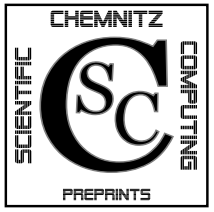
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Arnd Meyer Peter Steinhorst

Betrachtungen zur Spektraläquivalenz für das Schurkomplement im Bramble-Pasciak-CG bei piezoelektrischen Problemen

CSC/07-08



Chemnitz Scientific Computing Preprints

Chemnitz Scientific Computing Preprints – ISSN 1864-0087

Impressum:

Chemnitz Scientific Computing Preprints — ISSN 1864-0087

(1995–2005: Preprintreihe des Chemnitzer SFB393)

Herausgeber:
Professuren für
Numerische und Angewandte Mathematik
an der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Chemnitz

Postanschrift:
TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
09107 Chemnitz
Sitz:
Reichenhainer Str. 41, 09126 Chemnitz

http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Chemnitz Scientific Computing Preprints

Arnd Meyer Peter Steinhorst

Betrachtungen zur Spektraläquivalenz für das Schurkomplement im Bramble-Pasciak-CG bei piezoelektrischen Problemen

CSC/07-08

Zusammenfassung

Der Einsatz der Finite-Element-Methode bei linearen piezoelektrischen Problemen führt auf eine Systemmatrix der Struktur

$$\begin{pmatrix} C & B \\ B^T & -K \end{pmatrix}$$

mit positiv definiten Blockmatrizen C und K. Zur Lösung indefiniter Gleichungssysteme, die diese symmetrische Blockstruktur besitzen, kann der Bramble–Pasciak–CG eingesetzt werden. Entscheidend für eine schnelle Lösung ist es dabei, gute Vorkonditionierer für den Block C sowie für ein inexaktes Schurkomplement zu finden. Nachfolgend wird das Schurkomplement auf Spektraläquivalenz zur Blockmatrix K untersucht, für welche gute Vorkonditionierer bekannt sind.

Abstract

Using the Finite-Element-Method with linear piezoelectric problems leads to a linear system of the structure

$$\begin{pmatrix} C & B \\ B^T & -K \end{pmatrix}$$

with symmetric positive definite matrix blocks C and K. The Bramble–Pasciak–CG is an possible solver for indefinite linear systems of equations with this special symmetric block structure. Essential for fast solving are good preconditioners for the block C as well as for an inexact Schur complement. In the following, the Schur complement is examined to spectral equivalence with the matrix K. For K quite good preconditioners are known.

CSC/07-08 ISSN 1864-0087 Oktober 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Schurkomplement mit exakter Matrix C **2**
2.1 Obere Abschätzung 2
2.2 Untere Abschätzung 3

3 Inexaktes Schurkomplement mit Vorkonditionierer C_0 **5**

4 Theoretisches Resultat **5**

5 Numerische Beispiele **6**

Author's addresses:

Arnd Meyer
Peter Steinhorst
TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik, Professur Numerische Analysis
D-09107 Chemnitz

`http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/`

email:
a.meyer@mathematik.tu-chemnitz.de
peter.steinhorst@mathematik.tu-chemnitz.de

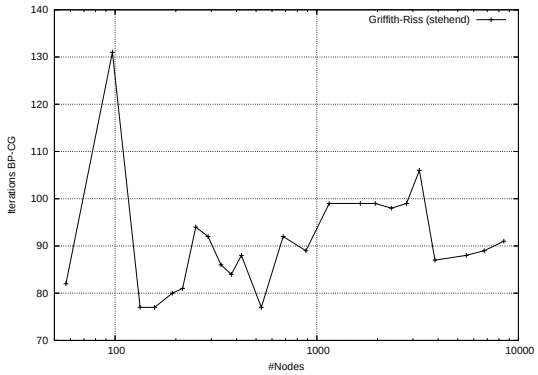


Abbildung 5: Iterationszahlen versus Knotenanzahl im Griffith-Riss-Beispiel

Literatur

[1] J.H. Bramble and J.E. Pasciak: A Preconditioning Technique for Indefinite Systems resulting from Mixed Approximations of Elliptic Problems. *Math. Comput.*, 50(181):1-17, 1988.

