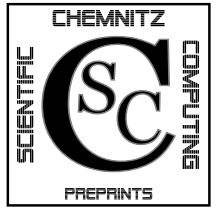
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Arnd Meyer

Grundgleichungen und adaptive Finite–Elemente–Simulation bei “Großen Deformationen”

CSC/07-02



Chemnitz Scientific Computing Preprints

Chemnitz Scientific Computing Preprints – ISSN 1864-0087

Impressum:

Chemnitz Scientific Computing Preprints — ISSN 1864-0087
(1995–2005: Preprintreihe des Chemnitzer SFB393)

Herausgeber:
Professuren für
Numerische und Angewandte Mathematik
an der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Chemnitz

Postanschrift:
TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
09107 Chemnitz
Sitz:
Reichenhainer Str. 41, 09126 Chemnitz

http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Chemnitz Scientific Computing Preprints

Arnd Meyer

Grundgleichungen und adaptive Finite–Elemente–Simulation bei "Großen Deformationen"

CSC/07-02

CSC/07-02 ISSN 1864-0087 **Febr. 2007**

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

2 Geometrie **1**

3 Kräftegleichgewicht – Physik **4**

4 Simulation großer Deformationen bei linear elastischem Material **6**
4.1 Lineare Elastizität großer Deformationen 7
4.2 Fast inkompressible Materialien und große Deformationen 8

5 Die Implementierung von $a_0(U; W, V)$ **10**

6 Fehlerschätzer und adaptive Netzsteuerung **12**
6.1 Vorbetrachtung bei linearen Aufgaben 12
6.2 Fehlerschätzer für das nichtlineare Problem der Großen Deformation 16

Author's addresses:

Arnd Meyer
TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik
D-09107 Chemnitz

http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/

The complete list of SFB393 preprints is available via
http://www.tu-chemnitz.de/sfb393/preprints.html.

1 Einführung

Zielstellung diese Artikels soll die Darstellung eines residuen-basierten Fehlerschätzers für typische Deformationsberechnungen mit der adaptiven FEM sein. Dies ist für lineare Probleme, wie etwa die Lamé–Gleichung seit fast 20 Jahren bekannt (s.[1, 2, 3]) und in entsprechenden Finite Elemente Programmen integriert. Beim Übergang zu Nichtlinearitäten gibt es zwei wichtige Richtungen bei Deformationsprolemen. Zum einen wird häufig das nichtlineare Materialverhalten in den Vordergrund gestellt, was z.B. bei elastoplastischen Materialien besonders wichtig ist. Hierfür finden sich in der Literatur auch Verallgemeinerungen zum Fehlerschätzer und somit zur adaptiven Netzsteuerung für derartige Probleme. Hier soll der zweite Grund für Nichtlinearitäten besondere Beachtung finden, die Berücksichtigung der sogenannten „großen Deformationen“. Diese Nichtlinearität resultiert ersteinmal aus der vollständigen Betrachtung der Geometrie der Deformation. Zur Herleitung der richtigen Fehlerschätzer ist die Unterscheidung (und richtige Benutzung) der verschiedenen Spannungstensoren erforderlich. Deshalb wird zu Anfang eine möglichst einfache Darstellung der zugrunde liegenden Differentialgeometrie der Deformation gewählt. Im Kapitel 3 wird das Kräftegleichgewicht in eine schwache Formulierung in der Ausgangskonfiguration transformiert, was dann die zu behandelnde nichtlineare Gleichung liefert. Das Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Linearisierung für den Fall eines einfachen elastischen Materialgesetztes sowie für fast inkompressibles Material. Der Unterschied zur FEM für „kleine Deformationen“ liegt im wesentlichen in etwas aufwändigeren Berechnungen der Elementmatrizen neben der notwendigen zusätzlichen Linearisierungsschleife. Deshalb wird in Kapitel 5 die Implementierung der neuen Elementmatrizen untersucht. Der Fehlerschätzer als Basis für adaptive Netzverfeinerung ist Gegenstand des letzten Kapitels. Durch Definition eines angepassten Fehlerfunktionals ist es möglich, einen Fehlerschätzer zu erhalten, der wenig von linear elastischen Spezialfall abweicht.

2 Geometrie

Die Ausgangskonfiguration Ω_0 (ein Gebiet im 3-dimensionalen Euklidischen Raum) ist parametrisiert als

$$\Omega_0 = \{X(\eta) : \eta \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3\} \ ,$$

also $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ ist gegebenes (ev. krummliniges) Koordinatensystem. Dann sind:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{G}_i = \frac{\partial}{\partial \eta^i} X & \text{covariante Tensorbasis,} \\ G_{ij} = \boldsymbol{G}_i \cdot \boldsymbol{G}_j & \text{Metrikkoeffizienten,} \\ \boldsymbol{G}^i & \text{contravariante Tensorbasis,} \\ \text{definiert mit:} & \boldsymbol{G}^i \cdot \boldsymbol{G}_j = \delta^i_j \\ \underline{\underline{G}} = (G_{ij})^3_{i,j=1} \Longrightarrow & \underline{\underline{G}}^{-1} = (G^{ij})^3_{i,j=1} \text{ mit } G^{ij} = \boldsymbol{G}^i \cdot \boldsymbol{G}^j \\ \text{Grad} = \boldsymbol{G}^i \frac{\partial}{\partial \eta^i} & \text{der Gradientenoperator in } \Omega_0 \end{array} \tag{1}$$

eventuell notwendig: Christoffel–Symbole mit $\frac{\partial}{\partial \eta^i} \boldsymbol{G}_j = \Gamma^k_{ij} \boldsymbol{G}_k$.

Deformation von Ω_0 ist eine Abbildung: $X \to x = \vec{\varphi}(X) = X + \boldsymbol{U}(X)$, bzw. zeitlich veränderlich:

$$\begin{array}{l} x(t) = \vec{\varphi}_t(X) = X + \boldsymbol{U}(t, X) \ \ \forall t \in [0, t_{end}], \\ (\vec{\varphi}_0 = \text{ id. Abb. }, \ \boldsymbol{U}(0, X) = \vec{\boldsymbol{0}}), \end{array} \tag{2}$$

$\boldsymbol{U}$ ist Vektorfunktion von X (der gesuchte Verschiebungsvektor an X) also ($\forall t$:) Funktion von η, somit ist auch $x(\eta)$ eine Parametrisierung des Gebiets Ω_t (deformiertes Ω_0).

$\Longrightarrow$ Es gibt eine mit t sich ändernde Parametrisierung (heißt: Der materielle Punkt P bei $t = 0$ an der Stelle $X(\eta)$ ist bei $t > 0$ an der Stelle $x(\eta)$ hat also stets den "Namen" η.)
Mit der via $x(\eta)$ gegebenen Parametrisierung von Ω_t ($\forall t$ fest), folgt analog zu (1) die Definition von co- und contravarianten Tensorbasen:

$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial}{\partial \eta^i} x$ ist covariante Tensorbasis von Ω_t (und $\exists \boldsymbol{g}^i$, usw.)

