

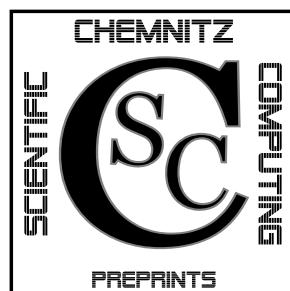


TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Anke Bucher   Uwe-Jens Görke   Peter Steinhorst  
Reiner Kreißig   Arnd Meyer

**Ein Beitrag zur adaptiven gemischten  
Finite-Elemente-Formulierung der nahezu  
inkompressiblen Elastizität bei großen  
Verzerrungen**

CSC/07-06



**Chemnitz Scientific Computing  
Preprints**

**Impressum:**

**Chemnitz Scientific Computing Preprints** — ISSN 1864-0087

(1995–2005: Preprintreihe des Chemnitzer SFB393)

**Herausgeber:**

Professuren für  
Numerische und Angewandte Mathematik  
an der Fakultät für Mathematik  
der Technischen Universität Chemnitz

**Postanschrift:**

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik  
09107 Chemnitz

**Sitz:**

Reichenhainer Str. 41, 09126 Chemnitz

<http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/>



TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

**Chemnitz Scientific Computing  
Preprints**

Anke Bucher   Uwe-Jens Görke   Peter Steinhorst  
Reiner Kreißig   Arnd Meyer

**Ein Beitrag zur adaptiven gemischten  
Finite-Elemente-Formulierung der nahezu  
inkompressiblen Elastizität bei großen  
Verzerrungen**

CSC/07-06

**Zusammenfassung**

In dieser Publikation werden konstitutive Gleichungen für die Modellierung großer, nahezu inkompressibler hyperelastischer Verzerrungen sowie deren numerische Realisierung im Rahmen einer adaptiven gemischten Finite-Elemente-Formulierung beschrieben. Mit dieser Problemklasse werden Methoden und Algorithmen zur numerischen Lösung direkter und inverser Aufgaben aus dem so genannten *multiphysics*-Bereich bereit gestellt. Dabei handelt es sich um Mehrfeldprobleme, deren gekoppelte Behandlung eine wachsende Rolle bei der hochgenauen Simulation realer physikalischer Vorgänge spielt. Der vorgestellte konstitutive Ansatz beruht auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten und einer additiven Zerlegung der freien Helmholtz-Energiedichte, die auf eine Zweifeldformulierung mit den Verschiebungen und dem Druck als Knotenvariablen führen. Die linearisierten Feldgleichungen werden aus dem Impulssatz und der Inkompressibilitätsbedingung hergeleitet und im Inkrement mit einem effektiven iterativen Löser mit hierarchischer Vorkonditionierung gleichzeitig gelöst. Zur adaptiven Steuerung der Netzverfeinerung bzw. -vergrößerung wird ein residualer a posteriori Fehlerschätzer genutzt. Effizienz und Genauigkeit der numerischen Algorithmen werden an einem illustrativen Beispiel demonstriert.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Nahezu inkompressible Elastizität bei großen Verzerrungen</b>	<b>2</b>
2.1	Kinematik . . . . .	2
2.2	Thermodynamisch konsistentes Deformationsgesetz . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Randwertaufgabe der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen in Lagrangescher Formulierung</b>	<b>6</b>
3.1	Schwache Formulierungen des Impulssatzes und der Inkompressibilitätsbedingung . . . . .	6
3.2	Linearisierung der schwachen Formulierungen . . . . .	10
3.3	Konsistente Materialmatrix und Auswahl der Funktion der freien Energiedichte . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Adaptive Finite-Elemente-Realisierung</b>	<b>15</b>
4.1	Stabile Elementformulierung und hierarchischer Löser . . . . .	15
4.2	Residualer a posteriori Fehlerschätzer und adaptive Netzanpassung	17
<b>5</b>	<b>Numerisches Beispiel</b>	<b>19</b>
5.1	Cooks Membranproblem . . . . .	19
5.2	Berechnungen mit Viereckelementen vom Typ $Q_2^{(8)} - Q_1$ . . . . .	22
5.3	Berechnungen mit Dreieckelementen vom Typ $P_2 - P_1$ . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>28</b>

Author's addresses:

Anke Bucher  
Uwe-Jens Görke  
Reiner Kreißig  
TU Chemnitz  
Fakultät für Maschinenbau  
Professur Festkörpermechanik  
Straße der Nationen 62  
D-09111 Chemnitz

Peter Steinhorst  
Arnd Meyer  
  
TU Chemnitz  
Fakultät für Mathematik  
Professur Numerische Mathematik  
Reichenhainer Str. 41  
D-09126 Chemnitz

<http://www.tu-chemnitz.de/mb/FestKoerpMech/>  
[http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/num\\_analysis/](http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/num_analysis/)

# 1 Einführung

Reale ingenieurtechnische und biologische Prozesse sind häufig durch das gleichzeitige Wirken unterschiedlicher Felder gekennzeichnet (mechanische, thermische, elektromagnetische, chemische u. a.). Die Modellierung und Simulation entsprechender Aufgabenstellungen führt auf die Lösung so genannter *multiphysics*-Probleme. Mit der verbesserten Effizienz und Zuverlässigkeit numerischer Methoden und der gestiegenen Leistungsfähigkeit der Rechentechnik wurde die zweckmäßige gekoppelte Behandlung damit verbundener Mehrfeldprobleme ermöglicht. Deren Lösung spielt eine wachsende Rolle bei der hochgenauen Simulation realer physikalischer Vorgänge.

Ausgehend von umfangreichen theoretischen und numerischen Vorarbeiten auf dem Gebiet der effizienten numerischen Simulation von nichtlinearen Einfeldproblemen der Festkörpermechanik wurde an der TU Chemnitz in enger Kooperation zwischen Bereichen aus der Mechanik und der Mathematik mit der Behandlung direkter und inverser Aufgabenstellungen aus dem *multiphysics*-Bereich begonnen. Großes Potenzial bieten dabei insbesondere die Erfahrungen auf den Gebieten der Materialtheorie bei finiten Verzerrungen, der Identifikation von Materialparametern sowie der effizienten numerischen Verfahren zur Lösung des globalen Steifigkeitssystems im Rahmen der Finite-Elemente-Methode (FEM) und der hierarchischen adaptiven Netzsteuerung.

Mit dem Ziel einer sukzessiven Erweiterung der Komplexität der zu betrachtenden Mehrfeldprobleme wurde zunächst mit der Simulation piezoelektrischer Vorgänge bei kleinen Verzerrungen (vgl. [29, 44]) und der Betrachtung großer Verzerrungen für Werkstoffe mit nahezu inkompressiblem, hyperelastischem Materialverhalten begonnen. Aufgrund vorhandener Modellanalogien dienen die zuletzt genannten Ansätze gleichzeitig als Vorarbeiten zur numerischen Behandlung von Zweiphasenmedien im Rahmen einer U/p-c-Formulierung (mit stetigem Druckverlauf über die Elementgrenzen).

Die Eigenschaft der Volumenkonstanz während der Deformationsprozesse ist besonders typisch für ungeschäumte Elastomere, spielt aber als kinematische Nebenbedingung auch bei anderen Materialklassen eine große Rolle (z. B. Elastoplastizität). Da die üblichen, verschiebungsbezogenen FE-Ansätze bei der Simulation nahezu inkompressibler Vorgänge das Materialverhalten deutlich zu steif abbilden (*locking*-Effekt), macht sich die Analyse gemischter Variationsformulierungen als Grundlage für verbesserte FE-Modelle erforderlich. Mittlerweile sind gemischte Modelle, die zu U/p-c-Formulierungen für nahezu und vollständig inkompressible elastische Materialien bei kleinen und großen Verzerrungen führen, Standard in den bekannten kommerziellen FE-Programmen. Die theoretischen Grundlagen wurden bereits vor ca. 40 Jahren von Hermann gelegt (vgl. [25]). Wenig später wird beispielsweise bei Taylor et al. [46] eine gemischte Formulierung für lineare

isotrope und anisotrope Elastizität angegeben. Basierend auf der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen volumetrischen und einen isochoren Anteil wurden u. a. von Brink und Stein [12] sowie Simo und Taylor [43] Erweiterungen auf große Verzerrungen im isotropen Fall und in den Arbeiten von Le Tallec [32], Rüter und Stein [42] sowie bei Weiss et al. [50] für anisotropes Verhalten vorgenommen. Neuere Arbeiten befassen sich insbesondere mit der Verbesserung der Lösungsstabilität durch modifizierte Variationsformulierungen und geeignete Elementansätze. Von den zahlreichen Publikationen seien hier exemplarisch die Arbeiten [2, 4, 33] genannt. Zusammenfassungen zur Theorie und Numerik gemischter Formulierungen und weitere Literaturhinweise finden sich z. B. in den Monografien von Brezzi und Fortin [11] sowie Hughes [27].

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert: Im Abschnitt 2 werden die Grundlagen der Kinematik bei großen, nahezu inkompessibel elastischen Verzerrungen präsentiert. Weiterhin wird die thermodynamisch konsistente Ableitung spezieller Deformationsgesetze diskutiert. Die grundlegenden Variationsformulierungen in Lagrangescher Betrachtungsweise als Grundlage für die gemischte FE-Aufgabe werden einschließlich ihrer konsistenten Linearisierung im Abschnitt 3 dargestellt. Ein numerisches Beispiel wird ausführlich im Abschnitt 5 analysiert, nachdem im Abschnitt vorher auf die verwendeten Elementformulierungen sowie Aspekte der räumlichen Adaptivität einschließlich der Fehlerschätzung eingegangen wurde.

## 2 Nahezu inkompressible Elastizität bei großen Verzerrungen

### 2.1 Kinematik

Für die folgenden Darstellungen wird eine materielle (Lagrangesche) Beschreibungswiese verwendet, bei der alle Größen als Funktionen der Koordinaten der Ausgangskonfiguration definiert werden. In dieser Ausgangskonfiguration (zum Zeitpunkt  $t = t_0$ ) stellt der betrachtete Körper eine Menge  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  materieller Punkte mit dem Rand  $\Gamma_0$  dar (ein Gebiet im dreidimensionalen Euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$ ). Der Rand wird in Bereiche  $\Gamma_{0D}$  mit Dirichlet-Randbedingungen und  $\Gamma_{0N}$  mit Neumann-Randbedingungen unterteilt. Dabei gilt:  $\Gamma_0 = \Gamma_{0D} \cup \Gamma_{0N}$  und  $\Gamma_{0D} \cap \Gamma_{0N} = \emptyset$ . Die materiellen Punkte werden eindeutig durch die Ortsvektoren  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  bzw. ihre Koordinaten  $(X_1, X_2, X_3)$  charakterisiert.

Zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  nimmt der Körper das Gebiet  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$  – die Momentankonfiguration – ein. Hier werden die materiellen Punkte durch die Ortsvektoren  $\mathbf{x}$  bzw. ihre Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  bestimmt. Durch das Bewegungsgesetz

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \tag{1}$$

wird für die materiellen Punkte zu jedem Zeitpunkt  $t$  ein eindeutiger Zusammenhang zwischen ihrer aktuellen Position im  $\mathbb{E}^3$  und ihrer Zuordnung im Referenzzustand hergestellt. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung zwischen Punkten des physikalischen Körpers und materiellen Punkten im  $\mathbb{R}^3$  für alle  $t$  folgt die Gültigkeit des inversen Deformationsgesetzes

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2)$$

Den Ausgangspunkt der kinematischen Betrachtungen zur Herleitung konstitutiver Gesetze bei großen Verzerrungen bildet der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = (\text{Grad } \mathbf{x})^T = (\text{Grad } \mathbf{u})^T + \mathbf{I}, \quad (3)$$

welcher ein materielles Linienelement von der Ausgangs- in die Momentankonfiguration abbildet. Hierbei stellt  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  den Verschiebungsvektor als Funktion der räumlichen Koordinaten und der Zeit dar. Mit dem Bewegungsgesetz (1) kann dieser auch als Funktion der Koordinaten der Ausgangskonfiguration und der Zeit formuliert werden:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{U}. \quad (4)$$

Dabei ist die Gleichheit zwischen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{U}$  (die unterschiedliche Vektorfunktionen sind) in dem Sinne zu verstehen, dass bei oben beschriebener Operation die speziellen Charakteristika des vektoriellen Verschiebungsfeldes vollständig erhalten bleiben. Es wird lediglich als Funktion unterschiedlicher Koordinaten dargestellt. Am Beispiel des Verschiebungsvektors wird die Zweckmässigkeit einer solchen Vorgehensweise besonders augenfällig: Als Vektor, der die Positionen ein und des selben materiellen Punktes zu unterschiedlichen Zeiten miteinander verbindet ist es egal, aus welchem Bezugssystem heraus er betrachtet wird. Es bleibt der selbe Vektor mit den selben physikalischen Eigenschaften.