[2] J.H. Bramble, J.E. Pasciak and J. Xu: Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comp.* 55:1-22, 1990

[3] U. Groh: Entwicklung von Randelementen zur elektromechanischen Festigkeitsanalyse von piezoelektrischen Strukturen mit Defekten. Forschungsbericht zum DFG-Vorhaben KU929/4-1/2, IMFD, TU Bergakademie Freiberg, 2002.

[4] A. Meyer and T. Steidten: Improvements and Experiments on the Bramble-Pasciak Type CG for Mixed Problems in Elasticity. Preprint SFB393/01-13, TU Chemnitz, 2001.

[5] P. Oswald: Multilevel Finite Element Approximation. *Teubner*, Stuttgart, 1994

[6] M. Scherzer and M. Kuna: Combined analytical and numerical solution of 2D interface corner configurations between dissimilar piezoelectric materials. Part I: Asymptotic eigenfunction expansions. University of Mining and Technology Freiberg, 2003.

[7] H. Yserentant: Two preconditioners based on the multi-level splitting of finite element spaces.

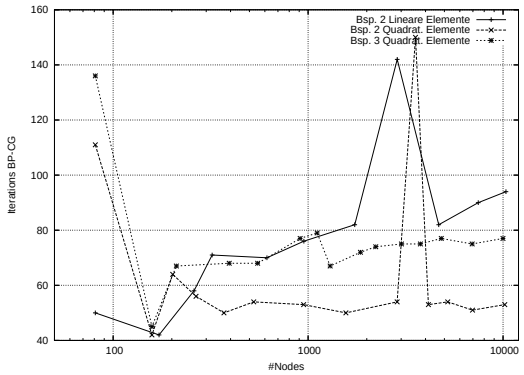
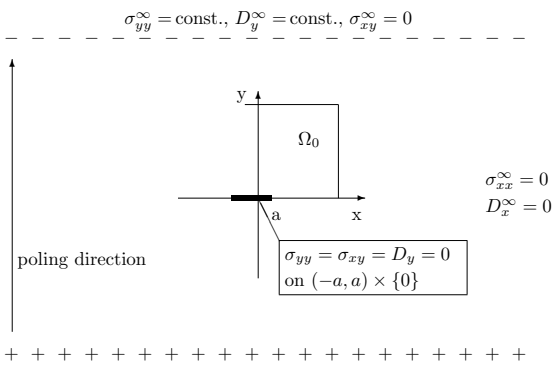


Abbildung 4: Iterationszahlen versus Knotenanzahl in Beispielen 2 und 3



Aus Symmetriegründen ist die Betrachtung des Teiles im 1.Quadranten ausreichend. Der Riss, welcher sich im Intervall $[0, a)$ auf der x-Achse befindet, wird hier durch ein entsprechendes Stück homogenen Neumannrand beschrieben. Das Randstück $[a, l] \times 0$ erhält aufgrund der vorhandenen Symmetrien die Bedingungen $u_y = 0,\ \varphi = 0$; am anderen Symmetrierand $0 \times [0, l]$ gilt $u_x = 0$ sowie $D_x = 0$. Auch hier findet bei der adaptiven FEM-Rechnung eine deutliche Konzentration der Verfeinerung um die Rissspitze herum statt. Die Iterationszahlen unter Verwendung quadratischer Viereckselemente zeigt Abbildung 5.

Auswertung der Testrechnungen Insgesamt bleibt festzuhalten, dass in den untersuchten Beispielen im wesentlichen gleichbleibende oder lediglich logarithmisch mit der Knotenzahl wachsende Iterationszahlen auftreten. Dies ist ein Indiz dafür, dass der Vorkonditionierer (hier jeweils Hierarchische-Basen) die Konditionszahlen wie gewünscht reduziert. Einzelne Ausreißer sowie ein generell höheres Niveau der Iterationszahlen – verglichen mit der Lösung linearer elliptischer Probleme mittels PCG – sind bei Verwendung des Bramble-Pasciak-CG häufiger beobachtete Phänomene.