Da $\boldsymbol{U}(t, X(\eta))$ gesuchte Vektorfunktion, ist $\boldsymbol{U} = U^i(t, \eta) \boldsymbol{G}_i(\eta)$ zu denken und $U^i(t, \eta)$ die gesuchten 3 Funktionen $\forall t$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{g}_i = \frac{\partial}{\partial \eta^i} x = \frac{\partial}{\partial \eta^i}(X + \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{G}_i + \frac{\partial}{\partial \eta^i} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{U}_{,i}. \tag{3}$$

Definieren den sogenannten Deformationsgradienten F als Tensor 2. Stufe mit

$$\vec{\varphi}(X + \boldsymbol{V}) - \vec{\varphi}(X) = F \cdot \boldsymbol{V} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{V}\|^2) \tag{4}$$

$\forall$ (kleinen) Richtungen $\boldsymbol{V} \in \mathcal{T}_x$ (= $span\{\boldsymbol{G}_i\}$, der Tangentialraum bei X).
Da aber stets gilt:

$$\vec{\varphi}(X + \boldsymbol{V}) - \vec{\varphi}(X) = \boldsymbol{V} \cdot \text{Grad}\, \vec{\varphi} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{V}\|^2) \tag{5}$$

Some titles of the former SFB393 preprint series:

05-01 C. Pester. A residual a posteriori error estimator for the eigenvalue problem for the Laplace-Beltrami operator. January 2005.

05-02 J. Badía, P. Benner, R. Mayo, E. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, J. Saak. Parallel Order Reduction via Balanced Truncation for Optimal Cooling of Steel Profiles. February 2005.

05-03 C. Pester. CoCoS – Computation of Corner Singularities. April 2005.

05-04 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Einige Elemente, Fehlerschätzer und Ergebnisse. April 2005.

05-05 P. Benner, J. Saak. Linear-Quadratic Regulator Design for Optimal Cooling of Steel Profiles. April 2005.

05-06 A. Meyer. A New Efficient Preconditioner for Crack Growth Problems. April 2005.

05-07 A. Meyer, P. Steinhorst. Überlegungen zur Parameterwahl im Bramble-Pasciak-CG für gemischte FEM. April 2005.

05-08 T. Eibner, J. M. Melenk. Fast algorithms for setting up the stiffness matrix in hp-FEM: a comparison. June 2005.

05-09 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Vergleich der Fehlerindikatoren in Bezug auf die Netzsteuerung Teil I. June 2005.

05-10 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Vergleich der Fehlerindikatoren in Bezug auf die Netzsteuerung Teil II. July 2005.

05-11 A. Meyer, R. Unger. Subspace-cg-techniques for clinch-problems. September 2005.

05-12 P. Ciarlet, Jr, B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, J. Zou. The Fourier Singular Complement Method for the Poisson Problem. Part III: Implementation Issues. October 2005.

05-13 T. Eibner, J. M. Melenk. Multilevel preconditioning for the boundary concentrated *hp*-FEM. December 2005.

05-14 M. Jung, A. M. Matsokin, S. V. Nepomnyaschikh, Yu. A. Tkachov. Multilevel preconditioning operators on locally modified grids. December 2005.

05-15 S. Barrachina, P. Benner, E. S. Quintana-Ortí. Solving Large-Scale Generalized Algebraic Bernoulli Equations via the Matrix Sign Function. December 2005.

05-16 B. Heinrich, B. Jung. Nitsche- and Fourier-finite-element method for the Poisson equation in axisymmetric domains with re-entrant edges. December 2005.

05-17 M. Randrianarivony, G. Brunnett. C^0-paving of closed meshes with quadrilateral patches. December 2005.

05-18 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Quadrilateral removal and 2-ear theorems. December 2005.

05-19 P. Benner, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí. Solving linear-quadratic optimal control problems on parallel computers. December 2005.

Literatur

[1] M. Ainsworth, J. Oden, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis* ,
Pure and Appl. Math, Wiley-Interscience Publ. NewYork- Chichester-et al, 2000.

[2] R. Verfürth, *A Review of a posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques*,
Wiley–Teubner, Chichester, Stuttgart (1996).

[3] W.Bangerth, R.Rannacher, *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations* Lectures in Math. ETH Zürich, Birkhäuser Verl. 2003.

ist also

$$\begin{aligned} F &= (\mathrm{Grad}\,\vec{\varphi})^T && (6)\\ &= [\mathrm{Grad}\,(X+\boldsymbol{U})]^T && (7)\end{aligned}$$

$$\boxed{F = I + \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{U}^T} \qquad (8)$$

Mit (1) folgt also (beachte Einsteinsche Summenkonvention!)

$$\begin{aligned} F &= \left(\boldsymbol{G}^i \tfrac{\partial}{\partial \eta^i}\,[X+\boldsymbol{U}]\right)^T \\ &= \left(\boldsymbol{G}^i \left[\boldsymbol{G}_i + \tfrac{\partial}{\partial \eta^i}\boldsymbol{U}\right]\right)^T \\ &= I + \left(\tfrac{\partial}{\partial \eta^i}\boldsymbol{U}\right)\boldsymbol{G}^i = I + \boldsymbol{U}_{,i}\boldsymbol{G}^i \end{aligned} \qquad (9)$$

Bemerkung: $\boldsymbol{U} = U^i\boldsymbol{G}_i \Rightarrow \boldsymbol{U}_{,k} = \frac{\partial}{\partial \eta^k}\boldsymbol{U} = U^i|_k\boldsymbol{G}_i$, wobei offenbar

$$U^i|_k = \frac{\partial}{\partial \eta^k}U^i + \Gamma^i_{jk}U^j,$$

aber für folgende Überlegungen werden nur die drei Vektoren $\boldsymbol{U}_{,i}$ benötigt.

Folgerungen: Da $\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{U}_{,i}$, ergibt sich:

$$\begin{aligned} F\cdot\boldsymbol{G}_k &= \boldsymbol{G}_k + (\boldsymbol{U}_{,i})\boldsymbol{G}^i\cdot\boldsymbol{G}_k \\ &= \boldsymbol{G}_k + \boldsymbol{U}_{,k} = \boldsymbol{g}_k \\ \boldsymbol{G}_k\cdot F^T &= \boldsymbol{G}_k + \boldsymbol{G}_k\cdot\boldsymbol{G}^i\boldsymbol{U}_{,i} = \boldsymbol{g}_k \end{aligned} \qquad (10)$$

analog folgt $\boldsymbol{g}^i = F^{-T}\cdot\boldsymbol{G}^i = \boldsymbol{G}^i\cdot F^{-1}$.