Im Rahmen des Wechsels des Systems der als unabhängige Variable gewählten Ortskoordinaten ändern sich in allgemeinen krummlinigen Koordinaten adäquat sowohl die Basisvektoren als auch die Vektorkoordinaten. Eine solche Transformation kann auf beliebige Vektoren oder Tensoren angewandt werden. Sie macht sich häufig erforderlich, wenn in einer Beziehung physikalische Größen miteinander verknüpft werden sollen (z. B. im Rahmen einer Summation oder Integration), die auf unterschiedliche Punkte im  $\mathbb{E}^3$  bezogen sind. Für die Vektor- bzw. Tensorkoordinaten wird die Transformation mit dem so genannten *Shifter* ausgeführt (vgl. [38] u. a.). Der Shifter ist ein zweistufiger Zweipunktensor, dessen Koordinaten als Skalarprodukte der Basisvektoren der verschiedenen Koordinatensysteme definiert sind. In kartesischen Systemen mit zueinander parallelen Koordinatenachsen stellt der Shifter den Einheitstensor dar. Seine Anwendung auf Vektoren führt in diesem Fall lediglich zu deren Paralleltransport. Im Weiteren sollen o.E.d.A.

entsprechende kartesische Koordinatensysteme betrachtet werden. In diesem Fall vereinfachen sich zudem Ableitungen nach den Ortskoordinaten zu partiellen Ableitungen im Gegensatz zur Verwendung kovarianter Ableitungen in allgemeinen krummlinigen Koordinaten. Der Deformationsgradient (3) kann mit (4) somit auch wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{F} = (\text{Grad } \mathbf{U})^T + \mathbf{I}. \quad (5)$$

Mit Hilfe des Deformationsgradienten können unterschiedliche Verzerrungsmaße formuliert werden, die sich auf die Ausgangs- oder auch die Momentankonfiguration beziehen. Da das Materialgesetz in der Lagrangeschen Beschreibungsweise formuliert werden soll (bezüglich der Ausgangskonfiguration), sind die relevanten materiellen Verzerrungsmaße der Rechts-Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{U} + (\text{Grad } \mathbf{U})^T + \text{Grad } \mathbf{U} (\text{Grad } \mathbf{U})^T + \mathbf{I} \quad (6)$$

und der Greensche Verzerrungstensor

$$2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I} = \text{Grad } \mathbf{U} + (\text{Grad } \mathbf{U})^T + \text{Grad } \mathbf{U} (\text{Grad } \mathbf{U})^T. \quad (7)$$

Die Forderung nach nahezu inkompressiblem Materialverhalten beinhaltet, dass sich das Volumen eines materiellen Volumenelements nach Aufbringen einer mechanischen Beanspruchung nicht ändern soll. Das Volumenverhältnis vor und nach der Verformung kann über die Determinante des Deformationsgradienten ausgedrückt werden:

$$\frac{dV}{dV_0} = \det \mathbf{F} = J. \quad (8)$$

Die Eigenschaft der idealen Inkompressibilität lässt sich damit mathematisch formulieren als:

$$J \equiv 1. \quad (9)$$

Nach der üblichen Vorgehensweise (siehe z. B. [42]) wird im Folgenden für die Betrachtung volumenerhaltender Deformationsprozesse die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in zwei Anteile definiert:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_v \mathbf{F}_d. \quad (10)$$

Hierbei präsentiert  $\mathbf{F}_v$  den Anteil der Deformation, der zu einer reinen Volumenänderung des materiellen Volumenelements führt, wohingegen der Anteil  $\mathbf{F}_d$  die reine Gestaltänderung widerspiegelt. Diese Aufteilung wurde zuerst von Flory [21] vorgeschlagen und wird daher häufig als Flory-Split bezeichnet. Bezüglich des volumetrischen Anteils gilt die Definition:

$$\mathbf{F}_v \stackrel{\text{def}}{=} J^{\frac{1}{3}} \mathbf{I} \quad (J \approx 1). \quad (11)$$



Daraus folgt für den isochoren Anteil des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_d = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \det \mathbf{F}_d \equiv 1. \quad (12)$$

Mit diesen Definitionen kann ein isochorer Anteil des Rechts-Cauchy-Green Tensors formuliert werden.

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{F}_d^T \mathbf{F}_d = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C} \quad (13)$$

## 2.2 Thermodynamisch konsistentes Deformationsgesetz

Den Ausgangspunkt zur Ableitung des Deformationsgesetzes für nahezu inkompressible Materialien bildet die Clausius-Duhem-Ungleichung – eine Kombination der ersten beiden Hauptsätze der Thermodynamik. Im isothermen Fall nimmt sie für elastisches Materialverhalten die Form

$$-\varrho_0 \dot{\bar{\psi}}(\mathbf{C}) + \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{C}} \geq 0 \quad (14)$$

bezüglich der Ausgangskonfiguration an. Hier stellen  $\varrho_0$  die Dichte,  $\bar{\psi}$  die freie Helmholtz-Energiedichte pro Masseinheit sowie  $\mathbf{T}$  den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor dar. Wie üblich bezeichnet ein Punkt über einer Variable deren materielle Zeitableitung.

Da elastische Deformationen vollständig reversible Prozesse darstellen, gilt in (14) das Gleichheitszeichen. In diesem Fall kann das folgende Deformationsgesetz der Hyperelastizität abgeleitet werden:

$$\mathbf{T} = 2\varrho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (15)$$

Wie in der klassischen Kontinuumsmechanik wird die freie Energiedichte als isotrope Tensorfunktion eines geeigneten Verzerrungsmaßes betrachtet. Im Fall des nahezu inkompressiblen Materialverhaltens wird angenommen (siehe z. B. [42]), dass diese additiv in einen deviatorischen (isochoren) Anteil  $\psi_d$ , der vom Verzerrungstensor  $\mathbf{C}_d$  und einen volumetrischen Anteil, der von  $J$  abhängt, zerlegt werden kann:

$$\psi = \psi_d(\mathbf{C}_d) + \tilde{\psi}_v(J). \quad (16)$$

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, den volumetrischen Anteil der freien Energiedichte in der Form  $\frac{1}{2} \kappa \psi_v^2(J)$  zu definieren. Hierbei stellt  $\kappa$  den Kompressionsmodul dar, der im Fall von kleinen Verzerrungen aus  $\kappa = \lambda + \frac{2}{3} \mu$  (mit den Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ ) ermittelt werden kann. Zusätzlich besitzt  $\psi_v$  die Eigenschaft

$$\psi_v(J = 1) = 0. \quad (17)$$

Damit folgt für (16) die ausführliche Darstellung:

$$\psi = \psi_d(\mathbf{C}_d) + \frac{1}{2}\kappa \psi_v^2(J) = \psi_d(I(\mathbf{C}_d), II(\mathbf{C}_d)) + \frac{1}{2}\kappa \psi_v^2(J). \quad (18)$$

Mit der Definition des hydrostatischen Drucks  $p$

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \kappa \psi_v \quad (19)$$

im Sinne einer konstitutiven Annahme wird unter Berücksichtigung von (18) aus Gleichung (15) die hyperelastische Beziehung

$$\mathbf{T} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \psi_d}{\partial \mathbf{C}_d} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}_d}{\partial \mathbf{C}} + 2\kappa \psi_v \frac{\partial \psi_v}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{T}_d + \mathbf{T}_v \quad (20)$$

für den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor bei nahezu inkompressiblem Materialverhalten abgeleitet. Bezüglich der Teilspannungen gilt dabei:

$$\mathbf{T}_d = 2J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial \psi_d}{\partial \mathbf{C}_d} \cdot \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (21a)$$

$$\mathbf{T}_v = p \mathbf{S}_v \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}_v = J \frac{\partial \psi_v}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}. \quad (21b)$$

### 3 Randwertaufgabe der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen in Lagrangescher Formulierung

Das Randwertproblem der nahezu inkompressiblen Elastizität wird in Analogie zu den Ansätzen in [12, 42] und anderer Autoren als gemischtes Zweifeldproblem definiert. Ausgangspunkt für die Herleitung der Feldgleichungen in  $\Omega_0$  sind die Variationsformulierungen der Gleichgewichtsbedingungen sowie einer Nebenbedingung zur Erfüllung der Inkompressibilität.

#### 3.1 Schwache Formulierungen des Impulssatzes und der Inkompressibilitätsbedingung

Der Impulssatz ist originär in der Momentankonfiguration definiert. Seine lokale Formulierung

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \varrho(\mathbf{k} - \mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (22)$$

basiert mit dem Cauchyschen Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , den massebezogenen Kräften  $\mathbf{k}$  und der Beschleunigung  $\mathbf{a}$  auf räumlichen Größen. Mit Hilfe tensoralgebraischer und tensoranalytischer Betrachtungen (vgl. [24]) kann daraus die folgende Formulierung abgeleitet werden:

$$\text{Div}(\mathbf{T}\mathbf{F}^T) + \varrho_0(\mathbf{k} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}. \quad (23)$$

Die beiden Summanden dieser Beziehung repräsentieren Vektoren, die auch nach der erfolgten Umformung als räumliche Größen definiert sind. Mit dem Spannungstensor  $\mathbf{T}$  ist jedoch in (23) bereits eine materielle Größe enthalten. Zudem soll im Sinne der angestrebten Lagrangeschen Beschreibungsweise eine Integration über das Volumen des Körpers im Ausgangszustand ausgeführt werden. Mit der in Abschnitt 2.1 vorgestellten Transformation bezüglich der als unabhängige Variable fungierenden Koordinaten unter Verwendung des Shifters folgt aus (23) eine Beziehung in Größen, die Funktionen der Koordinaten des Ausgangszustandes darstellen:

$$\text{Div}(\mathbf{T}\mathbf{F}^T) + \varrho_0(\mathbf{K} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (24)$$

Die ausführliche Herleitung dieser Beziehung für allgemeine krummlinige Koordinaten ist in [24] angegeben. Dabei gilt die Darstellung (5) für den Deformationsgradienten. Es soll nochmals betont werden, dass in (23) und (24) Vektoren mit den selben physikalischen Charakteristika auftreten – sie sind lediglich in unterschiedlichen Vektorräumen dargestellt.

Nach Multiplikation von (24) mit einer beliebigen Testfunktion  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{X})$  (wobei gilt:  $\mathbf{V} \in (H_0^1(\Omega_0))^3$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$  auf  $\Gamma_{0D}$ ) und Integration über das Volumen des undeformierten Gebietes  $\Omega_0$  folgt aus (24) die gewichtete Form der Gleichgewichtsbedingungen – deren schwache Formulierung:

$$\int_{\Omega_0} \text{Div}(\mathbf{T}\mathbf{F}^T) \mathbf{V} \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \varrho_0(\mathbf{K} - \mathbf{A}) \mathbf{V} \, d\Omega_0 = \mathbf{0}. \quad (25)$$

Wird die Testfunktion als virtuelle Verschiebung interpretiert, stellt (25) das Prinzip der virtuellen Arbeit dar.

Mit der Regel zur Berechnung der Divergenz eines einfachen Skalarproduktes aus einem beliebigen zweistufigen symmetrischen Tensor  $\mathbf{Z}$  und einem beliebigen Vektor  $\mathbf{W}$  als Funktionen der Koordinaten der Ausgangskonfiguration

$$\text{Div}(\mathbf{Z}\mathbf{W}) = (\text{Div} \mathbf{Z}) \mathbf{W} + \mathbf{Z} \cdot \cdot (\text{Grad} \mathbf{W})^T \quad (26)$$

$$\text{mit Grad } \mathbf{W} = \mathbf{G}^K \frac{\partial (W^I \mathbf{G}_I)}{\partial X^K} \quad (27)$$

kann das erste Integral in Gleichung (25) auch geschrieben werden als

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \text{Div} (\mathbf{T} \mathbf{F}^T) \mathbf{V} \, d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \text{Div} (\mathbf{T} \mathbf{F}^T \mathbf{V}) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{T} \mathbf{F}^T \cdot (\text{Grad} \mathbf{V})^T \, d\Omega_0 \end{aligned} \quad (28)$$

Nach dem Integralsatz von Gauß-Ostrogradski gilt:

$$\int_{\Omega_0} \text{Div} (\mathbf{T} \mathbf{F}^T \mathbf{V}) \, d\Omega_0 = \int_{\Gamma_{0N}} \mathfrak{N} (\mathbf{T} \mathbf{F}^T \mathbf{V}) \, d\Gamma_0 \quad (29)$$

mit dem nach außen gerichteten Normalenvektor  $\mathfrak{N}$  auf dem Rand des Gebietes  $\Omega_0$ . Damit lautet die schwache Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen

$$\int_{\Gamma_{0N}} \mathfrak{N} \mathbf{T} \mathbf{F}^T \mathbf{V} \, d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{T} \mathbf{F}^T \cdot (\text{Grad} \mathbf{V})^T \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \varrho_0 (\mathbf{K} - \mathbf{A}) \mathbf{V} \, d\Omega_0 = \mathbf{0}. \quad (30)$$

Bei Betrachtung quasistatischer Probleme und Vernachlässigung volumenförmiger Kräfte sowie Beachtung von Rechenregeln für einfache und doppelte Überschiebungen von Tensoren zweiter Stufe vereinfacht sich (30) zu

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T (\text{Grad} \mathbf{V})^T \, d\Omega_0 = \int_{\Gamma_{0N}} \mathfrak{N} \mathbf{T} \mathbf{F}^T \mathbf{V} \, d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_{0N}} \bar{\mathbf{R}} \mathbf{V} \, d\Gamma_0 \quad (31)$$

mit der gegebenen äußeren Belastung  $\bar{\mathbf{R}}$  am Neumann-Rand. Unter Berücksichtigung der Beziehung  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + (\text{Grad} \mathbf{U})^T$  folgt daraus:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{T} \cdot [(\text{Grad} \mathbf{V})^T + \text{Grad} \mathbf{U} (\text{Grad} \mathbf{V})^T] \, d\Omega_0 = \int_{\Gamma_{0N}} \bar{\mathbf{R}} \mathbf{V} \, d\Gamma_0. \quad (32)$$