1 Einleitung

Lineare piezoelektrische Probleme werden durch die schwache Formulierung über das Verschiebungsfeld u und das elektrische Potential φ

$$\begin{array}{rcll} c(u,v) + b(\varphi,v) & = & F(v) & \forall v \in \mathbb{V}, \\ b(\psi,u) - k(\varphi,\psi) & = & -G(\psi) & \forall \psi \in \mathbb{Q} \end{array} \tag{1}$$

beschrieben. Dabei sind die Bilinearformen wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rcccl} c(u,v) & = & \int_\Omega \varepsilon(v) : C_4 : \varepsilon(u)\, d\Omega & = & \int_\Omega (\underline{\varepsilon}(v))^T C \underline{\varepsilon}(u)\, d\Omega \\ b(\varphi,v) & = & \int_\Omega \varepsilon(v) : B_3 \cdot \nabla\varphi\, d\Omega & = & \int_\Omega (\underline{\varepsilon}(v))^T B \nabla\varphi\, d\Omega \\ k(\varphi,\psi) & = & \int_\Omega \nabla\psi \cdot K_2 \cdot \nabla\varphi\, d\Omega & = & \int_\Omega (\nabla\psi)^T K \nabla\varphi\, d\Omega \end{array}$$

mit Materialtensoren C_4 (4.Stufe), B_3 (3.Stufe) und K_2 (2.Stufe) bzw. deren Repräsentation als passende Matrizen. Abhängig von der Raumdimension d gilt:

$$\begin{array}{lll} d = 2: & \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12})^T, & C \in \mathbb{R}^{3,3}, B \in \mathbb{R}^{3,2}, K \in \mathbb{R}^{2,2}, \\ d = 3: & \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13})^T, & C \in \mathbb{R}^{6,6}, B \in \mathbb{R}^{6,3}, K \in \mathbb{R}^{3,3}. \end{array}$$

Die abgeleiteten Größen entstehen aus Kopplung beider Anteile:

Spannung	$\sigma(u,\varphi) = C_4 : \varepsilon(u) + B_3 \cdot \nabla\varphi$,
Dielektrische Verschiebung	$D(u,\varphi) = \varepsilon(u) : B_3 - K_2 \cdot \nabla\varphi$.

Gemischte FEM betrachtet (1) in Teilräumen $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$ mit Basis $\vec{\Psi} = (\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \ldots)$ ($n \cdot d$ Vektoransatzfunktionen) und $\mathbb{Q}_h \subset \mathbb{Q}$ mit Basis $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ (n skalare Ansatzfunktionen), wobei $u = \vec{\Psi}\underline{u},\ \varphi = \Phi p$ mit $\underline{u} \in \mathbb{R}^{d \cdot n}$ sowie $p \in \mathbb{R}^n$ für n Knoten des Netzes.
Damit ist (1) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\mathbf{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f} \\ \underline{g} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$\mathbf{C}$ und $\mathbf{K}$ sind symmetrische, positiv definite Matrizen. Zur Lösung dieses Systems wird der modifizierte Bramble-Pasciak-CG (Ursprung [1], Modifikation in [4]) als Löser benutzt. Dieser verwendet ein inexaktes Schur-Komplement der Form

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{B} + \gamma \mathbf{K}\,.$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{C}_0$ einen Vorkonditionierer für $\mathbf{C}$, wobei $\gamma > 0$ so gewählt wird dass $\mathbf{C} - \gamma\mathbf{C}_0$ positiv definit bleibt. Eine gute Vorkonditionierung wird mit Multilevel-Methoden erreicht (im Fall $d = 2$ ist z.B. der Hierarchische-Basen-Vorkonditionierer nach Yserentant [7] effektiv und billig, im dreidimensionalen Fall sind verbesserte Methoden ([2],[5]) notwendig um optimale Effektivität zu behalten). Es wird aber ein weiterer guter Vorkonditionierer $\mathbf{B}_0$ für $\mathbf{S}$ benötigt. Im Folgenden wird die Fragestellung untersucht, ob ein für $\mathbf{K}$ guter Vorkonditionierer (z.B. hierarchische Basen) auch für ganz $\mathbf{S}$ verwendet werden kann.

2 Schurkomplement mit exakter Matrix C

Zunächst wird die Spektraläquivalenz von $\mathbf{K}$ zu $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}$ untersucht, also die Existenz positiver Konstanten $\underline{\gamma}$, $\overline{\gamma}$ mit

$$\underline{\gamma}\, p^T\mathbf{K}p \le p^T\mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}p \le \overline{\gamma}\, p^T\mathbf{K}p\,. \tag{3}$$

Hierzu betrachten wir

$$p^T\mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}p = \|\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}p\|_2^2 = \sup_{\underline{v}} \frac{(\underline{v}^T\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}p)^2}{\|\underline{v}\|_2^2} = \sup_{\underline{u}} \frac{(\underline{u}^T\mathbf{B}p)^2}{\underline{u}^T\mathbf{C}\underline{u}}$$

mit $\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}\underline{v} =: \underline{u}$.