Übrigens:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_i\boldsymbol{G}^i = (\boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{U}_{,i})\boldsymbol{G}^i &= \boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}^i + \boldsymbol{U}_{,i}\boldsymbol{G}^i \\ &= I + \boldsymbol{U}_{,i}\boldsymbol{G}^i \\ &= F \end{aligned} \qquad (11)$$

$\Longrightarrow F = \boldsymbol{g}_i\boldsymbol{G}^i \Rightarrow F^T = \boldsymbol{G}^i\boldsymbol{g}_i,\ F^{-T} = \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{G}_i,\ F^{-1} = \boldsymbol{G}_i\boldsymbol{g}^i$

Weitere Defintionen:

$$\begin{aligned} F^T\cdot F &= I + \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{U} + \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{U}^T + \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{U}^T \\ &\quad (\text{ Cauchy–Green–Tensor }) \\ E &= \tfrac{1}{2}(F^T\cdot F - I)\ \text{ Verzerrungstensor großer Deformationen} \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\boxed{2E(\boldsymbol{U}) = \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{U} + \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{U}^T + \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{U}^T} \qquad (13)$$

3 Kräftegleichgewicht – Physik

Das Kräftegleichgewicht gilt stets in Ω_t :
$\exists\sigma$, Cauchyscher Spannungstensor und $\rho\vec{f}$ Volumenkraftdichte (an jedem Punkt x) so daß

$$\boxed{\operatorname{div}\sigma + \rho\vec{f} = \vec{\mathbf{0}} \quad \forall x \in \Omega_t \ .} \tag{14}$$

Achtung: div ist wie grad bzgl. $x(\eta)$ gegeben als:

$$\boxed{\text{grad } = \boldsymbol{g}^i \frac{\partial}{\partial \eta^i}} \tag{15}$$

Multiplizieren diese Gleichung mit beliebiger Vektorfunktion $\boldsymbol{V}$ (mit $\boldsymbol{V} = \vec{\mathbf{0}}|_{\Gamma_D(t)=\Gamma_D\ \forall t}$) und integrieren über Ω_t:
Volumenelement:

$$\begin{aligned} d\Omega_t &= [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3] d\eta^1 d\eta^2 d\eta^3 \\ &= [F\cdot\boldsymbol{G}_1, F\cdot\boldsymbol{G}_2, F\cdot\boldsymbol{G}_3] d\eta^1 d\eta^2 d\eta^3 \\ &= \det F\ [\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_3]\ d\eta^1 d\eta^2 d\eta^3 \\ \boxed{\text{mit } \ J = \det F :} &= J\ d\Omega_0 \end{aligned}$$

Mit Gaußschem Integralsatz in Ω_t entsteht:

$$\int_{\Omega_t} \sigma : \operatorname{grad} \boldsymbol{V}^T d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho\vec{f}\cdot\boldsymbol{V} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathfrak{n}\cdot\sigma\cdot\boldsymbol{V} d\mathcal{S}_t \tag{16}$$

Definition: $J\sigma = F\cdot \overset{1}{T} = F\cdot \overset{2}{T}\cdot F^T$

$\overset{1}{T}$ 1. Piola–Kirchhoff–Spannungstensor (unsymmetrischer Tensor 2. Stufe),
$\overset{2}{T}$ 2. Piola–Kirchhoff–Spannungstensor (symmetrischer Tensor 2. Stufe)

benutzt, hiermit ergibt sich:

$$\sum_T \int_T \rho_0\vec{f}\cdot\boldsymbol{V}\ d\Omega_0 + \sum_{E\subset\Gamma_N}\int_E \vec{g}\cdot\boldsymbol{V}\ d\mathcal{S}_0$$

$$-\sum_T\left[\int_T -(\operatorname{Div}\overset{1}{T})\cdot\boldsymbol{V}\ d\Omega_0 + \sum_{E\subset\partial T}\int_E \mathfrak{N}\cdot\overset{1}{T}\cdot\boldsymbol{V}\ d\mathcal{S}_0\right]$$

$$= \sum_T\left[\langle R_T, \boldsymbol{V}\rangle_T + \sum_{E\subset\partial T}\langle r_E, \boldsymbol{V}\rangle_E\right]$$

mit:

$$\begin{aligned} r_E &= [\mathfrak{N}\cdot\overset{1}{T}] = \begin{cases} \mathfrak{N}\cdot\overset{1}{T}|_{T_1} + \mathfrak{N}\cdot\overset{1}{T}|_{T_2} & E = \bar{T}_1\cap\bar{T}_2 \\ \mathfrak{N}\cdot\overset{1}{T} - \vec{g} & E\subset\Gamma_N \\ 0 & E\subset\Gamma_D \end{cases} \\ R_T &= (\operatorname{Div}\overset{1}{T} + \rho_0\vec{f})|_T, \end{aligned}$$

alle Größen $\overset{1}{T}$ sind $\overset{1}{T}(\boldsymbol{U}_h)$. Für die Berechnung muß

$$\overset{1}{T} = \overset{2}{T}F^T = (E(\boldsymbol{U}_h) : \mathfrak{C})\cdot(I + \operatorname{Grad}\boldsymbol{U}_h)$$

gesetzt werden, wovon Div zu bilden ist.

Die weitere Abschätzung folgt identisch Abschnitt 5.1 und führt zu

$$J_3(\boldsymbol{e}_h) \le C_I\Big(\sum_T \eta_T^2\Big)^{1/2}$$

mit

$$\eta_T^2 = \frac{h_T}{\mathfrak{E}_T}\left(h_T\|R_T\|_T^2 + \sum_{E\subset\partial T}\|r_E\|_E^2\right).$$

Natürlich sind $J_1(\boldsymbol{v})$ und $J_2(\boldsymbol{v})$ äquivalent (aber gerade mit C_S als einer der beiden Konstanten):

$$J_2(\boldsymbol{v}) = \frac{a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2} a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2}}{b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2}} \geq \frac{1}{\sqrt{C_S}} a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{C_S}} J_1(\boldsymbol{v}).$$

Wird $\varepsilon : \mathfrak{C}(x) : \varepsilon \leq (\gamma \mathfrak{E}(x))\varepsilon : \varepsilon$ gesetzt (also $\gamma \mathfrak{E}(x)$ der größte EW von $\mathfrak{C}(x)$) so entsteht offenbar

$$J_2(\boldsymbol{v}) \leq \sqrt{\gamma} J_1(\boldsymbol{v})$$

Der Vorteil von $J_2(\boldsymbol{v})$ ist zusätzlich der, dass eine Verallgemeinerung zum nichtlinearen Funktional $a(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})$ möglich ist, weil die Energienorm $a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2}$ im Nenner nicht mehr auftritt:

Definition:

$$J_3(\boldsymbol{e}_h) = \frac{a(\boldsymbol{U};\boldsymbol{e}_h) - a(\boldsymbol{U}_h;\boldsymbol{e}_h)}{b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{e}_h)^{1/2}}$$

(wieder sei $\boldsymbol{e}_h = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}_h$ und $\boldsymbol{U}$ die exakte Lösung).