Wegen  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$  ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  beliebige zweistufige Tensoren) und der Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors gilt:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}^T = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T) \quad (33)$$

$$\text{mit } \mathbf{Y} = (\text{Grad} \mathbf{V})^T + \text{Grad} \mathbf{U} (\text{Grad} \mathbf{V})^T.$$

Folglich kann Gleichung (32) mit der zusätzlichen Definition

$$\begin{aligned} 2 \mathbf{E} (\mathbf{U}; \mathbf{V}) &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &(\text{Grad} \mathbf{V})^T + \text{Grad} \mathbf{V} + \text{Grad} \mathbf{U} (\text{Grad} \mathbf{V})^T + \text{Grad} \mathbf{V} (\text{Grad} \mathbf{U})^T \end{aligned} \quad (34)$$

wie folgt dargestellt werden:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \, d\Omega_0 = \int_{\Gamma_{0,N}} \bar{\mathbf{R}} \mathbf{V} \, d\Gamma_0. \quad (35)$$

Aus (20) sowie (21a), (21b) wird deutlich, dass im Falle nahezu inkompressibel elastischen Materialverhaltens der Spannungstensor als Funktion der Verzerrungen (und damit der Verschiebungen  $\mathbf{U}$ ) sowie des hydrostatischen Druckes  $p$  definiert ist. Das gemischte Randwertproblem besteht somit in der Ermittlung der Felder für  $\mathbf{U}$  und  $p$  in  $\Omega_0$ . Zur Lösung dieser Aufgabe ist die Beziehung (35) nicht ausreichend. Aus diesem Grunde wird im Weiteren eine zusätzliche Nebenbedingung zur Erfassung der Inkompressibilität betrachtet. Dabei wird nach Definition (19) die Annahme getroffen, dass in jedem materiellen Punkt des Körpers der hydrostatische Druck eine Funktion der Volumenänderung sei:

$$p = \kappa \psi_v(J). \quad (36)$$

Wird diese Beziehung mit einer beliebigen Testfunktion  $q \in L_2(\Omega_0)$  multipliziert und anschließend eine Integration über das Volumen des undeformierten Gebietes  $\Omega_0$  ausgeführt, folgt

$$\int_{\Omega_0} \left[ \psi_v(J) - \frac{1}{\kappa} p \right] q \, d\Omega_0 = 0. \quad (37)$$

Für  $\kappa \rightarrow \infty$  reduziert sich (37) auf die schwache Formulierung der Beziehung  $\psi_v(J) = 0$ , was mit der Eigenschaft (17) die Inkompressibilitätsbedingung repräsentiert. Bezüglich der Testfunktion  $q$  ist zu erwähnen, dass sie, wie auch der hydrostatische Druck selbst, keinerlei expliziten Randbedingungen genügen muss.

Mit den Beziehungen (35), (37) sowie unter Berücksichtigung der Spannungszерlegung (20) besteht somit die gemischte Randwertaufgabe der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen in der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$a_0(\mathbf{U}; \mathbf{V}) + b_0(\mathbf{U}; p, \mathbf{V}) = f(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in (H_0^1(\Omega_0))^3 \quad (38a)$$

$$b_1(\mathbf{U}; q) - c_0(p, q) = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega_0) \quad (38b)$$

bezüglich der Feldgrößen Verschiebung  $\mathbf{U}$  und hydrostatischer Druck  $p$ . Dabei gilt für die einzelnen Teile des Systems:

$$a_0(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{T}_d(\mathbf{U}) \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) d\Omega_0 \quad (39a)$$

$$b_0(\mathbf{U}; p, \mathbf{V}) = \int_{\Omega_0} p(\mathbf{S}_v(\mathbf{U}) \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V})) d\Omega_0 \quad (39b)$$

$$f(\mathbf{V}) = \int_{\Gamma_{0N}} \bar{\mathbf{R}}\mathbf{V} d\Gamma_0 \quad (39c)$$

$$b_1(\mathbf{U}; q) = \int_{\Omega_0} \psi_v(J(\mathbf{U})) q d\Omega_0 \quad (39d)$$

$$c_0(p, q) = \int_{\Omega_0} \frac{1}{\kappa} p q d\Omega_0. \quad (39e)$$

## 3.2 Linearisierung der schwachen Formulierungen

Zur Lösung des Gleichungssystems (38a) und (38b) mit Hilfe des Newton-Verfahrens macht sich dessen Linearisierung erforderlich. Dazu ist zu bemerken, dass lediglich die Abhängigkeit von  $\mathbf{U}$  in  $a_0(\mathbf{U}; \mathbf{V})$ ,  $b_0(\mathbf{U}; p, \mathbf{V})$  sowie  $b_1(\mathbf{U}; q)$  nichtlinearen Charakter trägt. Hinsichtlich  $\mathbf{V}$ ,  $q$  und auch  $p$  bestehen im System (38a), (38b) lineare Abhängigkeiten. Im Weiteren werden jedoch Taylor-Entwicklungen bezüglich beider Feldvariablen  $\mathbf{U}$  und  $p$  betrachtet. Diese Vorgehensweise ist nicht zwingend erforderlich (eine Linearisierung bezüglich  $\mathbf{U}$  ist ausreichend, vgl. [34]), wird hier jedoch im Sinne einer konsequent inkrementellen FE-Formulierung bevorzugt.

Der Spannungstensor  $\mathbf{T}$  kann im Fall von nahezu inkompressiblem elastischen Materialverhalten als nichtlineare Funktion des Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  und des hydrostatischen Drucks  $p$  angesehen werden. Hierbei ist der Verzerrungstensor wiederum eine nichtlineare Funktion der Verschiebungen  $\mathbf{U}$ . Ein expliziter Zusammenhang zwischen  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{U}$  kann jedoch nur in speziellen Fällen angegeben werden (z. B. bei homogenen Deformationen). Es gilt:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{E}, p) = \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p) = \mathbf{T}(\mathbf{U}, p). \quad (40)$$

Gegeben sei die Lösung des Zweifeldproblems  $(\mathbf{U}_t, p_t) = (\mathbf{U}, p)$  zu einem Zeitpunkt  $t$ , gesucht ist die Lösung des gemischten Problems  $(\mathbf{U}_{t+\Delta t}, p_{t+\Delta t}) = (\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}, p + \Delta p)$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ . Die Linearisierung von (40) erfolgt über eine Taylor-Entwicklung, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}), p + \Delta p) \\
&= \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p) + \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p)}{\partial \mathbf{E}} \cdot \Delta \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p)}{\partial p} \Delta p. \quad (41)
\end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} [(\text{Grad}\mathbf{U})^T + \text{Grad}\mathbf{U} + \text{Grad}\mathbf{U}(\text{Grad}\mathbf{U})^T] \quad (42a)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}) &= \frac{1}{2} [(\text{Grad}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}))^T + \text{Grad}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}) + \\
&\quad \text{Grad}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U})(\text{Grad}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}))^T] \quad (42b)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}) - \mathbf{E}(\mathbf{U}) \\
&= \frac{1}{2} ((\text{Grad}\Delta\mathbf{U})^T + \text{Grad}\Delta\mathbf{U} + \text{Grad}\mathbf{U}(\text{Grad}\Delta\mathbf{U})^T \\
&\quad + \text{Grad}\Delta\mathbf{U}(\text{Grad}\mathbf{U})^T + \text{Grad}\Delta\mathbf{U}(\text{Grad}\Delta\mathbf{U})^T) \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{U}; \Delta\mathbf{U}) + \frac{1}{2} \text{Grad}\Delta\mathbf{U}(\text{Grad}\Delta\mathbf{U})^T. \quad (43)
\end{aligned}$$

Weiterhin folgt für  $\mathbf{E}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}; \mathbf{V})$  die Beziehung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}; \mathbf{V}) &= \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \\
&\quad + \frac{1}{2} [\text{Grad}\Delta\mathbf{U}(\text{Grad}\mathbf{V})^T + \text{Grad}\mathbf{V}(\text{Grad}\Delta\mathbf{U})^T]. \quad (44)
\end{aligned}$$

Mit (41), (43) sowie (44) ergibt sich für die linke Seite der schwachen Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen (35) bei Vernachlässigung von Termen, die mindestens quadratisch in den inkrementellen Größen  $\Delta\mathbf{U}$  und  $\Delta p$  sind, die Beziehung

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}), p + \Delta p) \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}; \mathbf{V}) d\Omega_0 \\
&= \int_{\Omega_0} \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p) \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) d\Omega_0 \\
&+ \int_{\Omega_0} \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \cdot \cdot \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p)}{\partial \mathbf{E}} \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \Delta\mathbf{U}) d\Omega_0 \\
&+ \int_{\Omega_0} \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p) \cdot \cdot \text{Grad} \Delta\mathbf{U} (\text{Grad} \mathbf{V})^T d\Omega_0 \\
&+ \int_{\Omega_0} \mathbf{S}_v(\mathbf{E}(\mathbf{U})) \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \Delta p d\Omega_0 \tag{45}
\end{aligned}$$

Die Randkräfte  $\bar{\mathbf{R}}$  (vgl. (31)) werden im inkrementellen Lösungsprozess immer mit ihrem aktuellen Wert zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  berücksichtigt.

Für die Linearisierung der schwachen Formulierung der Inkompressibilitätsbedingung (37) zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$

$$\int_{\Omega_0} \left[ \psi_v(J(\mathbf{E}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}))) - \frac{1}{\kappa} p - \frac{1}{\kappa} \Delta p \right] q d\Omega_0 = 0 \tag{46}$$

wird die Taylor-Entwicklung von  $\psi_v$  bis zum linearen Glied verwendet:

$$\psi_v(J(\mathbf{E}(\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}))) = \psi_v(J(\mathbf{E}(\mathbf{U}))) + \frac{\partial \psi_v(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\mathbf{E}(\mathbf{U})} \cdot \cdot \Delta \mathbf{E} . \tag{47}$$

Damit folgt unter Berücksichtigung von (21b), (43) sowie der Beziehung

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \sqrt{\det \mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = J \mathbf{C}^{-1} \tag{48}$$

bei erneuter Vernachlässigung von Termen, die mindestens quadratisch in inkrementellen Größen  $\Delta\mathbf{U}$  und  $\Delta p$  sind, die linearisierte Form von (46):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} \left[ \mathbf{S}_v(\mathbf{E}(\mathbf{U})) \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \Delta\mathbf{U}) - \frac{1}{\kappa} \Delta p \right] q d\Omega_0 \\
&= - \int_{\Omega_0} \left[ \psi_v(J(\mathbf{E}(\mathbf{U}))) - \frac{1}{\kappa} p \right] q d\Omega_0 . \tag{49}
\end{aligned}$$



In ihrer linearisierten Form besteht somit die gemischte Randwertaufgabe der nahezu inkompressiblen Elastizität bei finiten Verzerrungen (Iterationsschritt im Lastschritt) in der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{U}; \Delta \mathbf{U}, \mathbf{V}) + b(\mathbf{U}; \Delta p, \mathbf{V}) &= \bar{f}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in (H_0^1(\Omega_0))^3 & (50a) \\
 b(\mathbf{U}; \Delta \mathbf{U}, q) - c(\Delta p, q) &= g(\mathbf{U}; q) \quad \forall q \in L_2(\Omega_0) & (50b)
 \end{aligned}$$

bezüglich der Feldgrößeninkremente  $(\Delta \mathbf{U}, \Delta p)$ . Dabei gilt unter Verwendung der in (39a)-(39e) angegebenen Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{U}; \Delta \mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \cdot \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p)}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \Delta \mathbf{U}) d\Omega_0 \\
 &+ \int_{\Omega_0} \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p) \cdot \text{Grad} \Delta \mathbf{U} (\text{Grad} \mathbf{V})^T d\Omega_0 & (51a)
 \end{aligned}$$

$$b(\mathbf{U}; \Delta p, \mathbf{V}) = b_0(\mathbf{U}; \Delta p, \mathbf{V}) \quad (51b)$$

$$b(\mathbf{U}; \Delta \mathbf{U}, q) = b_0(\mathbf{U}; q, \Delta \mathbf{U}) \quad (51c)$$

$$c(\Delta p, q) = c_0(\Delta p, q) \quad (51d)$$

$$\bar{f}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = f(\mathbf{V}) - a_0(\mathbf{U}; \mathbf{V}) - b_0(\mathbf{U}; p, \mathbf{V}) \quad (51e)$$

$$g(\mathbf{U}; q) = c_0(p, q) - b_1(\mathbf{U}; q). \quad (51f)$$

Nach Ortsdiskretisierung kann das System (50a), (50b) in geeigneten Ansatzteilräumen  $\Delta \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{V}_h^3 \subset \mathbb{V}^3$  und  $\Delta p, q \in \mathbb{X}_h \subset \mathbb{X}$  im Rahmen einer gemischten FE-Formulierung gelöst werden (siehe dazu u. a. [34, 42]).