2.1 Obere Abschätzung

Für die rechte Ungleichung in (3) genügt es zu zeigen:

$$\sup_{\underline{u}} \frac{(\underline{u}^T\mathbf{B}p)^2}{\underline{u}^T\mathbf{C}\underline{u}} \le \overline{\gamma} \sup_{\underline{u}} \frac{\underline{u}^T\mathbf{C}\underline{u}\cdot p^T\mathbf{K}p}{\underline{u}^T\mathbf{C}\underline{u}} = \overline{\gamma}\, p^T\mathbf{K}p\,.$$

In Bilinearformen ausgedrückt folgt dies immer aus:

$$\begin{aligned} (b(\varphi,u))^2 &\le \overline{\gamma}\, c(u,u)\cdot k(\varphi,\varphi) \;\; \forall u\in\mathbb{V}_h,\; \forall\varphi\in\mathbb{Q}_h, \quad \text{also} \\ \left(\int_\Omega (\underline{\varepsilon}(u))^T\, B\, \nabla\varphi\, d\,\Omega\right)^2 &\le \overline{\gamma}\int_\Omega (\underline{\varepsilon}(u))^T\, C\, \underline{\varepsilon}(u)\, d\,\Omega \int_\Omega (\nabla\varphi)^T\, K\, \nabla\varphi\, d\,\Omega\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Zum Beweis der Ungleichung (4) werden Vektoren $\underline{x}$ und $\underline{w}$ der gleichen Dimension wie $\underline{\varepsilon}$ (d.h. 3 oder 6) sowie $\underline{z}\in\mathbb{R}^d$ betrachtet.
Seien $\underline{x}$ und $\underline{z}$ beliebige Vektoren. Dann existiert eine Konstante $\overline{\lambda}$ (maximaler Eigenwert des verallgemeinerten Eigenwertproblems $B^TC^{-1}B\underline{z} = \lambda K\underline{z}$), welche folgende Abschätzung erfüllt:

$$\underline{z}^T B^T C^{-1} B\underline{z} \le \overline{\lambda}\,\underline{z}^T K\underline{z}\,. \tag{5}$$

Also gilt mit $\underline{w} := C^{\frac{1}{2}}\underline{x}$ folgendes:

$$\frac{(\underline{x}^T B\underline{z})^2}{\underline{x}^T C\underline{x}} = \frac{(\underline{w}^T C^{-\frac{1}{2}} B\underline{z})^2}{\underline{w}^T\underline{w}} \le \frac{\|C^{-\frac{1}{2}}B\underline{z}\|_2^2\|\underline{w}\|_2^2}{\|\underline{w}\|_2^2} = \underline{z}^T B^T C^{-1} B\underline{z} \overset{(5)}{\le} \overline{\lambda}\,\underline{z}^T K\underline{z}\,.$$

Fazit: $\forall\underline{x},\underline{z}$ gilt

$$(\underline{x}^T B\underline{z})^2 \le \overline{\lambda}\cdot\underline{x}^T C\underline{x}\cdot\underline{z}^T K\underline{z}\,. \tag{6}$$

Die Schwarzsche Ungleichung für Integrale liefert hiermit:

$$\left(\int_\Omega \underline{x}^T Bz\right)^2 \le \overline{\lambda}\left(\int_\Omega \sqrt{\underline{x}^T C\underline{x}}\sqrt{\underline{z}^T K\underline{z}}\right)^2 \le \overline{\lambda}\int_\Omega \underline{x}^T C\underline{x}\cdot\int_\Omega \underline{z}^T K\underline{z}\,.$$

Damit ist (4) mit $\overline{\gamma} = \overline{\lambda}$ bewiesen, mithin gilt auch

$$p^T\mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}p \le \overline{\gamma}\, p^T\mathbf{K}p\,. \tag{7}$$

Bemerkung: Die Konstante $\overline{\gamma}$, deren Existenz in (5) vorausgesetzt wurde, lässt sich aus den bekannten Materialparametern im betrachteten transversal-isotropen Fall einfach berechnen. Es ergibt sich, dass sowohl K als auch $S_0 = B^TC^{-1}B$ Diagonalmatrizen sind, für S_0 zeigt man die Diagonaleigenschaft folgendermaßen:

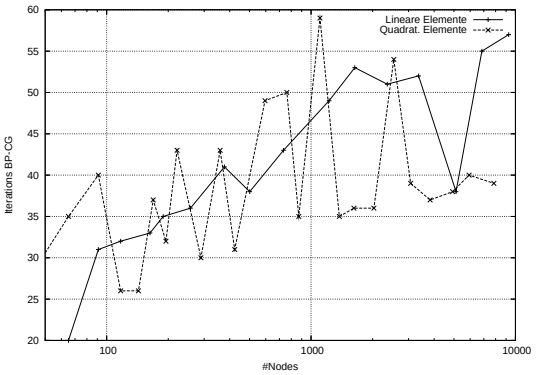


Abbildung 2: Iterationszahlen versus Knotenanzahl im Beispiel 1.

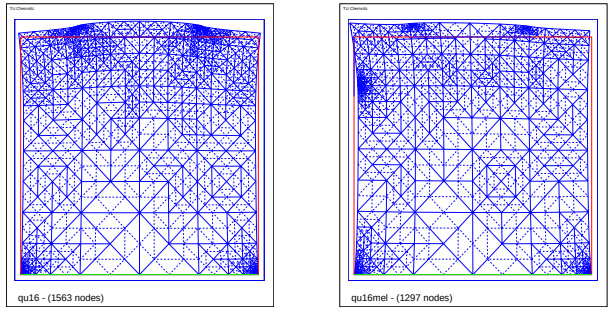


Abbildung 3: Deformierte Netze von Beispielen 2 und 3

Netze zeigt Abbildung 3, die Iterationszahlen bei adaptiver Verfeinerung Abbildung 4.

Beispiel 4 Als weiteres Beispiel wird hier ein aus der Viertelebene ausgeschnittenes Quadrat der Seitenlänge $l = 10a$ als Gebiet betrachtet, um eine FEM-Approximation des elektromechanischen Griffith-Risses in der unendlichen Ebene (beschrieben z.B. in [3]) zu berechnen.

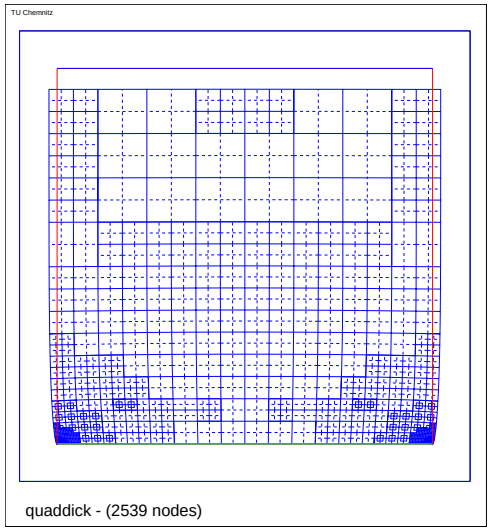


Abbildung 1: Adaptive Verfeinerung nach ca. 20 Schritten im Beispiel 1.

5 Numerische Beispiele

Die beschriebene Vorkonditionierung wurde im Experimentalprogramm SPC-PM2Adpiez für 2-dimensionale piezoelektrische Probleme implementiert und damit an verschiedenen Beispielen Testrechnungen durchgeführt.

Beispiel 1 Zunächst ein recht einfaches Beispiel, welches gleichzeitig die Wirkung der Piezokopplung demonstriert: $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\Gamma_D = (0,1) \times 0$ für Verschiebung und elektrisches Potential, d.h. am unteren Rand liegt eine feste Einspannung mit „Erdkontakt“ vor, was etwa als auf einer Metallplatte festgeschweißter Körper zu verstehen ist. Auf dem oberen Rand ist die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung als Konstante vorgegeben (als Oberflächenladungen zu deuten), d.h. es gilt $D \cdot \mathfrak{n} = -1$ auf $\Gamma_{N,\varphi} = (0,1) \times 1$. Der Rest des Randes gilt als kräfte- und ladungsfreier Neumannrand. Zur FEM-Berechnung wurden quadratische Viereckselemente benutzt, ausgehend vom Startnetz aus lediglich einem Element. Als Ergebnis ergibt sich eine deutliche Deformation, Bild 1 zeigt das deformierte Netz nach adaptiver Verfeinerung. Deutlich zu erkennen ist eine Konzentration der Verfeinerung auf die Singularitäten an den Grenzen von Dirichlet- zu Neumannrand in den unteren Ecken. Die Iterationszahlen des Bramble-Pasciak-CG bei dieser Rechnung sowie bei einer weiteren Rechnung mit linearen Viereckselementen sind in Bild 2 dargestellt.