6.2 Fehlerschätzer für das nichtlineare Problem der Großen Deformation

Es gilt nunmehr

$$\begin{array}{rcll} a(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) & = & f(\boldsymbol{V}) & \forall \boldsymbol{V} \in (H_0^1(\Omega))^3, \\ a(\boldsymbol{U}_h;\boldsymbol{V}) & = & f(\boldsymbol{V}) & \forall \boldsymbol{V} \in \mathbb{V}_h \text{ (FE–Raum)}, \end{array}$$

so dass für den Zähler in

$$J_3(\boldsymbol{e}_h) = (a(\boldsymbol{U};\boldsymbol{e}_h) - a(\boldsymbol{U}_h;\boldsymbol{e}_h)) \;/\; b(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{e}_h)^{1/2}$$

wieder eine Galerkin–Orthogonalität benutzt werden kann. Mit $\boldsymbol{V} = (I - I_h)\boldsymbol{e}_h$ wird also von $a(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) - a(\boldsymbol{U}_h;\boldsymbol{V})$ gestartet.

$a(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})$ muß bloß als $f(\boldsymbol{V})$ geschrieben werden, während $a(\boldsymbol{U}_h,\boldsymbol{V})$ als Summe über die Elemente und mit Gaußschem Integralsatz umgewandelt wird. Mit der Herleitung (17) wird für $a(\boldsymbol{U}_h,\boldsymbol{V})$ die Darstellung

$$\int_{\Omega_0} \overset{1}{T}(\boldsymbol{U}_h) : \mathrm{Grad}\boldsymbol{V}^T \, d\Omega_0$$

Hiermit werden die 3 Integrale besonders betrachtet:

1.

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} \sigma : \mathrm{grad}\, \boldsymbol{V}^T d\Omega_t \\ &= \int_{\Omega_0} J\sigma : \mathrm{grad}\, \boldsymbol{V}^T d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} (F \cdot \overset{1}{T}) : (\mathrm{Grad}\, \boldsymbol{V}^T \cdot F^{-1}) \, d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \overset{1}{T} : \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{V}^T d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \overset{2}{T} : (F^T \cdot \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{V}^T) \, d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \overset{2}{T} : (I + \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{U}) \cdot \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{V}^T d\Omega_0 \end{aligned} \tag{17}$$

für beliebige Vektorfunktion $\boldsymbol{V}$ mit $\boldsymbol{V}|_{\Gamma_D} = \vec{\boldsymbol{0}}$ von Ω_0.
Da $\overset{2}{T}$ symmetrisch $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} &\overset{2}{T} : (I + \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{U}) \cdot \mathrm{Grad}\boldsymbol{V}^T \\ =&\overset{2}{T} : \left[(I + \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{U}) \cdot \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{V}^T\right]^T \\ =&\overset{2}{T} : E(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) \end{aligned} \tag{18}$$

mit der Definition

$$\boxed{2E(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) = \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{V} + \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{V}^T + \mathrm{Grad}\, \cdot \boldsymbol{U} \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{V}^T + \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{V} \mathrm{Grad}\, \boldsymbol{U}^T} \tag{19}$$

2.

$$\int_{\Omega_t} \rho \vec{f} \cdot \boldsymbol{V} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho_0 \vec{f} \cdot \boldsymbol{V} d\Omega_0 \tag{20}$$

bei $\rho \cdot J = \rho_0$ (wegen Massenerhaltung). Sei $\vec{f}(x) = \vec{f}(X)$ unabhängig von der Deformation (!).

3.

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathfrak{n} \cdot \sigma \cdot \boldsymbol{V} \; d\mathcal{S}_t = \int_{\Gamma_N(t)} \mathfrak{n} \cdot \sigma \cdot \boldsymbol{V} \; d\mathcal{S}_t \tag{21}$$

da $\boldsymbol{V} = \vec{\boldsymbol{0}}$ auf $\Gamma_D \forall t$.
O.E.d.A. sei Γ_N in Ω_0 bzw. $\Gamma_N(t)$ in Ω_t charakterisiert durch:
$\eta^3 = c$ (feste Konstante) und $(\eta^1,\eta^2) \in \mathcal{P}_{\text{Neumann}}$
$\Longrightarrow \Gamma_N(t)$ hat Parametrisierung $\{x(\eta^1,\eta^2,c) : (\eta^1,\eta^2) \in \mathcal{P}_{\text{Neumann}}\}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$ sind die Flächentangentialvektoren sowie $d\mathcal{S}_t = \|\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2\| d\eta^1 d\eta^2$,

$$\mathfrak{n} = \frac{\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2\|} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{n} \cdot \sigma \cdot \boldsymbol{V} = \frac{[\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \sigma \cdot \boldsymbol{V}]}{\|\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2\|} \ ,$$

also

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Gamma_N(t)} \mathfrak{n} \cdot \sigma \cdot \boldsymbol{V} \ d\mathcal{S}_t = \int\limits_{\mathcal{P}_{\text{Neumann}}} [\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \sigma \cdot \boldsymbol{V}] \ d\eta^1 d\eta^2 \\
&= \int\limits_{\mathcal{P}_{\text{Neumann}}} \tfrac{1}{J} [F \cdot \boldsymbol{G}_1, F \cdot \boldsymbol{G}_2, F \cdot \overset{1}{T} \cdot \boldsymbol{V}] \ d\eta^1 d\eta^2 \\
&= \int\limits_{\mathcal{P}_{\text{Neumann}}} [\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2, \overset{1}{T} \cdot \boldsymbol{V}] \ d\eta^1 d\eta^2 \qquad (22) \\
&= \int\limits_{\Gamma_N} \mathfrak{N} \cdot \overset{1}{T} \cdot \boldsymbol{V} d\mathcal{S}_0, \\
&\text{wobei } \mathfrak{N} = \tfrac{\boldsymbol{G}_1 \times \boldsymbol{G}_2}{\|\boldsymbol{G}_1 \times \boldsymbol{G}_2\|} \quad \text{Außennormale im undeformierten Gebiet } \Omega_0
\end{aligned}$$

Fazit

- alles in Ω_0 zu formulieren,
- Neumann Randbedingung heißt:

$$\boxed{\mathfrak{N} \cdot \overset{1}{T} = \vec{g} \ \text{ (geg. Tractions auf } \Gamma_N \text{)}} \qquad (23)$$

- Aufgabe: gesucht ist $\boldsymbol{U}$ (mit erfüllten Dirichlet-Rb.) mit

$$\int\limits_{\Omega_0} \overset{2}{T} : E(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{V}) \ d\Omega_0 = \int\limits_{\Omega_0} \rho_0 \vec{f} \cdot \boldsymbol{V} d\Omega_0 + \int\limits_{\Gamma_N} \vec{g} \cdot \boldsymbol{V} d\mathcal{S}_0 \ \ \forall \boldsymbol{V} \in (H_0^1(\Omega_0))^3 \quad (24)$$