### 3.3 Konsistente Materialmatrix und Auswahl der Funktion der freien Energiedichte

Der elastische Tangentenmodul

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \mathbf{E}} + p \frac{\partial \mathbf{S}_v}{\partial \mathbf{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{D}}_4 \quad (52)$$

ist Resultat der konsistenten Linearisierung von (40). Im Fall der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen ergibt er sich bezüglich materieller Größen nach einer aufwändigen, aber expliziten Ableitung des Deformationsgesetzes der Hyperelastizität (20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \mathbf{E}} &= -\frac{2}{3} J^{-\frac{2}{3}} (\mathbf{T}_d \otimes \mathbf{C}_d^{-1} + \mathbf{C}_d^{-1} \otimes \mathbf{T}_d) \\ &+ \frac{4}{3} J^{-\frac{4}{3}} \left( \frac{\partial \psi_d}{\partial \mathbf{C}_d} \cdot \mathbf{C}_d \right) \left( \mathbf{C}_d^{-1} \tilde{\mathbf{I}}_4 \mathbf{C}_d^{-1} - \frac{1}{3} \mathbf{C}_d^{-1} \otimes \mathbf{C}_d^{-1} \right) \\ &+ 4J^{-\frac{4}{3}} \left( \tilde{\mathbf{I}}_4 - \frac{1}{3} \mathbf{C}_d^{-1} \otimes \mathbf{C}_d \right) \cdot \frac{\partial^2 \psi_d}{\partial \mathbf{C}_d^2} \cdot \left( \tilde{\mathbf{I}}_4 - \frac{1}{3} \mathbf{C}_d \otimes \mathbf{C}_d^{-1} \right) \quad (53a) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_v}{\partial \mathbf{E}} = J \left( \frac{\partial \psi_v}{\partial J} + J \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial J^2} \right) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2J \frac{\partial \psi_v}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{I}}_4 \mathbf{C}^{-1}. \quad (53b)$$

Bei der Herleitung fanden die Beziehung

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial(\dots)}{\partial \mathbf{C}} \quad (54)$$

sowie die Definition

$$\tilde{\mathbf{I}}_4 = \delta_I^K \delta_L^J \mathbf{G}^I \otimes \mathbf{G}_J \otimes \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}^L \quad (55)$$

eines vierstufigen isotropen Tensors mit den Koordinaten des Kronecker-Symbols  $\delta$  Berücksichtigung.

Entsprechend der additiven Zerlegung der freien Energiedichte (18) hängt deren deviatorischer Anteil lediglich von den zwei ersten Hauptinvarianten

$$I(\mathbf{C}_d) = \mathbf{C}_d \cdot \mathbf{G}^{-1} \quad (56a)$$

$$II(\mathbf{C}_d) = \frac{1}{2} [(I(\mathbf{C}_d))^2 - \mathbf{C}_d \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{C}_d \mathbf{G}^{-1}] \quad (56b)$$

des isochoren Anteils  $\mathbf{C}_d$  des Rechts-Cauchy-Green Tensors ab. Mit  $\mathbf{G}^{-1}$  ist dabei der Metriktensor der dualen Basis bezeichnet. Folglich sind für die Ermittlung des elastischen Tangentenmoduls die materialunabhängigen Ableitungen

$$\frac{\partial I(\mathbf{C}_d)}{\partial \mathbf{C}_d} = \mathbf{G}^{-1} \quad (57a)$$

$$\frac{\partial II(\mathbf{C}_d)}{\partial \mathbf{C}_d} = \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{C}_d \cdot \mathbf{G}^{-1}) - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}_d \mathbf{G}^{-1} \quad (57b)$$

$$\frac{\partial^2 II(\mathbf{C}_d)}{\partial \mathbf{C}_d^2} = \mathbf{G}^{-1} \otimes \mathbf{G}^{-1} - \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{I}}_4 \mathbf{G}^{-1} \quad (57c)$$

zu berechnen.

Für den volumetrischen Anteil der freien Energiedichte findet sich u. a. bei Brink und Stein [12] eine ausführliche Liste konkreter Formulierungen. Hier soll der vielfach diskutierte Ansatz

$$\psi_v(J) = \ln J \quad (58)$$

verwendet werden. Bezüglich der Teilspannung  $\mathbf{T}_v$  führt er in der Ausgangskonfiguration auf die einfache Beziehung  $\mathbf{T}_v = p\mathbf{C}^{-1}$ .

Im Laufe mehrerer Dekaden wurde eine Vielzahl von Arbeiten zur Hyperelastizität und der Auswahl geeigneter Funktionen für die freie Energiedichte veröffentlicht. Umfangreiche Analysen zu speziellen invariantenbasierten Modellen werden beispielsweise in [39] vorgestellt. Ein in der Elastomermechanik häufig verwendeter Ansatz basiert auf frühen Arbeiten von Mooney [37] und Rivlin [41]:

$$\psi_d = c_{10} (I(\mathbf{C}_d) - 3) + c_{01} (II(\mathbf{C}_d) - 3) \quad (59)$$

mit den Materialparametern  $c_{10}$  und  $c_{01}$ . Für den Test der entwickelten Modelle und Algorithmen sowie den Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur wird hier im Weiteren ein Spezialfall des Mooney-Rivlin-Materials, das so genannte Neo-Hooke-Material, mit der Funktion

$$\psi_d = c_{10} (I(\mathbf{C}_d) - 3) \quad (60)$$

genutzt.

## 4 Adaptive Finite-Elemente-Realisierung

### 4.1 Stabile Elementformulierung und hierarchischer Löser

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gemischter Formulierungen (hier: der nach dem Ort diskretisierten Aufgabe (50a), (50b)) ist mit der Definition der so

genannten Inf-Sup-Bedingung (auch LBB-Bedingung – hier in ihrer diskretisierten Form)

$$\sup_{\mathbf{V}_h \in \mathbb{V}_h^3} \frac{b(q_h, \mathbf{V}_h)}{\|\mathbf{V}_h\|_{\mathbb{V}^3}} \geq \beta \|q_h\|_{\mathbb{X}} \quad \forall q_h \in \mathbb{X}_h \quad (61)$$

als Stabilitätskriterium für FE-Ansätze mit unterschiedlichen Teilräumen  $\mathbb{V}_h^3$  und  $\mathbb{X}_h$  verbunden. Dabei stellt  $\beta$  eine Konstante dar, die von der Diskretisierung und weiteren Parametern, wie Elementanisotropie, Materialkenngrößen u. a., abhängt. Wie bei Bathe [7] ausführlich beschrieben, wurde ihre Herleitung ursprünglich für kleine Verzerrungen vorgenommen. Untersuchungen zur Stabilität der FE-Lösung bei großen, isotropen elastischen Verzerrungen finden sich in Ball [5], Charrier et al. [18] und bei Chen et al. [19].

Wegen der strukturellen Analogie mit dem gut untersuchten Stokes-Problem gelten die dort verwendeten  $H^1$ - bzw.  $L_2$ -Normen bezüglich der Teilräume  $\mathbb{V}^3$  und  $\mathbb{X}$  auch für die Randwertaufgabe der linearen nahezu inkompressiblen Elastizität sowie deren Verallgemeinerung auf große Verzerrungen. Für diese Problemklassen ist eine Vielzahl stabiler Diskretisierungen bekannt (vgl. u. a. [3, 7, 11, 22, 23, 47]).

Die oben vorgestellte Vorgehensweise zur numerischen Lösung von Anfangs-Randwert-Aufgaben der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen wurde im hauseigenen FE-Programm SPC-PM2AdNIMix realisiert. Dieses basiert auf der an der TU Chemnitz entwickelten Programmversion SPC-PMA2dNI zur Simulation des mechanischen Verhaltens hyperelastischer (im Fall ihrer Kompressibilität) und anisotroper elastisch-plastischer Werkstoffe bei großen Verzerrungen (vgl. [14, 31]). Dabei konnte besonders im Sinne einer adaptiven Strategie in effektiver Weise auf die hierarchischen Datenstrukturen, deren intelligente Ausnutzung durch den Gleichungssystemlöser sowie die offenen Materialschnittstellen aufgebaut werden. Größere Veränderungen waren naturgemäß mit der Realisierung eines Löser für Mehrfeldprobleme und geeigneter Elementroutinen verbunden. Zur effektiven Nutzung bisheriger Programmstrukturen wurde die Ortsdiskretisierung für das gemischte Problem mit so genannten Taylor-Hood-Elementen realisiert, die eine besonders gute Kompatibilität mit den vorhandenen hierarchischen Datenstrukturen aufweisen.

Taylor and Hood schlugen in [45] das biquadratisch-bilineare Viereckelement  $\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_1$  zur stabilen numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung vor und wiesen für diesen Fall die Erfüllung der LBB-Bedingung nach. Sie verwendeten dabei herkömmliche polynomiale Ansatzfunktionen, die jedoch bezüglich der dualen Variable (hydrostatischer Druck) einen Polynomgrad niedriger sind als für die primäre Variable (Geschwindigkeit beim Strömungsmechanik-Problem, Verschiebungsfreiheitsgrade in der nahezu inkompressiblen Elastizität). Das Element zeichnet sich dadurch aus, dass es die Stetigkeit der Lösung sowohl für die primäre als auch für die duale Variable über benachbarte Elemente hinweg ga-

rantiert (U/p-c-Formulierung, vgl. auch [7]). Diese Eigenschaft gilt ebenso für die gesamte, später aus diesem Ansatz entwickelte Elementklasse. So schlugen Taylor und Hood selbst beispielsweise in [26] ein Viereckelement  $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$  vor, das sich vom ursprünglichen Ansatz durch Verzicht auf den Knoten in der Elementmitte unterscheidet. Damit sind die Ansätze für die primäre Variable nicht vollständig biquadratisch, sondern vom Serendipity-Typ.

Die von Taylor und Hood präsentierte Kombination von Ansatzräumen, für die im ebenen Fall mit dem Element  $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$  auch eine Dreieckversion sowie entsprechende 3D-Versionen existieren, zählt heute zu den am häufigsten verwendeten Elementklassen bei der Simulation des Navier-Stokes-Problems. Da für die Lösung von Aufgaben der Strömungsmechanik inkompressibler Fluide die gleichen grundsätzlichen Gesichtspunkte gelten wie in der Mechanik inkompressibler oder nahezu inkompressibler Festkörper, hat sich diese Elementklasse auch für relevante Probleme der Festkörpermechanik als geeignet erwiesen (siehe z. B. [7]).

Die numerische Approximation der linearisierten Randwertaufgabe (50a), (50b) mittels gemischter Finite-Elemente-Strategien führt in jedem Newton-Schritt auf ein Gleichungssystem der Form:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \hat{\mathbf{U}} \\ \Delta \hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \hat{g} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Während die Teilmatrix  $\mathbf{K}$  symmetrisch und positiv definit ist, gilt für die Gesamtsystemmatrix lediglich die Symmetrie. Sie ist im Allgemeinen indefinit. Die effiziente Lösung dieses Gleichungssystems erfordert besondere Techniken. In SPC-PM2AdNIMix wird eine iterative Lösungsstrategie verwendet, die auf einer Idee von Bramble und Pasciak [10] basiert. Kerngedanke ist dabei, das indefinite System mit einer geeigneten Vorkonditionierung zu einem positiv definiten System umzuformen. In [35] wurde eine Verallgemeinerung des Bramble-Pasciak-CG vorgeschlagen und bei der Lösung gemischter Finite-Elemente-Schemata für Elastizitätsprobleme eingesetzt. Für Details zur Auswahl von Steuergrößen dieses Algorithmus und dessen Konvergenzverhalten wird u. a. auf [36] verwiesen. Es zeigte sich, dass dieser, auf hierarchischen Strukturen basierende Löser außerordentlich effizient mit den oben beschriebenen Taylor-Hood-Elementen zusammenwirkt.

## 4.2 Residualer a posteriori Fehlerschätzer und adaptive Netzanpassung

Ein wichtiger Aspekt adaptiver numerischer Verfahren ist die Auswahl geeigneter Fehlerschätzer bzw. -indikatoren für die Beurteilung der Güte der Ortsdiskretisierung. Lokale a posteriori Fehlerschätzer bei gemischten Formulierungen sind

aus der Literatur für das Stokes-Problem bekannt (siehe z. B. [1, 6, 8, 9, 30, 40, 48, 49]). Bezüglich der Simulation nahezu inkompressibel elastischer Materialien schlagen Rüter und Stein [42], basierend auf Ergebnissen von Brink und Stein [13], Ansätze für lokale a posteriori Neumann-Probleme vor, um Aussagen über obere Grenzen residualer Fehler ohne multiplikative Konstante zu erhalten.