Beispiel 2 Hier ist $\Omega = (0,4) \times (0,4)$, die Unterseite entspricht dem Dirichletrand $\Gamma_D = (0,4) \times 0$ mit $u = 0$, $\varphi = 0$ und eine mechanische Zugkraft wirkt auf einen Teil der oberen Seite: $\sigma \cdot \mathfrak{n} = \sigma_0$ auf $\Gamma_{N,u} = (1,3) \times 4$. Betrachtet wird eine Ausgangsvernetzung aus 32 Dreiecken.

Beispiel 3 Dieses Beispiel entspricht Beispiel 2 mit einer zusätzlichen elektrischen Randbedingung, welche eine Unsymmetrie erzeugt: $D \cdot \mathfrak{n} = \frac{y-2}{2} D_0$ auf $\Gamma_{N,\varphi} = 0 \times (3,4)$. Die verformten

- 2D:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 \\ h_{12} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} B^T C^{-1} B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 \\ h_{12} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e_{12} \\ 0 & e_{22} \\ e_{31} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & h_{11}e_{12} + h_{12}e_{22} \\ 0 & h_{12}e_{12} + h_{22}e_{22} \\ h_{33}e_{31} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_{33}e_{31}^2 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix} = S_0 \,. \end{aligned}$$

Als konkretes Beispiel wird hier das Material PZT4$_b$ betrachtet. Die Materialkonstanten aus [6] entnommen und auf die 2D-Notation umindiziert ergeben

$$\begin{array}{llllll} c_{11} = 1.39e11\,, & e_{12} = -6.98\,, & \kappa_{11} = 6.00e-9\,, \\ c_{12} = 7.43e10\,, & e_{22} = 13.84\,, & \kappa_{22} = 5.47e-9\,, \\ c_{22} = 1.13e11\,, & e_{31} = 13.44\,, \\ c_{33} = 2.56e10\,. \end{array}$$

Damit folgt für dieses Material

$$K = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5.47 \end{pmatrix} \cdot 10^{-9},\ S_0 \approx \begin{pmatrix} 7.06 & 0 \\ 0 & 4.56 \end{pmatrix} \cdot 10^{-9}\,.$$

Hier wäre also etwa $\overline{\gamma} = \max_{i=1,2} \frac{s_{ii}}{k_{ii}} = 1.18$ zu wählen.

- 3D: Analoge Rechnung (hier x_3 Polungsachse) mit

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{61} & 0 \\ e_{61} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt jetzt

$$B^T C^{-1} B = S_0 = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix}.$$

Am Beispiel PZT4$_b$ bedeutet das

$$K = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5.47 \end{pmatrix} \cdot 10^{-9},\ S_0 \approx \begin{pmatrix} 7.06 & 0 & 0 \\ 0 & 7.06 & 0 \\ 0 & 0 & 6.04 \end{pmatrix} \cdot 10^{-9}\,.$$

Also gilt hier das gleiche $\overline{\gamma}$ wie im 2D-Fall.

2.2 Untere Abschätzung

Die Abschätzung nach unten (Finden von $\underline{\gamma}$) lässt sich nicht auf dem gleichen Wege auf die Ebene der Materialmatrizen herunterbrechen, konkret scheitert ein Analogbeweis am Herausziehen einer Vektornorm sowie der Richtungsgebundenheit der Schwarzschen Ungleichung.