4 Simulation großer Deformationen bei linear elastischem Material

Aus den bisherigen Grunddefinitionen:

$$\begin{aligned}
2E(\boldsymbol{U}) &= \text{Grad}\boldsymbol{U} + \text{Grad}\boldsymbol{U}^T + \text{Grad}\boldsymbol{U} \cdot \text{Grad}\boldsymbol{U}^T \\
2E(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{V}) &= \text{Grad}\boldsymbol{V} + \text{Grad}\boldsymbol{V}^T + \text{Grad}\boldsymbol{U} \cdot \text{Grad}\boldsymbol{V}^T + \text{Grad}\boldsymbol{V} \cdot \text{Grad}\ \boldsymbol{U}^T
\end{aligned}$$

mit einer (vorläufig beliebigen) Interpolation $I_h \boldsymbol{e}_h$ des Fehlers $\boldsymbol{e}_h$ in den FE–Raum.
Die Abkürzung $\boldsymbol{v} = (I - I_h)\boldsymbol{e}_h$ ergibt nach Sumation über alle Elemente und Gaußschem Integralsatz über jedes Element:

$$a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{e}_h) = \sum_T \left(\langle R_T, \boldsymbol{v} \rangle_T - \sum_{E \subset \partial T} \langle (\sigma(\boldsymbol{u}) - \sigma(\boldsymbol{u}_h)) \cdot \mathfrak{n}, \boldsymbol{v} \rangle_E \right)$$

Durch Zusammengruppieren der inneren Kanten je zweier Elemente und Beachtung der Randbedingungen auf Γ_N ist dies dasselbe wie

$$\sum_T (\langle R_T, \boldsymbol{v} \rangle_T - \frac{1}{2} \sum_{E \subset \partial T} \langle [\sigma_h \cdot \mathfrak{n}], \boldsymbol{v} \rangle_E).$$

Bevor jetzt eine Abschätzung mit Cauchy–Schwarz erfolgt, werden besondere Gewichte verteilt: h_T sei der Durchmesser von T und $\mathfrak{E}_T = \min\limits_{x \in T} \mathfrak{E}(x)$.
Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{e}_h) \ \leq \ & \sum_T \left(\frac{h_T}{\sqrt{\mathfrak{E}_T}} \|R_T\|_T \right) \left(\frac{\sqrt{\mathfrak{E}_T}}{h_T} \|\boldsymbol{v}\|_T \right) + \\
& \frac{1}{2} \sum_{E \subset \partial T} \left(\frac{\sqrt{h_T}}{\sqrt{\mathfrak{E}_T}} \|r_E\|_E \right) \left(\frac{\sqrt{\mathfrak{E}_T}}{\sqrt{h_T}} \|\boldsymbol{v}\|_E \right)
\end{aligned}$$

Die bekannten Interpolationsfehlerabschätzungen ergeben (nach abermaligem Anwenden der Schwarzschen-Ungleichung, C_I ist die zugehörige Konstante):

$$a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{e}_h) \leq \left(\sum \eta_T^2 \right)^{1/2} \cdot C_I \left(\sum_T \langle \mathfrak{E}_T \, \text{Grad}\, \boldsymbol{e}_h^T : \text{Grad}\, \boldsymbol{e}_h \rangle_T \right)^{1/2}$$

Für den zweiten Faktor muss jetzt (P1) benutzt werden, um ihn zu $a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{e}_h)^{1/2}$ zu vergrößern.

Der Nachteil, dass die Voraussetzung (P1) notwendigerweise in die Abschätzung eingeht und deshalb die möglicherweise große Konstante C_S auftritt, kann durch ein abgeändertes Fehlerfunktional $J_2(\boldsymbol{v})$ beseitigt werden. Hierzu sei gerade

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \int\limits_{\Omega} \mathfrak{E}(x) \text{Grad}\, \boldsymbol{v}^T : \text{Grad}\, \boldsymbol{v} \, d\Omega \quad \text{gesetzt und} \quad J_2(\boldsymbol{v}) = \frac{a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}{b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})^{1/2}}.$$

Dieses Fehlerfunktional wird mit der gleichen Technik wie im Lemma 1 aber ohne die Voraussetzung (P1) abgeschätzt zu:

$$J_2(\boldsymbol{e}_h) \leq C_I (\sum \eta_T^2)^{1/2}.$$

ergibt sich obiges C_S nach

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \geq 2\mu \int_\Omega \varepsilon(\boldsymbol{u}) : \varepsilon(\boldsymbol{u})\ d\Omega \geq 2\mu C_{\text{Korn}} \int_\Omega \text{Grad}\,\boldsymbol{u}^T : \text{Grad}\,\boldsymbol{u}\ d\Omega$$

als

$$C_s = \frac{1+\nu}{C_{\text{Korn}}},$$

mit der i.a. unbekannten Konstanten der Korn'schen Ungleichung. Beachtet werden muss, dass $C_{\text{Korn}} > 0$ nur garantiert ist, wenn im Gebiet Ω ein echtes Randstück Dirichlet–Randbedingungen trägt. (D.h. man kann obige Abschätzung niemals für ein beliebiges Finites Element allein benutzen.)

Mit den üblichen Herleitungen des Residuenfehlerschätzers (vgl. [1, 3]) ergibt sich unter Benutzung von (P1) die Abschätzung

$$J_1(\boldsymbol{e}_h) \leq C_I C_S (\sum_T \eta_T^2)^{1/2}, \tag{67}$$

wobei die Variabilität von $\mathfrak{C}(x)$ bzw. $\mathfrak{E}(x)$ besondere Beachtung erfährt.

Lemma 1: Unter (P1) kann das Fehlerfunktional $J_1(\boldsymbol{e}_h)$ nach (67) abgeschätzt werden, wobei

$$\eta_T^2 = \|R_T\|_T^2 \cdot \frac{h_T^2}{\mathfrak{E}_T} + \sum_{E\subset\partial T} \|r_E\|_E^2 \frac{h_T}{\mathfrak{E}_T}$$

gilt ($\|\cdot\|_\omega$ die L_2–Norm über das Teilgebiet ω, h_T den Durchmesser des Elements T und $E \subset \partial T$ die Randteile von T also Kanten in 2D, Randflächen in 3D).
Für die beiden Residuenterme ergibt sich

$$\begin{aligned} R_T &= (\text{Div}(\sigma_h) + \vec{f})_{|_T} \\ r_E &= [\sigma_h \cdot \mathfrak{n}]_{|_E} \\ \text{mit } \sigma_h &= \mathfrak{C} : \varepsilon(\boldsymbol{u}_h). \end{aligned}$$

Der Sprungterm $[\sigma_h \cdot \mathfrak{n}]$ ist wie üblich als

$$[\sigma_h \cdot \mathfrak{n}] = \begin{cases} (\sigma_h \cdot \mathfrak{n})|_{T_1} + (\sigma_h \cdot \mathfrak{n})|_{T_2} & E = \overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \\ \sigma_h \mathfrak{n}|_T - \vec{g} & E \subset \Gamma_N \\ 0 & E \subset \Gamma_D \end{cases}$$

definiert ($\mathfrak{n}$ ist jeweils die Außennormale an das betreffende Element T bzw. T_1 oder T_2).