Ein Fehlerschätzer mit elementorientierten Anteilen  $\eta_T$ , der die globale Lösung des gemischten Problems auf der Basis der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen beurteilt, wird von Meyer in [34] hergeleitet. Der Autor weist dabei die Analogie zum üblichen residualen a posteriori Fehlerschätzer für das Verschiebungsproblem der Festkörpermechanik nach und zeigt dessen Eignung im Fall großer Verzerrungen nahezu inkompressibel elastischer Materialien. Für die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers in einem Element  $T$  mit den Kanten  $E$  und dem Volumen  $\Omega_{0T}$  im Ausgangszustand gilt bei Vernachlässigung volumenförmiger Kräfte:

$$\eta_T^2 = \frac{h_T}{\lambda_D} \left( h_T \int_T |\operatorname{Div} (\mathbf{T}(\mathbf{U}_h) \mathbf{F}^T)|^2 d\Omega_{0T} + \sum_{E \in \partial\Omega_{0T}} \int |[\mathfrak{N}_E \mathbf{T}(\mathbf{U}_h) \mathbf{F}^T]|^2 dS_{0E} \right). \quad (63)$$

Hierbei stellen  $h_T$  die charakteristische Elementlänge,  $\mathfrak{N}_E$  den nach außen gerichteten Normalenvektor an der Elementkante  $E$  und  $\lambda_D$  eine materialabhängige Interpolationskonstante dar. Das Symbol [...] bezeichnet den Sprung einer Funktion an einer zu benachbarten Elementen gehörigen Kante  $E$ :

$$[\mathfrak{N}_E \mathbf{T}(\mathbf{U}_h) \mathbf{F}^T] = (\mathfrak{N}_E \mathbf{T}(\mathbf{U}_h) \mathbf{F}^T)|_{\bar{T}_1} + (\mathfrak{N}_E \mathbf{T}(\mathbf{U}_h) \mathbf{F}^T)|_{\bar{T}_2}. \quad (64)$$

Zur Berechnung des volumenbezogenen ersten Anteils des Elementfehlerschätzers (63) werden die Spannungen in allen Elementknoten berechnet und die Divergenz mit Hilfe der Ansatzfunktionen für die Verschiebungsfreiheitsgrade ermittelt. Im Fall der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen besteht der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor entsprechend der Zerlegung (20) aus einem deviatorischen und einem volumetrischen Anteil. Die numerischen Algorithmen für die Berechnung der Kantensprünge sind in [15] ausführlich beschrieben.

Bei der Analyse des Verschiebungsproblems in der linearen Elastizität wird die Interpolationskonstante  $\lambda_D$  in der Regel mit dem Elastizitätsmodul approximiert. Für nichtlineare Probleme kann diese Konstante nicht exakt bestimmt werden. Da hyperelastische Ansätze jedoch bei kleinen Verzerrungen den linearen Fall beinhalten müssen, wird angenommen, dass die Interpolationskonstante im gesamten Deformationsbereich die gleiche Größenordnung beibehält. Daher wird sie auch im Rahmen der vorgestellten Materialmodelle mit dem Elastizitätsmodul des Bereiches kleiner Verzerrungen angenähert.

Als Vergleichsfehler für die Entscheidung bezüglich einer Netzmodifikation wird der maximale Elementfehler

$$\tilde{\eta} = \max_{\forall T} \eta_T \quad (65)$$

ermittelt. Ein Element wird zur Verfeinerung markiert, wenn sein Fehlerschätzer ein bestimmtes Maß dieses Vergleichsfehlers überschreitet:

$$\eta_T^2 \geq \tau_{Tol} \cdot \tilde{\eta}^2. \quad (66)$$

Auf der Basis entsprechender Kriterien wird auch eine Netzvergrößerung zugelassen.

Bei der Realisierung des gemischten Randwertproblems der nahezu inkompressiblen Elastizität im Fall großer Verzerrungen konnten die für die finite Elastoplastizität in SPC-PM2AdNI implementierten adaptiven Algorithmen zur Fehlerschätzung und zur Übertragung der Feldvariablen auf neue Netzstrukturen in effizienter Weise zur Anwendung kommen. Ebenso wurden die hierarchischen Strategien zur Elementteilung und -vergrößerung übernommen und auf die stabilen Elementklassen der Mehrfeldproblematik angepasst. Das betrifft u. a. auch das Problem der hängenden Knoten. Diese können bei bestimmten Elementteilungen vorkommen und werden nicht durch Übergangselemente vermieden sondern mit Hilfe spezieller Projektionsoperatoren im Löser behandelt. Knotenbezogene Daten werden mit Hilfe der entsprechenden Ansatzfunktionen auf das neue Netz übertragen. Eine Übertragung stützstellenbezogener Daten ist nicht erforderlich, da alle Informationen aus den knotenbezogenen Variablen auf dem neuen Netz gewonnen werden können. Für Details zur verwendeten adaptiven Vorgehensweise wird z. B. auf [15, 16, 17] und weitere, dort angegebene Quellen verwiesen.

## 5 Numerisches Beispiel

### 5.1 Cooks Membranproblem

Dieses Problem wurde von Cook [20] als Testbeispiel zur Analyse des Lösungsverhaltens eines verallgemeinerten Viereckelementes eingeführt. Wegen der ausgeprägten Elementdistorsionen wird es seither von verschiedenen Autoren gern zur Darstellung der Eigenschaften von gemischten Elementformulierungen unter dominierender Biegebeanspruchung verwendet (vgl. [2, 28, 33, 42]).

Die Cook-Membran ist an einer Seite fest eingespannt und wird an der gegenüber liegenden Seite durch eine kantenbezogene Schubkraft belastet. Es wird die Erfüllung der Bedingungen für den ebenen Verzerrungszustand vorausgesetzt. In Abb. 1 sind links die geometrischen Abmessungen sowie die Randbedingungen der untersuchten Struktur dargestellt. Auf der rechten Seite ist die verformte Geometrie bei Maximallast zu sehen, welche mit SPC-PM2AdNIMix ermittelt wurde.

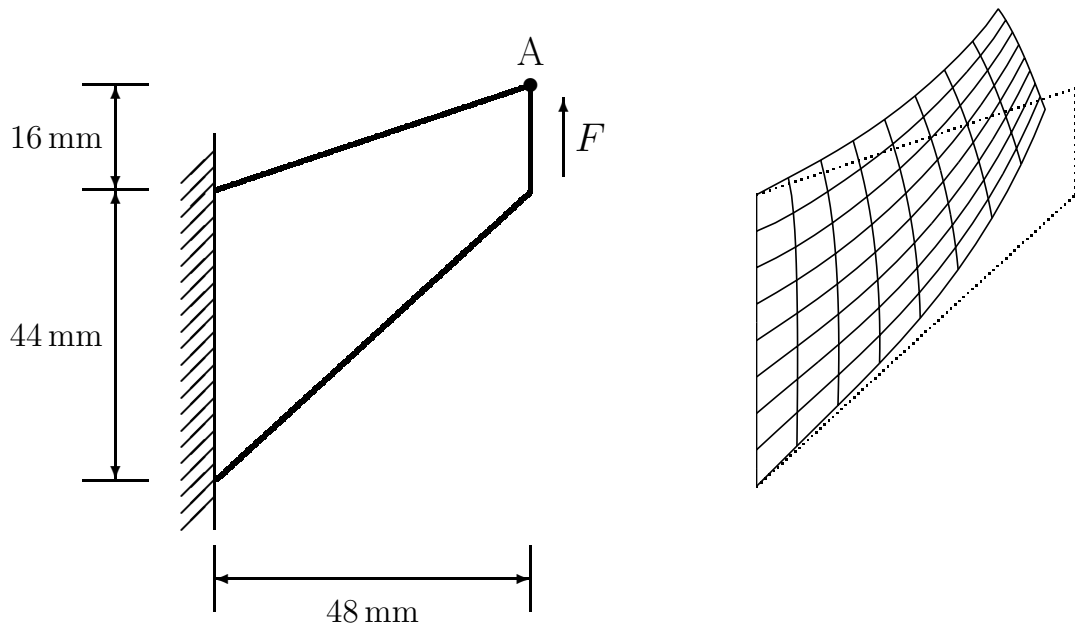


Abbildung 1: Cook-Membran. Links: Geometrie und Randbedingungen nach [2] ( $F = 100 \text{ kN}$ ). Rechts: Verformtes Netz mit Viereckelementen.

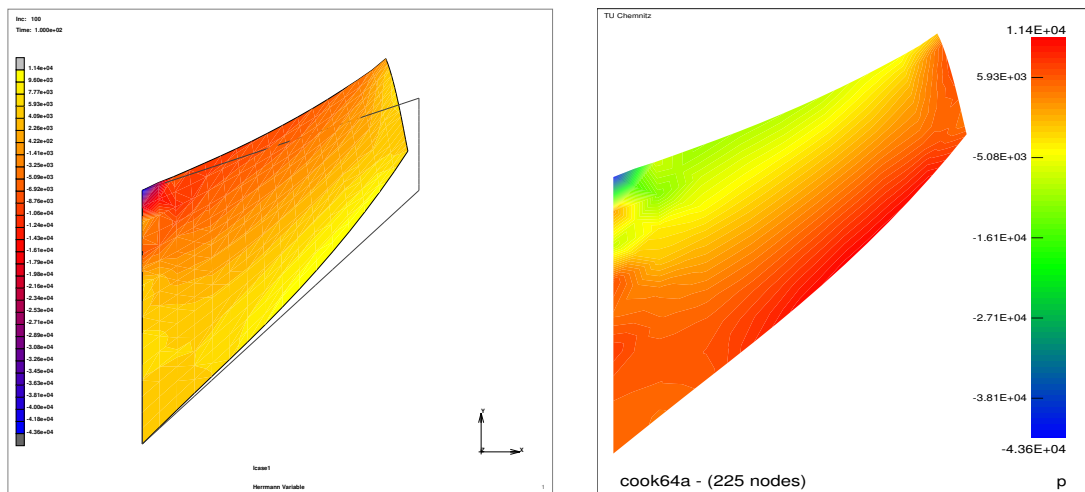


Abbildung 2: Cook-Membran. Isoflächendarstellung der Verteilung des hydrostatischen Drucks bei maximaler Belastung. Vergleich der Berechnungen mit dem kommerziellen FE-Paket MSC-Marc (links,  $p_{max} = 11\,437 \text{ MPa}$ ) und dem hauseigenen FE-Programm SPC-PM2AdNIMix (rechts,  $p_{max} = 11\,434 \text{ MPa}$ ).

Zur Verdeutlichung der Leistungsfähigkeit der vorgestellten Formulierung des Materialgesetzes und ihrer numerischen Umsetzung wurden umfangreiche Berechnungen für Cooks Membranproblem durchgeführt. Bei den Untersuchungen sind



insbesondere die Verschiebungen im Punkt A interessant (vgl. Abb. 1). Diese hängen sehr stark vom Elementtyp und der Diskretisierung ab und werden von vielen Autoren zum Vergleich herangezogen.

Im Folgenden werden einige Ergebnisse, die mit dem diskutierten Materialmodell erzielt wurden, exemplarisch dargestellt. Dabei erfolgte zum Teil eine Anpassung der Netze während der Berechnung über adaptive Algorithmen. Als Ansatz für die freie Energiedichte kam das Neo-Hooke-Modell (60) zum Einsatz. Die Belastung und die Materialparameter wurden von Armero [2] übernommen. Dort werden Werte von 240,4 GPa für den Elastizitätsmodul und 0,499 für die Querkontraktionszahl angegeben. Daraus lassen sich die Parameter  $c_{10} = 40\,097$  MPa,  $\kappa = 4,007 \cdot 10^7$  MPa des entwickelten Modells berechnen.

Ein erster Vergleich von Resultaten des eigenen Modells zeigt eine sehr gute Übereinstimmung bei der Simulation von Cooks Membranproblem mit den Angaben von Armero und Ergebnissen des kommerziellen FE-Programms MSC-Marc (vgl. hierzu auch Abb. 2). Die Vertikalverschiebung des rechten oberen Eckknotens ergibt sich bei maximaler Belastung mit SPC-PM2AdNIMix zu 6,854 mm verglichen mit 6,855 mm bei Verwendung von MSC-Marc. Armero gibt keinen expliziten Wert an. Aus einem entsprechenden Diagramm in [2] kann jedoch eine Verschiebung von etwa 6,8 mm entnommen werden. Für den Vergleich wurde jeweils eine Vernetzung mit 64 Viereckelementen verwendet.

Tabelle 1: Cook-Membran. Vertikalverschiebung des rechten oberen Eckknotens (s. Abb. 1 – Knoten A). Vergleich der Lösung mit Taylor-Hood-Elementen  $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$ ,  $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$  sowie verschiebungsbezogenen Viereckelementen  $\mathcal{Q}_2^{(8)}$  (quadratischer Ansatz vom Serendipity-Typ),  $\mathcal{Q}_1$  (bilinearer Ansatz) bzw. Dreieckelementen  $\mathcal{P}_2$  (quadratischer Ansatz),  $\mathcal{P}_1$  (linearer Ansatz) in Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl  $\nu$ .

$\nu$	Verschiebung					
	absolut für $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$ mm	bezogen auf Elementtyp $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$				
		$\mathcal{Q}_2^{(8)}$	$\mathcal{Q}_1$	$\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1$
0,35	7,0756	1,0001	0,8984	1,0010	1,0069	0,9497
0,40	7,2776	0,9731	0,8570	1,0026	0,9814	0,9228
0,45	7,1391	0,9785	0,8156	1,0046	0,9906	0,9217
0,49	6,9142	0,9774	0,6248	1,0070	0,9985	0,8769
0,499	6,8505	0,9657	0,3848	1,0080	0,9979	0,7677
0,4999	6,8440	0,9502	0,3244	1,0081	0,9941	0,7286
0,49995	6,8436	0,9445	0,3201	1,0081	0,9916	0,7258

Weitere Analysen befassten sich zunächst mit dem Lösungsverhalten verschiedener Elementtypen. Es ist bekannt, dass die Verwendung verschiebungsbezogener Elemente bei der numerischen Simulation nahezu inkompressiblen Materialverhaltens im Vergleich zu gemischten Ansatzräumen mit großen Fehlern verbunden sein kann. Insbesondere für den auch hier verwendeten ebenen Verzerrozustand erweisen sich verschiebungsbezogene Elemente als zu steif. Bathe [7] erläutert dieses “sperrende” Verhalten ausführlich. Darüber hinaus existiert eine umfangreiche Literatur, die sich mit der Analyse und Ansätzen zur Vermeidung dieses, auch als *locking*-Effekt bekannten, Phänomens beschäftigt. In Tab. 1 sind eigene Untersuchungen zum Elementlocking in der Nähe der Inkompressibilität zusammengefasst. Diese bestätigen qualitativ das erwähnte Verhalten und zeigen im Bereich der verwendeten Viereckelemente auch quantitativ vergleichbare Relationen zwischen unterschiedlichen Elementtypen, wie sie z. B. in [33] angegeben sind.