Da die linke Ungleichung in (3) aus

$$\sup_{\underline{u}} \frac{(\underline{u}^T \mathbf{B} p)^2}{\underline{u}^T \mathbf{C} \underline{u}} \geq \underline{\gamma}\, p^T \mathbf{K} p$$

bzw. analog aus

$$\sup_{u} \frac{(b(\varphi,u))^2}{c(u,u)} \geq \underline{\gamma} k(\varphi,\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{Q}_h$$

folgt, genügt es auch schon, zu jedem $\varphi \in \mathbb{Q}_h$ ein $u \in \mathbb{V}_h$ zu finden, welches die Abschätzung erfüllt (dann erfüllt sie erst recht das Supremum).
Nicht zum Erfolg führt die Idee, zu jedem φ ein zulässiges u^* zu finden, welches

$$\underline{\varepsilon}(u^*) = B \nabla \varphi$$

erfüllt. In diesem Falle würde die gewünschte Abschätzung mit elementaren Betrachtungen folgen. Allerdings zeigt schon ein einfaches Beispiel (Netz mit 2 Dreiecken, lineare Elemente), dass zu einer Hütchenfunktion φ kein zulässiges u^* existiert, da die Rückrechnung eine Unstetigkeit erzeugt und somit u^* aus dem Ansatzraum herausfallen würde.
Eine andere Wahl von u führt aber zumindest für eine bedeutende Teilklasse von Problemen zum gewünschten Resultat, hier zunächst beschrieben für $d = 2$: Sind die Dirichletränder für die beiden Teilfelder verträglich als $\Gamma_{D,u} \subset \Gamma_{D,\varphi}$, ist es zulässig, zu jedem $\varphi \in \mathbb{Q}_h$ ein Vektorfeld

$$u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{V}_h$$

zu wählen. Daraus ergibt sich $\underline{\varepsilon}(u^*) = (0,\, \partial_2\varphi,\, \partial_1\varphi)^T$, und mit der Struktur von B sowie C im transversalisotropen Fall folgt

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^T(u^*) B \nabla\varphi &= e_{22}(\partial_2\varphi)^2 + e_{31}(\partial_1\varphi)^2 = (\nabla\varphi)^T \underbrace{\begin{pmatrix} e_{31} & 0 \\ 0 & e_{22} \end{pmatrix}}_{\hat{B}} \nabla\varphi\,, \\ \underline{\varepsilon}^T(u^*) C \underline{\varepsilon}(u^*) &= c_{22}(\partial_2\varphi)^2 + c_{33}(\partial_1\varphi)^2 = (\nabla\varphi)^T \underbrace{\begin{pmatrix} c_{33} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}}_{\hat{C}} \nabla\varphi\,. \end{aligned}$$

Die entstehenden Diagonalmatrizen $\hat{C}$ und $\hat{B}$ sind bei den bekannten Piezomaterialien positiv definit. Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{(b(\varphi,u^*))^2}{k(\varphi,\varphi)\cdot c(u^*,u^*)} &= \frac{\int_\Omega ((\nabla\varphi)^T \hat{B} \nabla\varphi \, d\Omega}{\int_\Omega ((\nabla\varphi)^T K \nabla\varphi \, d\Omega} \cdot \frac{\int_\Omega ((\nabla\varphi)^T \hat{B} \nabla\varphi \, d\Omega}{\int_\Omega ((\nabla\varphi)^T \hat{C} \nabla\varphi \, d\Omega} \\ &\geq \lambda_{\min}(K^{-1}\hat{B}) \cdot \lambda_{\min}(\hat{C}^{-1}\hat{B}) = \min(\frac{e_{31}}{\kappa_{11}}, \frac{e_{22}}{\kappa_{22}}) \cdot \min(\frac{e_{31}}{c_{33}}, \frac{e_{22}}{c_{22}}) =: \alpha\,. \end{aligned}$$

Supremumsbildung über u liefert mit einem $\underline{\gamma} \geq \alpha$ dann

$$\underline{\gamma} k(\varphi,\varphi) \leq \sup_u \frac{(b(\varphi,u))^2}{c(u,u)}$$

und die linke Ungleichung in (3) folgt. Mit Hinzunahme von (7) ist damit die gesamte Abschätzung (3) gezeigt.
Für das Beispielmaterial PZT4$_b$ folgt damit als untere Abschätzung
$\underline{\gamma} = \frac{e_{31}}{\kappa_{11}} \cdot \frac{e_{22}}{c_{22}} \approx 0.27$, was die Verwendbarkeit des Vorkonditionierers anzeigt.

Im 3D-Fall ist eine analoge Rechnung möglich, hierbei führt z.B. wiederum die Wahl von $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$ in Polungsrichtung zum gewünschten Resultat.