Bew.: Der Beweis geht wie üblich vom Zähler in $J_1(\boldsymbol{e}_h)$ aus und nutzt die Galerkin–Orthogonalität des Fehlers $\boldsymbol{e}_h$ zum FE–Raum:

$$a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{e}_h) = a(\boldsymbol{e}_h, (I - I_h)\boldsymbol{e}_h)$$

folgt:

- $E(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}) = E(\boldsymbol{U}) + E(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) + \frac{1}{2}\text{Grad}\boldsymbol{V} \cdot \text{Grad}\boldsymbol{V}^T$
- beides symmetrische Tensoren 2. Stufe
- $E(\vec{\boldsymbol{0}};\boldsymbol{V}) = \varepsilon(\boldsymbol{V})$.

Im weiteren sei $T = \overset{2}{T}$ der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor (symmetrisch!) und anstelle Ω_0 wird nur noch Ω geschrieben.

4.1 Lineare Elastizität großer Deformationen

Mit obigen Beziehungen heißt **"Lineare Elastizität großer Deformationen"**:

$$T = T(\boldsymbol{U}) = \mathfrak{C} : E(\boldsymbol{U}) \tag{25}$$

mit einem Materialtensor 4. Stufe $\mathfrak{C}$ (symmetrische positiv definite Abbildung der symmetrischen 2–Tensoren in sich).

Lösung $\boldsymbol{U}$ erfüllt:

$$a(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) = f(\boldsymbol{V}) \quad \forall \boldsymbol{V} \in (H_0^1(\Omega))^3 \tag{26}$$

mit

$$a(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) = \int_\Omega T : E(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})\ d\Omega \tag{27}$$

$$f(\boldsymbol{V}) = \int_\Omega \rho_0 \vec{f} \cdot \boldsymbol{V} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{g} \cdot \boldsymbol{V} d\mathcal{S} \tag{28}$$

also mit (25) ist (26) zu lösen mit

$$a(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) = \int_\Omega E(\boldsymbol{U}) : \mathfrak{C} : E(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})\ d\Omega \tag{29}$$

Lösungstechnik:

$t \in [0,1]$, für festes t löse $a(\boldsymbol{U}_t;\boldsymbol{V}) = tf(\boldsymbol{V})\ \forall \boldsymbol{V}$, dann $t := t + \Delta t$

$\boldsymbol{U}_t$ möglich aus Newtonverfahren, da guter Startwert $\boldsymbol{U}_{t-\Delta t}$ vorhanden
$(t = 0 : \boldsymbol{U}_0 = \vec{\boldsymbol{0}})$

Linearisierung von $a(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{V})$:

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{U} + \Delta\boldsymbol{U}; \boldsymbol{V}) &= a(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{V}) + \int_\Omega E(\boldsymbol{U}; \Delta\boldsymbol{U}) : \mathfrak{C} : E(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{V})\ d\Omega \\ &+ \int_\Omega E(\boldsymbol{U}) : \mathfrak{C} : \tfrac{1}{2}[\mathrm{Grad}\Delta\boldsymbol{U} \cdot \mathrm{Grad}\boldsymbol{V}^T + \mathrm{Grad}\boldsymbol{V} \cdot \mathrm{Grad}\Delta\boldsymbol{U}^T]\ d\Omega \\ &+ \mathcal{O}(||\Delta\boldsymbol{U}||^2) \end{aligned} \tag{30}$$

Zur Vereinfachung sei $\langle A, B\rangle = \int_\Omega B^T : A\ d\Omega$ das Skalarprodukt der Tensoren 2.Stufe, dann ist

$$\int_\Omega \frac{1}{2} T(\boldsymbol{U}) : [\mathrm{Grad}\boldsymbol{W} \cdot \mathrm{Grad}\boldsymbol{V}^T + \mathrm{Grad}\boldsymbol{V} \cdot \mathrm{Grad}\boldsymbol{W}^T] d\Omega = \langle T(\boldsymbol{U}) \cdot \mathrm{Grad}\boldsymbol{W}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{V}\rangle\,. \tag{31}$$

Also definieren:

$$a_0(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{W}, \boldsymbol{V}) = \langle \mathfrak{C} : E(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{W}), E(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{V})\rangle + \langle T(\boldsymbol{U}) \cdot \mathrm{Grad}\boldsymbol{W}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{V}\rangle\,, \tag{32}$$

und erhalten folgende geschachtelte Newton–Iteration:

Iteration: (Start: $t := \Delta t, \boldsymbol{U} := \vec{\boldsymbol{0}}$)

- Löse nach $\Delta\boldsymbol{U}$: $a_0(\boldsymbol{U}; \Delta\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = t f(\boldsymbol{V}) - a(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{V})\ \ \forall \boldsymbol{V}$
- $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{U} + \Delta\boldsymbol{U}$
- wenn $\|\Delta\boldsymbol{U}\|/\|\boldsymbol{U}\| < \varepsilon \Longrightarrow t := t + \Delta t$

Bemerkung: Start ist mit $\boldsymbol{U} = \vec{\boldsymbol{0}} \Longrightarrow a(\vec{\boldsymbol{0}}; \boldsymbol{V}) = 0\ \ \forall \boldsymbol{V}$ und:

$$a_0(\vec{\boldsymbol{0}}; \Delta\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = \int_\Omega \varepsilon(\Delta\boldsymbol{U}) : \mathfrak{C} : \varepsilon(\boldsymbol{V})\ d\Omega \tag{33}$$

wie linear elastisch kleine Deformationen.

4.2 Fast inkompressible Materialien und große Deformationen

Ausgangsgleichung ist wieder $a(\boldsymbol{U}; \boldsymbol{V}) = f(\boldsymbol{V})\ \forall \boldsymbol{V}$. Jetzt sei:

2. Eine richtige Energienorm (wie im linearen $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})^{1/2}$) haben wir nicht, deshalb soll das abzuschätzende Fehlerfunktional darauf angepaßt sein.

Beide Fakten führen zur Notwendigkeit den Fehlerschätzer auch für das lineare Problem zu überarbeiten, um beide Forderungen in einem verallgemeinerten Fehlerfunktional erfüllen zu können.
Deshalb wird am Anfang nochmals der Fehlerschätzer für das lineare Problem genauer betrachtet. Hierzu sei im weiteren mit

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v})\ \ \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega))^3$$

die lineare Aufgabe, also mit

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \varepsilon(\boldsymbol{v}) : \mathfrak{C} : \varepsilon(\boldsymbol{u})\, d\Omega$$

und $\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}\boldsymbol{u} + \mathrm{Grad}\boldsymbol{u}^T)$ bezeichnet. Das abzuschätzende Fehlerfunktional heißt $J(\boldsymbol{e}_h)$ (später indiziert für mehrere Funktionale) für die Fehlerfunktion $\boldsymbol{e}_h = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h$ ($\boldsymbol{u}$ die exakte, $\boldsymbol{u}_h$ die FE–Lösung) und sei folgendermaßen definiert:

$$J(\boldsymbol{v}) = \frac{a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}{b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})^{1/2}}.$$

Der klassische Energienorm–Fehlerschätzer benutzt $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ und sei mit $J_1(\boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})^{1/2}$ bezeichnet. Wird der Materialtensor $\mathfrak{C}$ als ortsabhängig zugelassen, so erfordert die Abschätzung von $J_1(\boldsymbol{e}_h)$ folgende Voraussetzung der Existenz einer Stabilitäts–Konstanten.