Wie aus Tab. 1 ersichtlich, weichen die Ergebnisse mit den Taylor-Hood-Elementen  $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$  und  $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$  bei gleicher Gesamtknotenzahl (hier: 225) um weniger als 1 % voneinander ab. Bei Verwendung verschiebungsbezogener Viereckelemente zeigt sich die oben erwähnte Zunahme der strukturellen Steifigkeit gegenüber dem Element  $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$ , je mehr sich die Querkontraktionszahl dem Wert 0,5 nähert. Besonders deutlich ist diese Tendenz für das bilineare  $\mathcal{Q}_1$ -Element zu erkennen. Wesentlich günstiger sind hier die verschiebungsbezogenen Dreieckelemente. So ist insbesondere die größte Abweichung für das quadratische Element  $\mathcal{P}_2$  gegenüber dem Taylor-Hood-Element bereits bei einer Querkontraktionszahl von 0,4 zu verzeichnen und liegt selbst dort unter 2 %. Das lineare Element  $\mathcal{P}_1$  weist bei einer Querkontraktionszahl von 0,49995 gegenüber dem Element  $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$  zwar eine deutliche Abweichung von etwa 27,5 % auf, für das Element  $\mathcal{Q}_1$  beträgt sie hingegen sogar ca. 68 %.

## 5.2 Berechnungen mit Viereckelementen vom Typ $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$

Die Berechnungen wurden mit unterschiedlichen Ausgangsvernetzungen durchgeführt. In Abb. 3 sind die jeweiligen Grobgitter mit vier bzw. 16 Viereckelementen zu sehen. Durch mehrmalige Unterteilung aller Grobgitterelemente in jeweils vier ähnliche Vierecke je Stufe wurde zunächst ohne Fehlerschätzung eine globale Netzverfeinerung erzwungen, so dass Berechnungen mit 64, 256, 1024 und 4096 Elementen durchgeführt werden konnten. Danach wurde, ausgehend von Grobgittern mit 1, 4 bzw. 16 Elementen, eine hierarchisch-adaptive Vorgehensweise für die Netzverfeinerung gewählt. Die Ergebnisse bezüglich der Vertikalverschiebung des oberen rechten Eckknotens der Cook-Membran sind in Abb. 4 dargestellt.

In diesem Zusammenhang ist die Bedeutung der globalen Abbruchschranke `threshmax` für den adaptiven Prozess zu erwähnen. Nach Beziehung (66) wer-

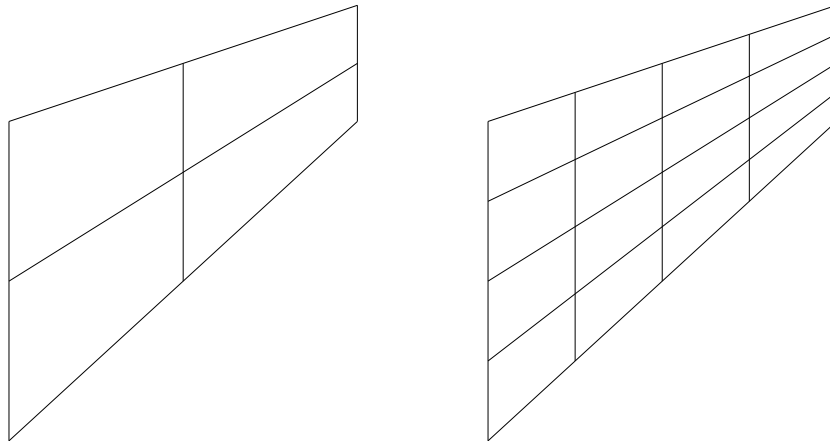


Abbildung 3: Cooks Membranproblem. Grobitter mit vier bzw. 16 Elementen.

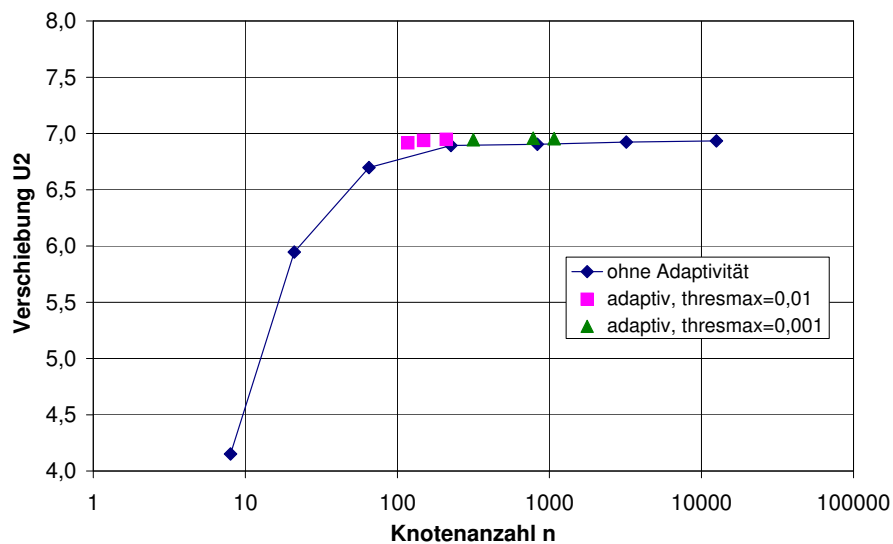


Abbildung 4: Cook-Membran. Berechnung mit Viereckelementen, mit und ohne Adaptivität. Verschiebung des Punktes A (vgl. Abb. 1) in vertikaler Richtung in Abhängigkeit von der Knotenanzahl (logarithmische Darstellung).

den in jedem Lastinkrement alle Elementfehlerschätzer gegen einen Vergleichsfehler  $\tilde{\eta}$  abgetestet, der für den aktuellen Zeitschritt gültig ist. Es ist jedoch nicht unbedingt sinnvoll, in jedem Inkrement eine Netzanpassung vorzunehmen. Zur

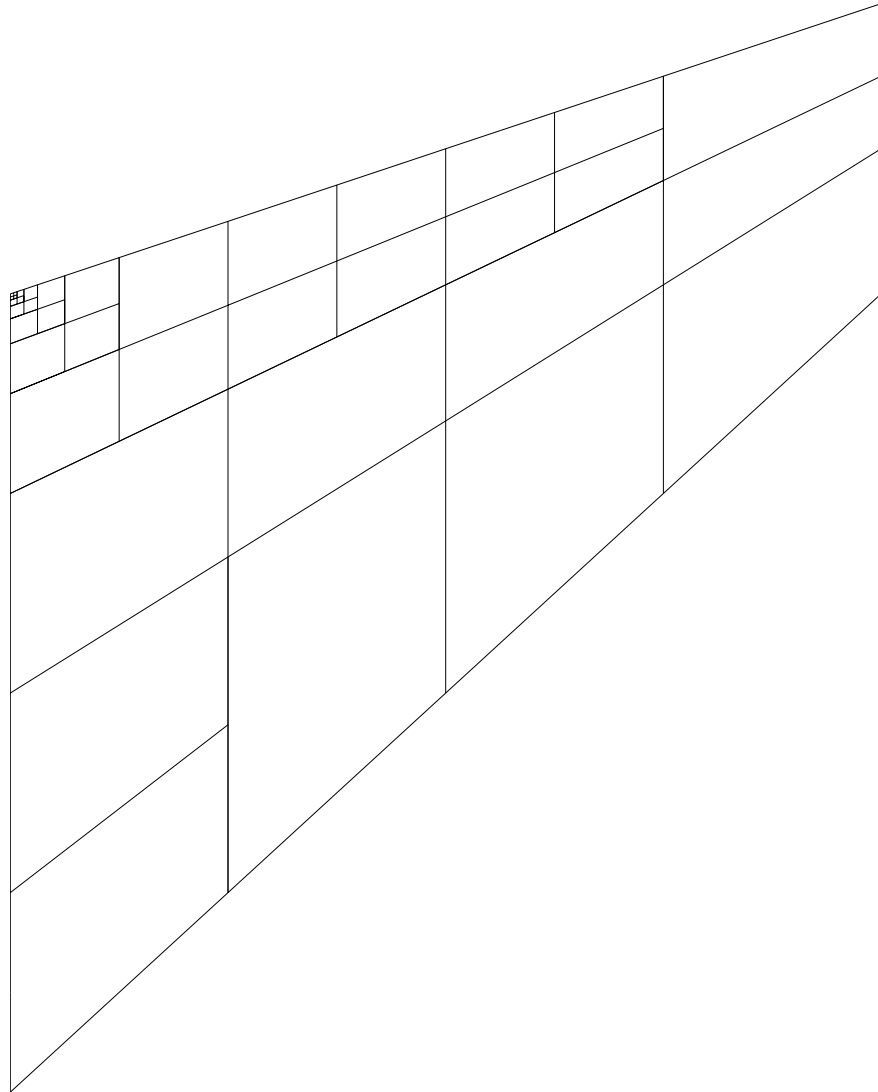


Abbildung 5: Cooks Membranproblem. Adaptives Netz bei Berechnung mit Viereckelementen. Ausgangsnetz mit 4 Elementen, Abbruchkriterium  $\text{thresmax}=0.001$ .

Steuerung dieses Prozesses wird in SPC-PM2AdNIMix der Vergleichsfehler  $\tilde{\eta}_1$  des ersten Lastinkrementes genutzt. Eine Netzverfeinerung zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  wird erst dann geprüft, wenn  $\tilde{\eta}_t$  eine vorgegebene Relation zu  $\tilde{\eta}_1$  überschreitet:  $\tilde{\eta}_t \geq \text{thresmax} \cdot \tilde{\eta}_1$  ( $\text{thresmax} < 1, 0$ ).

Aus Abb. 4 wird deutlich, dass selbst bei Verwendung von Taylor-Hood-Elementen ein zu steifes Materialverhalten simuliert wird, wenn die Diskretisierung zu grob ist. Mit zunehmender (gleichmäßiger) Verfeinerung der Diskretisierung und der damit verbundenen Vergrößerung der Knotenzahl strebt die Vertikalverschiebung

des oberen rechten Eckknotens der Cook-Membran einem asymptotischen Wert zu. Dieses Verhalten deckt sich vollständig mit Literaturergebnissen. Darüber hinaus ist offensichtlich, dass bei adaptiver Netzanpassung der asymptotische Wert bereits bei einer wesentlich kleineren Knotenzahl erreicht wird.

In Abb. 5 ist ein adaptiv verfeinertes Netz dargestellt, welches aus einem Ausgangsnetz von 4 Elementen entstanden ist. Sehr gut sind hierbei die große Anzahl und die hierarchische Struktur verfeinerter Elemente in der Nähe der Singularität an der oberen linken Ecke zu erkennen.

### 5.3 Berechnungen mit Dreieckelementen vom Typ $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$

Auch in diesem Fall wurden unterschiedliche Ausgangsnetze für die Berechnungen benutzt. In Abb. 6 sind die drei wesentlichen Ausgangsnetze dargestellt. Interessant ist besonders der Vergleich von Grobgittern mit jeweils nur zwei Elementen: Das ursprüngliche Trapez wurde einerseits in vertikaler Richtung geteilt, zum Anderen erfolgte die Unterteilung horizontal. Damit lassen sich Aussagen über die Auswirkung der Orientierung von Dreieckvernetzungen treffen.

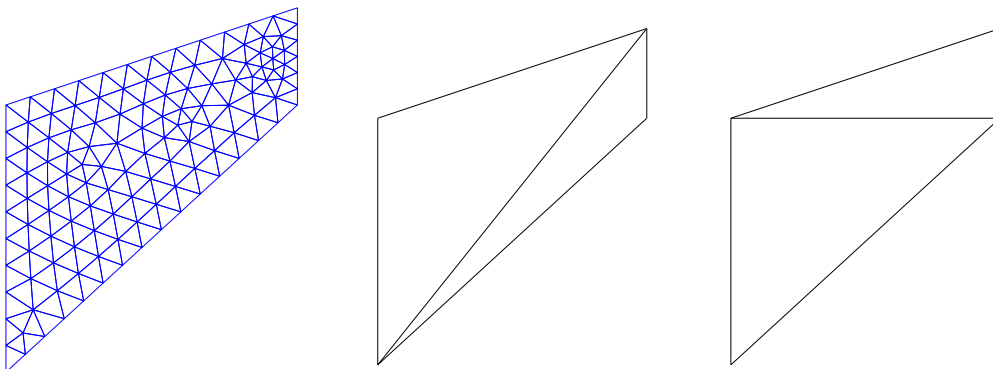


Abbildung 6: Cooks Membranproblem. Ausgangsnetze für Berechnungen mit Dreieckelementen. Links: Automatisch vernetzte Geometrie. Mitte: Vertikale Teilung. Rechts: Horizontale Teilung.