Bemerkung: Hinreichend für die untere Abschätzung wäre hier auch die Gültigkeit einer LBB-artigen Bedingung:

$$\inf_{\varphi\in\mathbb{Q}_h} \sup_{v\in\mathbb{V}_h} \frac{b(\varphi,v)}{\|v\|_{\mathbb{V}} \|\varphi\|_{\mathbb{Q}}} \geq \beta\,. \tag{8}$$

Aufgrund von $\mathbb{Q} = H^1(\Omega)$, $\mathbb{V} = (H^1(\Omega))^d$ ergibt (8) nach Quadrierung und Ausnutzung von

$$\|v\|^2_{\mathbb{V}} \geq \alpha_1 c(v,v), \;\; \|\varphi\|^2_{\mathbb{Q}} \geq \alpha_2 k(q,q)$$

mit positiven Konstanten α_1 und α_2 nun

$$\inf_{\varphi\in\mathbb{Q}_h} \sup_{v\in\mathbb{V}_h} \frac{(b(\varphi,v))^2}{c(v,v)\cdot k(\varphi,\varphi)} \geq \alpha_1\alpha_2\beta^2 =: \underline{\gamma}$$

bzw.

$$\sup_{v\in\mathbb{V}_h} \frac{(b(\varphi,v))^2}{c(v,v)} \geq \underline{\gamma} k(\varphi,\varphi)\,,$$

was die gewünschte untere Abschätzung nach sich zieht. Die vom Stokes-Problem her bekannten stabilen Elementepaare (z.B. Taylor-Hood) sichern im piezoelektrischen Fall allerdings nicht die Gültigkeit von (8). Im Unterschied zu Stokes und inkompressibler Elastizität, wo $\|.\|_{\mathbb{Q}}$ eine L_2-Norm ist, sind hier die Normen in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{V}$ jeweils H^1-Räumen zugehörig. Außerdem liegt der Bilinearform $b(.,.)$ ein spezielles Materialverhalten zugrunde.

3 Inexaktes Schurkomplement mit Vorkonditionierer $\mathbf{C}_0$

Existieren positive Konstanten $\underline{\mu}, \overline{\mu}$ (vgl. [4]) mit

$$\underline{\mu}(\mathbf{C}_0\underline{u},\underline{u}) \leq (\mathbf{C}\underline{u},\underline{u}) \leq \overline{\mu}(\mathbf{C}_0\underline{u},\underline{u})\,, \tag{9}$$

lassen sich diese auch auf die Inversen übertragen (nachzurechnen mithilfe eines verallgemeinerten Eigenwertproblems):

$$\underline{\mu}(\mathbf{C}^{-1}\underline{v},\underline{v}) \leq (\mathbf{C}_0^{-1}\underline{v},\underline{v}) \leq \overline{\mu}(\mathbf{C}^{-1}\underline{v},\underline{v})\,.$$

Damit folgt aus (3) sofort

$$\frac{\underline{\gamma}}{\overline{\mu}} p^T \mathbf{K} p \leq p^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{B} p \leq \frac{\overline{\gamma}}{\underline{\mu}} p^T \mathbf{K} p\,.$$

Es gilt also auch im inexakten Schurkomplement die Spektraläquivalenz.

4 Theoretisches Resultat

Sind also (3) bzw. (9) mit von der Feinheit der Diskretisierung unabhängigen Konstanten $\underline{\gamma}, \overline{\gamma}, \underline{\mu}, \overline{\mu}$ erfüllt (was bei geeigneten Materialien und Wahl eines Vorkonditionierers $\mathbf{C}_0$ optimaler Effektivität gesichert ist) und wird ein zulässiges $\gamma > 0$ gewählt, so folgt

$$(\frac{\underline{\gamma}}{\overline{\mu}} + \gamma)\, p^T \mathbf{K} p \leq p^T \mathbf{S} p \leq (\frac{\overline{\gamma}}{\underline{\mu}} + \gamma)\, p^T \mathbf{K} p\,.$$

Jeder bekanntermaßen gute Vorkonditionierer für $\mathbf{K}$ bewirkt auch eine Vorkonditionierung des Schurkomplements $\mathbf{S}$, deren Güte von der Größe der eingehenden Konstanten abhängt. Ein guter Vorkonditionierer $\mathbf{C}_0$ des mechanischen Blocks $\mathbf{C}$ ist hier übrigens ein zweites Mal von Vorteil, da ein kleines Verhältnis der Konstanten $\overline{\mu}$ und $\underline{\mu}$ die Abschätzung verbessert.