(P1): Es gibt eine positive Konstante C_S mit

$$\int_\Omega \mathfrak{E}(x)\ \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}^T : \mathrm{Grad}\,\boldsymbol{u}\ d\Omega\ \le\ C_S\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \quad \forall \boldsymbol{u} \in (H_0^1(\Omega))^3$$

Hierbei repräsentiert das skalare Feld $\mathfrak{E}(x)$ die wesentliche Größenordnung des Tensors $\mathfrak{C}(x)$ z.B. $\mathfrak{E}(x)$ ist der kleinste (Nichtnull–) Eigenwert von $\mathfrak{C}(x)$. (Beachte, dass üblicheweise $\mathfrak{C}(x)$ eine positiv definite symmetrische Abbildung aller symmetrischen Tensoren 2. Stufe auf sich ist, aber schiefsymmetrische Tensoren annuliert). Im Falle des Saint–Vernant–Kirchhoff–Materials (d.h.:

$$\mathfrak{C} : \varepsilon = 2\mu\,\varepsilon + \lambda\,(tr\varepsilon)\,I, \quad 2\mu = \mathfrak{E}/(1+\nu), \quad \lambda = 2\mu \cdot \nu/(1-2\nu)$$

mit Querkontrationszahl ν und E–modul $\mathfrak{E}$) setzen wir $\mathfrak{E}(x) = \mathfrak{E}$ und wegen

$$2\mu\ \varepsilon : \varepsilon \le \varepsilon : \mathfrak{C} : \varepsilon \le (2\mu + d\lambda)\ \varepsilon : \varepsilon$$

nacheinander eisetzen, ergibt:

$K_{\hat{i}\hat{j}} = \left\langle T \cdot \nabla\varphi_j \vec{e}_k^T, \nabla\varphi_i \vec{e}_l^T \right\rangle \qquad (\forall\ \hat{i} = (i,l), \hat{j} = (j,k)\ )$

$K_{\hat{i}\hat{j}} = tr(\vec{e}_l \nabla\varphi_i^T \cdot T \cdot \nabla\varphi_j \vec{e}_k^T)$, also der (3×3)–Block K_{ij} ist:

$$K_{ij} = I \cdot (\nabla\varphi_i^T T\ \nabla\varphi_j) \tag{60}$$

und

$$K_{el}^{(2)} = \int_{T_{el}} (\nabla\varphi_i^T T\ \nabla\varphi_j)_{i,j=1}^n\, d\Omega\ \otimes\ I_3 \tag{61}$$

bzw. mit

$$\Phi = (\varphi_1 \cdots \varphi_n) \tag{62}$$

$$\nabla\Phi = (\nabla\varphi_1 \cdots \nabla\varphi_n) \tag{63}$$

ergibt sich

$$K_{el}^{(2)} = \int_{T_{el}} \nabla\Phi_{|_x}^T T_{|_x} \nabla\Phi_{|_x} d\Omega\ \otimes\ I_3, \tag{64}$$

(Stets ist hier

$$T = T(\boldsymbol{U}) = \mathfrak{C} : E(\boldsymbol{U}) \tag{65}$$

als (3×3)-Matrix zu denken.)

Engültig ist also

$$K_{el}(\boldsymbol{U}) = K_{el}^{(1)} + K_{el}^{(2)}. \tag{66}$$

6 Fehlerschätzer und adaptive Netzsteuerung

6.1 Vorbetrachtung bei linearen Aufgaben

Die Herleitung eines Fehlerschätzers vom Typ $(\sum_{\forall T} \eta_T^2)^{1/2}$ mit elementorientierten Fehleranteilen η_T ist die Grundlage der adaptiven Verfeinerungsstrategie. Man kann dann diejenigen Elemente T verfeinern, die an obiger Summe den größten Anteil ausmachen. Die Herleitung des Fehlerschätzers soll sich einerseits am linearen Spezialfall orientieren, andererseits müssen zwei Besonderheiten Eingang finden:

1. Bei realistischem Materialverhalten (z. B. Elastoplastizität) muss der effektive Materialtensor $\mathfrak{C}$ als ortsabhängig betrachtet werden. Dies sollte eine materialabhängige Skalierung der η_T in obiger Summe nachsichziehen.

$T = T_d(\boldsymbol{U}) + pT_v$ mit skalarer Funktion $p(X)$ und vorläufig $T_d(\boldsymbol{U}) = \mathfrak{C} : E(\boldsymbol{U})$,

$$\begin{array}{rrcl} \Longrightarrow & a(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) & = & a_1(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) + b_0(\boldsymbol{U};p,\boldsymbol{V}) \\ \text{mit:} & a_1(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) & = & \int T_d : E(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})\ d\Omega \\ & b_0(\boldsymbol{U};p,\boldsymbol{V}) & = & \int p\ (T_v : E(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}))\ d\Omega \\ & & & \text{(binlinear bzgl. } p \text{ und } \boldsymbol{V}) \end{array} \tag{34}$$

Inkompressibilitätsnebenbedingung:

$$\int_\Omega (T_v : E(\boldsymbol{U})) - \kappa p)\ q\ d\Omega = 0\ \forall q, \tag{35}$$

(mit $\kappa \geq 0$), also definieren:

$$\begin{array}{rcl} b(\boldsymbol{U};q) & = & \int_\Omega (T_v : E(\boldsymbol{U})) \cdot q\, d\Omega \\ c(\boldsymbol{U};p,q) & = & \int_\Omega \kappa pq\ d\Omega \end{array} \tag{36}$$

ergibt die Aufgabe: finde $(\boldsymbol{U},p)$ mit

$$\begin{array}{rcll} a_1(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) + b_0(\boldsymbol{U};p,\boldsymbol{V}) & = & f(\boldsymbol{V}) & \forall \boldsymbol{V} \\ b(\boldsymbol{U};q) - c(\boldsymbol{U};p,q) & = & 0 & \forall q. \end{array} \tag{37}$$

Linearisierung für Newton–Verfahren:

$$a_1(\boldsymbol{U}+\Delta\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) = a_1(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) + a_0(\boldsymbol{U};\Delta\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + \mathcal{O}(\|\Delta\boldsymbol{U}\|^2) \tag{38}$$

mit

$$a_0(\boldsymbol{U};\Delta\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = \langle \mathfrak{C} : E(\boldsymbol{U};\Delta\boldsymbol{U}), E(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})\rangle + \langle T_d \cdot \mathrm{Grad}\Delta\boldsymbol{U}, \mathrm{Grad}\boldsymbol{V}\rangle\,, \tag{39}$$

analog für $b(\boldsymbol{U};q)$:

$$b(\boldsymbol{U}+\Delta\boldsymbol{U};q) = b(\boldsymbol{U};q) + b_0(\boldsymbol{U};q,\Delta\boldsymbol{U}) + \mathcal{O}(\|\Delta\boldsymbol{U}\|^2). \tag{40}$$

