verfahren nach Gauß mit vollständiger Pivotelementsuche Anwendung. Enthält das Gleichungssystem die Beziehung (69a), wird jedoch zunächst mit

$$\boldsymbol{T}^0_{n+1} = \boldsymbol{T}_n + \frac{1}{2} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{4}\,n+1} \cdot\cdot \Delta \boldsymbol{C}_{n+1} \tag{78}$$

ein elastischer Prediktor ausgeführt. Fällt der Elastizitätstest

$$F\left(\boldsymbol{T}^0_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{T}^p_n\right) < 0 \tag{79}$$

positiv aus, ist mit (78) bereits die neue Spannungslösung gegeben. Eine Veränderung der inneren Variablen erfolgt in diesem Fall für den aktuellen Lastschritt nicht. Erweist sich das Materialverhalten jedoch als elastisch-plastisch, werden die Spannungen, inneren Variablen und der plastische Multiplikator nach dem Iterationsschema (72) korrigiert. Als Startwert für diesen Prozess findet der Vektor

$$\boldsymbol{z}^0_{n+1} = \left(\boldsymbol{T}^0_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{T}^p_n, (E^p_v)_n, \lambda_n\right)^{\mathrm{T}} \tag{80}$$

Verwendung. Der Iterationsvorgang wird beendet, wenn die euklidische Norm der rechten Seite von (73)

$$\|\boldsymbol{\mathcal{G}}^i_{n+1}\|^2 = \left(\boldsymbol{\mathcal{G}}^i_{n+1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathcal{G}}^i_{n+1} \tag{81}$$

eine vorgegebene Abbruchschranke unterschreitet. Für die Berechnung des plastischen Verzerrungsmaßes $(\boldsymbol{C}^{p-1})^{i+1}_{n+1}$ (beeinflusst sowohl die Materialtangente als auch den Abbildungstensor $\boldsymbol{H}$) wurden zwei unterschiedliche iterative Algorithmen entwickelt, die bei Bucher [9] ausführlich diskutiert werden.

Gelten in dem nach der Zeit diskretisierten DAE die Beziehungen (69b) bzw. (69c), können die Spannungen in jedem lokalen Iterationsschritt $i+1$ explizit aus dem hyperelastischen Teildeformationsgesetz

$$\boldsymbol{T}^{i+1}_{n+1} = 2 \frac{\partial \psi_e(\boldsymbol{C}_{n+1}(\boldsymbol{C}^{p-1})^{i+1}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{C}_{n+1}}. \tag{82}$$

ermittelt werden. In beiden Fällen ist der elastische Prediktor mit

$$\boldsymbol{T}^0_{n+1} = 2 \frac{\partial \psi_e(\boldsymbol{C}_{n+1}(\boldsymbol{C}^{p-1})_n)}{\partial \boldsymbol{C}_{n+1}} \tag{83}$$

gegeben. Der Elastizitätstest sowie gegebenenfalls eine plastische Korrektur folgen wiederum den oben beschriebenen Algorithmen.

4.3 Konsistente Materialtangente

Zur Generierung der Elementsteifigkeitsmatrizen für das linearisierte FE-Gleichungssystem wird die konsistente Materialmatrix $d\boldsymbol{T}/d\boldsymbol{E}$ benötigt, die eine quadratische Konvergenz der Newton-Raphson-Iterationen im Lastschritt in der Nähe des Gleichgewichts gewährleistet. Aus der impliziten Differentiation des aus-iterierten Gleichungssystems (68a)-(68e) unter Berücksichtigung der Abhängigkeiten

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{n+1} = \boldsymbol{\mathcal{G}}\left(\boldsymbol{z}_{n+1}(\boldsymbol{E}_{n+1}), \boldsymbol{E}_{n+1}\right) = \boldsymbol{0} \tag{84}$$

nach dem Tensor der Gesamtverzerrungen $\boldsymbol{E}$ folgt die Beziehung

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\mathcal{G}}}{d\boldsymbol{E}}\right|_{n+1} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}}{\partial \boldsymbol{E}}\right|_{n+1} + \left(\nabla_{\boldsymbol{z}_{n+1}} \boldsymbol{\mathcal{G}}\right) \left.\frac{d\boldsymbol{z}}{d\boldsymbol{E}}\right|_{n+1} = \boldsymbol{0}\,. \tag{85}$$

Wenn das Anfangswertproblem die zeitdiskretisierte Evolutionsgleichung (69a) betrifft, kann die konsistente Materialtangente durch die einfache Matrizenmultiplikation

$$\left.\frac{d\boldsymbol{z}}{d\boldsymbol{E}}\right|_{n+1} = -\left(\nabla_{\boldsymbol{z}_{n+1}} \boldsymbol{\mathcal{G}}\right)^{-1} \left.\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{G}}}{\partial \boldsymbol{E}}\right|_{n+1} \tag{86}$$

ermittelt werden, da in diesem Fall der Ausdruck $d\boldsymbol{z}/d\boldsymbol{E}$ den vierstufigen Tensor $d\boldsymbol{T}/d\boldsymbol{E}$ enthält und die Jakobi-Matrix $\nabla \boldsymbol{\mathcal{G}}$ bereits aus der Integration des Deformationsgesetzes in invertierter Form vorliegt.