Mit den drei Varianten der Ausgangsnetze wurden verschiedene Analysen bei kompletter Neuvernetzung sowie adaptiver Netzanpassung durchgeführt. Dabei kamen zusätzlich unterschiedliche Vernetzungsstrategien zum Einsatz. Bei der sogenannten roten Teilung entstehen aus einem Dreieck-Vaterelement vier ähnliche Sohnelemente. Im Fall der grünen Teilung werden jeweils die längste Kante des Vaterlements und das Element selbst geteilt und damit entstehen zwei Sohnelemente, die aber dem Vaterlement nicht mehr ähnlich sind.

Die Darstellungen in den Abbildungen 7, 8 und 9 bestätigen die bezüglich der Viereckelemente gewonnene Aussage, dass mit wachsender Knotenzahl die Vertikalverschiebung des rechten oberen Eckknotens der Cook-Membran gegen einen asymptotischen Wert strebt. Bei kompletter Netzverfeinerung ist dabei das asymptotische Verhalten dem der Viereckelemente ähnlich.

Auch bei den Dreieckelementen ist zu sehen, dass mit adaptiver Netzanpassung bereits weniger Knoten ausreichen, um realistischere Werte für die Verschiebung zu ermitteln. Allerdings zeigen sich hier einige qualitative Unterschiede bezüglich der Verfeinerungsstrategie und der Elementausrichtung im Grobgitter, die quantitativ jedoch für das betrachtete Beispiel nicht wesentlich sind. In der Tendenz ist hier jedoch die rote Netzunterteilung der grünen überlegen. Bessere Ergebnisse werden zudem mit der vertikalen Ausgangsteilung gegenüber der horizontalen erreicht.

Abschließend ist in Abb. 10 exemplarisch eine adaptive Netzanpassung mit Dreieckelementen dargestellt. Sie basiert auf dem automatisch generierten Ausgangsnetz (vgl. Abb. 6). Hier ist noch deutlicher als bei der Viereckvernetzung die Verfeinerung in der Nähe der Singularität an der oberen linken Ecke der Cook-Membran zu erkennen.

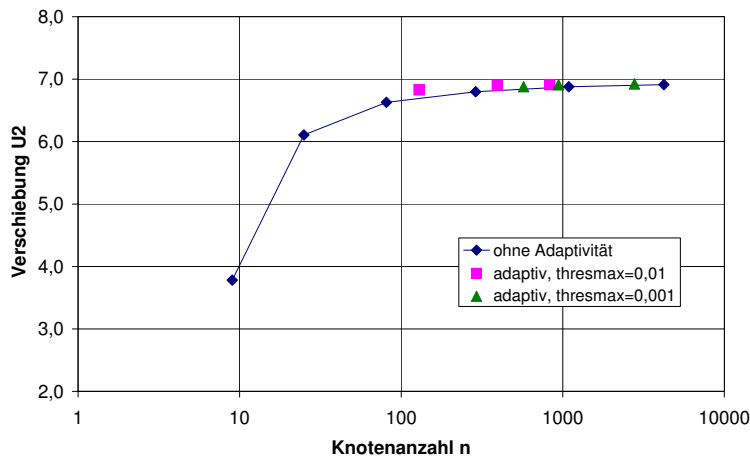


Abbildung 7: Cooks Membranproblem. Verschiebung des Punktes A (vgl. Abb. 1) in vertikaler Richtung bei Berechnungen mit unterschiedlich feinen Dreiecknetzen, mit und ohne Adaptivität. Vertikale Ausgangsteilung. Adaptivität mit roter Netzverfeinerung.

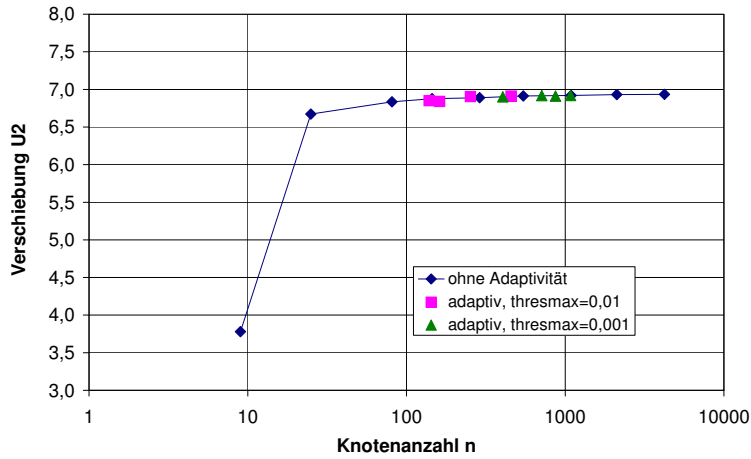


Abbildung 8: Cooks Membranproblem. Verschiebung des Punktes A (vgl. Abb. 1) in vertikaler Richtung bei Berechnungen mit unterschiedlich feinen Dreiecknetzen, mit und ohne Adaptivität. Vertikale Ausgangsteilung. Adaptivität mit grüner Netzverfeinerung.

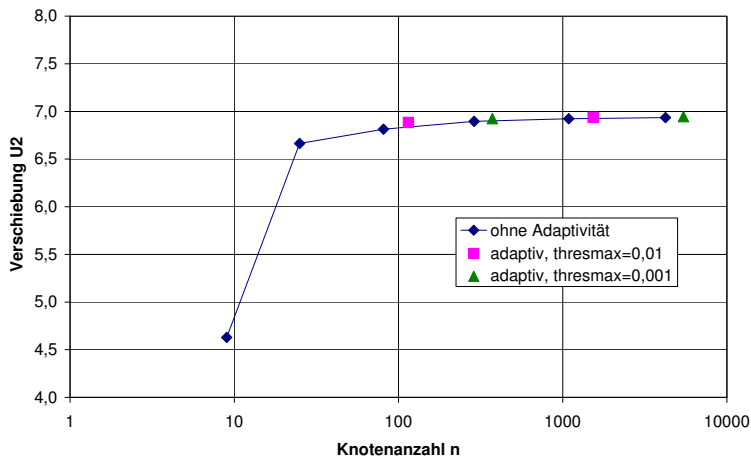


Abbildung 9: Cooks Membranproblem. Verschiebung des Punktes A (vgl. Abb. 1) in vertikaler Richtung bei Berechnungen mit unterschiedlich feinen Dreiecknetzen, mit und ohne Adaptivität. Horizontale Ausgangsteilung. Adaptivität mit roter Netzverfeinerung.

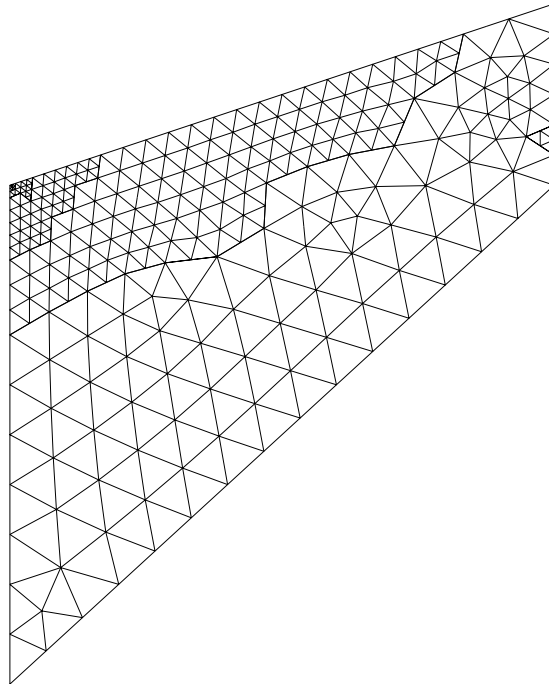


Abbildung 10: Cooks Membranproblem. Adaptive Netzanpassung bei einem Ausgangsnetz von 215 Elementen. Rote Elementteilung. Abbruchschranke  $\text{thresmax}=0.01$ .

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde ein Materialmodell zur Simulation nahezu inkompressibel elastischen Werkstoffverhaltens bei großen Verzerrungen vorgestellt. Die Herleitung der gemischten Randwertaufgabe erfolgte auf der Basis der schwachen Formulierungen des Impulssatzes und der Inkompressibilitätsbedingung in materieller Beschreibungsweise. Die konsistente Linearisierung der Randwertaufgabe führt in Zusammenhang mit einer geeigneten Ortsdiskretisierung zu einer inkrementell-iterativen Lösungsstrategie im Rahmen einer Zweifeld-FE-Formulierung. Die entwickelten numerischen Algorithmen wurden in ein hauseigenes FE-Programm implementiert. Für die stabile Lösung werden Elementansätze nach Taylor-Hood in Verbindung mit einem effizienten iterativen Gleichungssystemlöser verwendet, der auf modernen Vorkonditionierungsstrategien basiert. Das hierarchische Konzept des Löser kann zweckmäßig mit adaptiven Techniken zur Netzmodifikation verknüpft werden, deren Steuerung mittels eines residualen a posteriori Fehlerschätzers für das gemischte Feldproblem realisiert wird.

Das Deformationsgesetz der isotropen Hyperelastizität basiert auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten – dem so genannten Flory-Split – sowie der additiven Aufspaltung der freien Energiedichte in einen deviatorischen



und einen volumetrischen Anteil. Eine Erweiterung auf anisotrop-elastische Modelle ist problemlos möglich. Für numerische Tests wurde von konstitutiver Seite zunächst der Neo-Hooke-Ansatz genutzt. Am häufig zitierten Beispiel des Cookschen Membranproblems wurden die Leistungsfähigkeit und Stabilität der entwickelten Modelle und Algorithmen getestet. Dabei konnte eine außerordentlich gute Übereinstimmung mit Ergebnissen aus der Literatur und Vergleichsrechnungen mittels kommerzieller FE-Software erzielt werden. Gleichzeitig wurde die Effektivität hierarchisch adaptiver Netzmodifikationen gegenüber vollständigen Netzverfeinerungen verdeutlicht.

Auf der Basis der entwickelten Modelle wurde bereits eine Strategie zur Identifikation von Materialparametern für nahezu inkompressible Elastizität bei großen Verzerrungen realisiert. Diese beruht auf deterministischen Optimierungsverfahren mit halbanalytischer Sensitivitätsanalyse. Die Nutzung des vorgestellten FE-Kerns für die Lösung des direkten Problems gestattet dabei die Auswertung inhomogener Verschiebungsfelder. Geplante Entwicklungen beziehen sich auf die Lösung des direkten und des inversen Problems zweiphasiger Medien bei großen Verzerrungen. Dabei können Analogien der Problemstellung zur gemischten Formulierung der nahezu inkompressiblen Elastizität effektiv ausgenutzt werden. Anwendungsgebiete für die Modelle und Verfahren finden sich insbesondere im Elastomerbereich und der Biomechanik.

## Literatur

- [1] M. Ainsworth and J.T. Oden. A posteriori error estimators for the Stokes and Oseen equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34:228-245, 1997.
- [2] F. Armero. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Comput. Struct.*, 75:261-290, 2000.
- [3] D.N. Arnold. Mixed finite element methods for elliptic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 82:281-300, 1990.
- [4] F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina and A. Reali. A stability study of some mixed finite elements for large deformation elasticity problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194:1075-1092, 2005.
- [5] J.M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 3:337-407, 1977.
- [6] R.E. Bank and B.D. Welfert. A posteriori error estimates for the Stokes equations: a comparison. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 82:323-340, 1990.

- [7] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin, 2002 (2nd ed.).
- [8] R. Becker and R. Rannacher. Finite element solution of the incompressible Navier-Stokes equations on anisotropically refined meshes. In *Fast solvers for flow problems*, volume 49 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pp. 52-62, Vieweg, Wiesbaden, 1995.
- [9] H. El Bouzid and S. Nicaise. Refined mixed finite element method for the Stokes problem. In M. Bach, C. Constanda, G.C. Hsiao, A.M. Sändig, and P. Werner (Eds.), *Analysis, numerics and applications of differential and integral equations*, volume 379 of *Pitman Research Notes in Mathematics*, pp. 158-162, Longman, Harlow, 1998.
- [10] J.H. Bramble and J.E. Pasciak. A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems. *Math. Comput.*, 50(181)1-17, 1988.
- [11] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid Finite Element Methods*. Springer, New York, 1991.
- [12] U. Brink and E. Stein. On some mixed finite element methods for incompressible and nearly incompressible finite elasticity. *Comp. Mech.*, 19:105-119, 1996.
- [13] U. Brink and E. Stein. A posteriori error estimation in large-strain elasticity using equilibrated local Neumann problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 161:77-101, 1998.
- [14] A. Bucher, U.-J. Görke and R. Kreißig. A material model for finite elastoplastic deformations considering a substructure. *Int. J. Plast.*, 20:619-642, 2004.
- [15] A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke and R. Kreißig. *Entwicklung von adaptiven Algorithmen für nichtlineare FEM*. Preprint SFB393/04-03, TU Chemnitz, 2004.
- [16] A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke and R. Kreißig. A contribution to error estimation and mapping algorithms for a hierarchical adaptive FE-strategy in finite elastoplasticity. *Comp. Mech.*, 36(3):182-195, 2005.
- [17] A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke and R. Kreißig. A comparison of mapping algorithms for hierarchical adaptive FEM in finite elasto-plasticity. *Comp. Mech.*, 39(4):521-536, 2007.
- [18] P. Charrier, B. Dacorogna, B. Hanouzet and P. Laborde. An existence theorem for slightly compressible materials in nonlinear elasticity. *SIAM J. Math. Anal.*, 19:70-85, 1988.