Damit ist das Newtonverfahren für $(\boldsymbol{U},p_{alt}) \to (\boldsymbol{U}+\Delta\boldsymbol{U}, p = p_{neu})$ die
Iteration: (Start: $t := \Delta t, \boldsymbol{U} := \vec{\mathbf{0}}$)

- löse nach $(\Delta\boldsymbol{U},p)$ (Sattelpunktsproblem)

$$\begin{array}{rcrcrcll} a_0(\boldsymbol{U};\Delta\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) & + & b_0(\boldsymbol{U};p,\boldsymbol{V}) & = & tf(\boldsymbol{V}) - a_1(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) & & \forall \boldsymbol{V} \\ b_0(\boldsymbol{U};q,\Delta\boldsymbol{U}) & - & c(\boldsymbol{U};p,q) & = & -b(\boldsymbol{U};q) & & \forall q \end{array} \tag{41}$$

- $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{U} + \Delta\boldsymbol{U}$

- $\|\Delta\boldsymbol{U}\|/\|\boldsymbol{U}\| < \varepsilon \Longrightarrow t := t + \Delta t$

5 Die Implementierung von $a_0(\boldsymbol{U};\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})$

Es sei $\boldsymbol{U}=\vec{\Phi}\underline{u},\ \boldsymbol{W}=\vec{\Phi}\underline{w},\ \boldsymbol{V}=\vec{\Phi}\underline{v}$ mit den (vektoriellen) FE-Ansatzfunktionen

$$\vec{\Phi}=(\varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_1,\ \varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_2,\ \varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_3,\ \varphi_2\vec{\boldsymbol{e}}_1,\cdots,\varphi_n\vec{\boldsymbol{e}}_3).$$

Dann ist $a_0(\boldsymbol{U};\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})=\underline{v}^T\,K(\underline{u})\,\underline{w}$ mit der $(3n\times 3n)-$Matrix $K(\underline{u})$ bei n Knoten

Berechnung von $K(\underline{u})$:

$$\underline{E}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})\\ \varepsilon_{22}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})\\ \vdots\\ 2\varepsilon_{23}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})\end{pmatrix} \tag{42}$$

Betrachten kartesische Koordinaten: $X=(x_1,x_2,x_3)^T$

$$\begin{aligned}\mathrm{Grad}\boldsymbol{U} &= \vec{\boldsymbol{e}}_i\frac{\partial}{\partial x_i}(U_j\vec{\boldsymbol{e}}_j) &(43)\\ &= \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{e}}_i\vec{\boldsymbol{e}}_j &(44)\\ \mathrm{Grad}\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{Grad}\boldsymbol{V}^T &= \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{e}}_i\vec{\boldsymbol{e}}_j\cdot\frac{\partial V_l}{\partial x_k}\vec{\boldsymbol{e}}_l\vec{\boldsymbol{e}}_k &(45)\\ &= \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_j}{\partial x_k}\vec{\boldsymbol{e}}_i\vec{\boldsymbol{e}}_k &(46)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_2(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{Grad}\boldsymbol{V}^T+\mathrm{Grad}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{Grad}\boldsymbol{U}^T)=\chi_{ik}\vec{\boldsymbol{e}}_i\vec{\boldsymbol{e}}_k &(47)\\ \text{mit }\chi_{ik} &= \frac{1}{2}\sum_j\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_j}{\partial x_k}+\frac{\partial U_j}{\partial x_k}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) &(48)\\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}_{,i}\cdot\boldsymbol{V}_{,k}+\boldsymbol{U}_{,k}\cdot\boldsymbol{V}_{,i}) &(49)\\ \underline{E}_2(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V}) &= \begin{pmatrix}\chi_{11}\\ \chi_{22}\\ \chi_{33}\\ 2\chi_{12}\\ 2\chi_{23}\\ 2\chi_{31}\end{pmatrix} &(50)\end{aligned}$$

ergibt:

$$\underline{E}_2(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{,1}^T & \partial_1\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{U}_{,2}^T & \partial_2\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{U}_{,3}^T & \partial_3\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{U}_{,1}^T\cdot\partial_2\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}_{,2}^T\cdot\partial_1\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{U}_{,2}^T\cdot\partial_3\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}_{,3}^T\cdot\partial_2\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{U}_{,3}^T\cdot\partial_1\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}_{,1}^T\cdot\partial_3\boldsymbol{V}\end{pmatrix} \tag{51}$$

Definieren die (6×3)–Matrizen

$$D(x)=\begin{pmatrix}x_1&0&0\\0&x_2&0\\0&0&x_3\\x_2&x_1&0\\0&x_3&x_2\\x_3&0&x_1\end{pmatrix}\ \text{und}\ D(\boldsymbol{U},x)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{,1}^Tx_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{U}_{,1}^Tx_2+\boldsymbol{U}_{,2}^Tx_1\\ \vdots\end{pmatrix}, \tag{52}$$

dann ist:

$$\underline{E}(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})=D(\nabla)\boldsymbol{V}+D(\boldsymbol{U};\nabla)\boldsymbol{V}. \tag{53}$$

Anwendung in FEM:
Anstelle $\boldsymbol{V}$ alle Vektoransatzfunktionen $(\varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_1,\cdots\varphi_n\vec{\boldsymbol{e}}_3)$ nacheinander einsetzen.

$$\begin{aligned}\overset{\sqcap}{E} &= \Big(\underbrace{\underline{E}(\boldsymbol{U};\varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_1)|\ldots|\underline{E}(\boldsymbol{U};\varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_3)|}\ldots\ldots\Big) &(54)\\ &= \Big(D(\nabla\varphi_1)+D(\boldsymbol{U},\nabla\varphi_1)\,\vdots\ldots\vdots\,D(\nabla\varphi_n)+D(\boldsymbol{U},\nabla\varphi_n)\Big) &(55)\end{aligned}$$

Bei Einschränkung aller Funktionen auf ein Element T_{el} (also dann n die Anzahl der Knoten im Element) folgt für die Elementmatrix Teil 1:

$$K_{el}^{(1)}=\int_{T_{el}}\overset{\sqcap}{E}{}_{|_x}^T\cdot C\cdot\overset{\sqcap}{E}{}_{|_x}\ d\Omega, \tag{56}$$

wobei C die passende (6×6)–Matrix zum Materialtensor $\mathfrak{C}$ ist.
Elementmatrix Teil 2:

$$\mathrm{Grad}(\varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_1)=\vec{\boldsymbol{e}}_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_1)=\varphi_{1,i}\vec{\boldsymbol{e}}_i\vec{\boldsymbol{e}}_1=\nabla\varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 \tag{57}$$

in

$$\langle T\cdot\mathrm{Grad}\boldsymbol{W},\mathrm{Grad}\boldsymbol{V}\rangle \tag{58}$$

für

$$\boldsymbol{W}\ \text{und}\ \boldsymbol{V}\to(\varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_1,\ \varphi_1\vec{\boldsymbol{e}}_2,\cdots,\varphi_n\vec{\boldsymbol{e}}_3) \tag{59}$$