- [19] J.S. Chen, W. Han, C.T. Wu and W. Duan. On the perturbed Lagrangian formulation for nearly incompressible and incompressible hyperelasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 142:335-351, 1997.
- [20] R.D. Cook. Improved two-dimensional finite element. *J. Struct. Div. ASCE*, 100:1851-1863, 1974.
- [21] P.J. Flory. Thermodynamic relations for high elastic materials. *Trans. Faraday Soc.*, 57:829-838, 1961.
- [22] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Academic Press, Boston, 1989.
- [23] R. Glowinsky and O. Pironneau. On a mixed finite element approximation of the Stokes problem (I). *Numer. Math.*, 33:397-424, 1979.
- [24] U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig and D. Michael. *Ein Beitrag zur Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen einschließlich der Materialmodellierung bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen mit Hilfe der FEM*. Preprint SFB393/00-09, TU Chemnitz, 2000.
- [25] L.R. Herrmann. Elasticity equations for nearly incompressible materials by a variational theorem. *AIAA J.*, 3:1896-1900, 1965.
- [26] P. Hood and C. Taylor. Navier-Stokes equations using mixed interpolation. In: *Finite Element Methods in Flow Problems*, J.T. Oden, R.H. Gallagher, O.C. Zienkiewicz and C. Taylor (Eds.), University of Alabama in Huntsville Press, 121-132, 1974.
- [27] T.J.R. Hughes. *The finite element method*. Dover Publications, New York, 2000.
- [28] A. Ibrahimbegovic, R.L. Taylor and E.L. Wilson. A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 30:445-457, 1990.
- [29] L. Janski, M. Kuna, A. Meyer, M. Scherzer and P. Steinhorst. Modellierung von Risswachstum in piezoelektrischen Materialien mittels moderner adaptiver FEM-Lösungsstrategien. In: *Bruchmechanik und Bauteilsicherheit*, M. Kuna (Hrsg.), DVM-Bericht 239, Dresden, 297-306, 2007.
- [30] D. Kay and D. Silvester. A-posteriori error estimation for stabilized mixed approximations of the Stokes equations. *SIAM J. Sci. Comp.*, 21:1321-1336, 1999.
- [31] R. Kreißig, A. Bucher and U.-J. Görke. Hierarchical adaptive FEM at finite elastoplastic deformations, In: *Parallel Algorithms and Cluster Computing – Implementations, Algorithms, and Applications*(Springer Lecture

- Notes in Computational Science and Engineering*), K.H. Hoffmann and A. Meyer (Eds.), Springer, Berlin, 105-127, 2006.
- [32] P. Le Tallec. Numerical Methods for nonlinear three-dimensional elasticity. In: *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. III, P.G. Ciarlet and J.L. Lions (Eds.), Elsevier, Amsterdam, 465-622, 1994.
- [33] A. Masud and K. Xia. A stabilized mixed finite element method for nearly incompressible elasticity. *J. Appl. Mech.*, 72:711-720, 2005.
- [34] A. Meyer. *Grundgleichungen und adaptive Finite-Elemente-Simulation bei "Großen Deformationen"*. Chemnitz Scientific Computing Preprint CSC/07-02, TU Chemnitz, 2007.
- [35] A. Meyer and T. Steidten. *Improvements and experiments on the Bramble-Pasciak type CG for mixed problems in elasticity*. Preprint SFB393/01-12, TU Chemnitz, 2001.
- [36] A. Meyer and P. Steinhorst. *Überlegungen zur Parameterwahl im Bramble-Pasciak-CG für gemischte FEM*. Preprint SFB393/05-07, TU Chemnitz, 2005.
- [37] M. Mooney. A theory of large elastic deformations. *J. Appl. Mech.*, 11:582-592, 1940.
- [38] M.N.L. Narasimhan. *Principles of continuum mechanics*. Wiley, New York, 1993.
- [39] D.W. Nicholson and B. Lin. On the tangent modulus tensor in hyperelasticity. *Acta Mechanica*, 131:121-132, 1998.
- [40] M. Orlt and A.-M. Sändig. Regularity of viscous Navier-Stokes flows in nonsmooth domains. In M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise (Eds.), *Boundary value problems and integral equations in nonsmooth domains*, volume 167 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pp. 101-120. Marcel Dekker, New York, 1995.
- [41] R.S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials IV. Further developments of the general theory. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A 241:379-397, 1948.
- [42] M. Rüter and E. Stein. Analysis, finite element computation and error estimation in transversely isotropic nearly incompressible finite elasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190:519-541, 2000.
- [43] J.C. Simo and R.L. Taylor. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches, continuum basis and numerical algorithms. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 85:273-310, 1991.

- [44] P. Steinhorst. *Rotationssymmetrie für piezoelektrische Probleme*. Chemnitz Scientific Computing Preprint CSC/07-03, TU Chemnitz, 2007.
- [45] C. Taylor and P. Hood. A numerical solution of the Navier Stokes equations using the finite element technique. *Comput. Fluids*, 1:73-100, 1973.
- [46] R.L. Taylor, K.S. Pister and L.R. Herrmann. On a variational theorem for incompressible and nearly-incompressible orthotropic elasticity. *Int. J. Sol. Struct.*, 4:875-883, 1968.
- [47] R. Verfürth. Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations. *R. A. I. R. O. Anal. Num.*, 18:175-182, 1984.
- [48] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes equations. *Numer. Math.*, 55:309-325, 1989.
- [49] R. Verfürth. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *Wiley and Teubner, Chichester and Stuttgart*, 1996.
- [50] J.A. Weiss, B.N. Maker and S. Govindjee. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 135:107-128, 1996.

Some titles in this CSC and the former SFB393 preprint series:

- 02-01 M. Pester. Bibliotheken zur Entwicklung paralleler Algorithmen - Basisroutinen für Kommunikation und Grafik. Januar 2002.
- 02-02 M. Pester. Visualization Tools for 2D and 3D Finite Element Programs - User's Manual. January 2002.
- 02-03 H. Harbrecht, M. Konik, R. Schneider. Fully Discrete Wavelet Galerkin Schemes. January 2002.
- 02-04 G. Kunert. A posteriori error estimation for convection dominated problems on anisotropic meshes. March 2002.
- 02-05 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet Galerkin Schemes for 3D-BEM. February 2002.
- 02-06 W. Dahmen, H. Harbrecht, R. Schneider. Compression Techniques for Boundary Integral Equations - Optimal Complexity Estimates. April 2002.
- 02-07 S. Grosman. Robust local problem error estimation for a singularly perturbed reaction-diffusion problem on anisotropic finite element meshes. May 2002.
- 02-08 M. Springmann, M. Kuna. Identifikation schädigungsmechanischer Materialparameter mit Hilfe nichtlinearer Optimierungsverfahren am Beispiel des Rousseilier Modells. Mai 2002.
- 02-09 S. Beuchler, R. Schneider, C. Schwab. Multiresolution weighted norm equivalences and applications. July 2002.
- 02-10 Ph. Cain, R. A. Römer, M. E. Raikh. Renormalization group approach to energy level statistics at the integer quantum Hall transition. July 2002.
- 02-11 A. Eilmes, R. A. Römer, M. Schreiber. Localization properties of two interacting particles in a quasiperiodic potential with a metal-insulator transition. July 2002.
- 02-12 M. L. Ndawana, R. A. Römer, M. Schreiber. Scaling of the Level Compressibility at the Anderson Metal-Insulator Transition. September 2002.
- 02-13 Ph. Cain, R. A. Römer, M. E. Raikh. Real-space renormalization group approach to the quantum Hall transition. September 2002.
- 02-14 A. Jellal, E. H. Saidi, H. B. Geyer, R. A. Römer. A Matrix Model for  $\nu_{k_1 k_2} = \frac{k_1+k_2}{k_1 k_2}$  Fractional Quantum Hall States. September 2002.
- 02-15 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Parallel implementation of curve reconstruction from noisy samples. August 2002.
- 02-16 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Parallel implementation of surface reconstruction from noisy samples. September 2002.
- 02-17 M. Morgenstern, J. Klijn, Chr. Meyer, R. A. Römer, R. Wiesendanger. Comparing measured and calculated local density of states in a disordered two-dimensional electron system. September 2002.
- 02-18 J. Hippold, G. Rüniger. Task Pool Teams for Implementing Irregular Algorithms on Clusters of SMPs. October 2002.

- 02-19 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelets for the fast solution of boundary integral equations. October 2002.
- 02-20 H. Harbrecht, R. Schneider. Adaptive Wavelet Galerkin BEM. October 2002.
- 02-21 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet Galerkin Schemes for Boundary Integral Equations - Implementation and Quadrature. October 2002.
- 03-01 E. Creusé, G. Kunert, S. Nicaise. A posteriori error estimation for the Stokes problem: Anisotropic and isotropic discretizations. January 2003.
- 03-02 S. I. Solov'ëv. Existence of the guided modes of an optical fiber. January 2003.
- 03-03 S. Beuchler. Wavelet preconditioners for the p-version of the FEM. February 2003.
- 03-04 S. Beuchler. Fast solvers for degenerated problems. February 2003.
- 03-05 A. Meyer. Stable calculation of the Jacobians for curved triangles. February 2003.
- 03-06 S. I. Solov'ëv. Eigenvibrations of a plate with elastically attached load. February 2003.
- 03-07 H. Harbrecht, R. Schneider. Wavelet based fast solution of boundary integral equations. February 2003.
- 03-08 S. I. Solov'ëv. Preconditioned iterative methods for monotone nonlinear eigenvalue problems. March 2003.
- 03-09 Th. Apel, N. Düvelmeyer. Transformation of hexahedral finite element meshes into tetrahedral meshes according to quality criteria. May 2003.
- 03-10 H. Harbrecht, R. Schneider. Biorthogonal wavelet bases for the boundary element method. April 2003.
- 03-11 T. Zhanlav. Some choices of moments of refinable function and applications. June 2003.
- 03-12 S. Beuchler. A Dirichlet-Dirichlet DD-pre-conditioner for p-FEM. June 2003.
- 03-13 Th. Apel, C. Pester. Clément-type interpolation on spherical domains - interpolation error estimates and application to a posteriori error estimation. July 2003.
- 03-14 S. Beuchler. Multi-level solver for degenerated problems with applications to p-version of the fem. (*Dissertation*) July 2003.
- 03-15 Th. Apel, S. Nicaise. The inf-sup condition for the Bernardi-Fortin-Raugel element on anisotropic meshes. September 2003.
- 03-16 G. Kunert, Z. Mghazli, S. Nicaise. A posteriori error estimation for a finite volume discretization on anisotropic meshes. September 2003.
- 03-17 B. Heinrich, K. Pönitz. Nitsche type mortaring for singularly perturbed reaction-diffusion problems. October 2003.
- 03-18 S. I. Solov'ëv. Vibrations of plates with masses. November 2003.
- 03-19 S. I. Solov'ëv. Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems. November 2003.

- 03-20 M. Randrianarivony, G. Brunnett, R. Schneider. Tessellation and parametrization of trimmed surfaces. December 2003.
- 04-01 A. Meyer, F. Rabold, M. Scherzer. Efficient Finite Element Simulation of Crack Propagation. February 2004.
- 04-02 S. Grosman. The robustness of the hierarchical a posteriori error estimator for reaction-diffusion equation on anisotropic meshes. March 2004.
- 04-03 A. Bucher, A. Meyer, U.-J. Görke, R. Kreißig. Entwicklung von adaptiven Algorithmen für nichtlineare FEM. April 2004.
- 04-04 A. Meyer, R. Unger. Projection methods for contact problems in elasticity. April 2004.
- 04-05 T. Eibner, J. M. Melenk. A local error analysis of the boundary concentrated FEM. May 2004.
- 04-06 H. Harbrecht, U. Kähler, R. Schneider. Wavelet Galerkin BEM on unstructured meshes. May 2004.
- 04-07 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Necessary and sufficient conditions for the regularity of a planar Coons map. May 2004.
- 04-08 P. Benner, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí. Solving Linear Matrix Equations via Rational Iterative Schemes. October 2004.
- 04-09 C. Pester. Hamiltonian eigenvalue symmetry for quadratic operator eigenvalue problems. October 2004.
- 04-10 T. Eibner, J. M. Melenk. An adaptive strategy for hp-FEM based on testing for analyticity. November 2004.
- 04-11 B. Heinrich, B. Jung. The Fourier-finite-element method with Nitsche-mortaring. November 2004.
- 04-12 A. Meyer, C. Pester. The Laplace and the linear elasticity problems near polyhedral corners and associated eigenvalue problems. December 2004.
- 04-13 M. Jung, T. D. Todorov. On the Convergence Factor in Multilevel Methods for Solving 3D Elasticity Problems. December 2004.
- 05-01 C. Pester. A residual a posteriori error estimator for the eigenvalue problem for the Laplace-Beltrami operator. January 2005.
- 05-02 J. Badía, P. Benner, R. Mayo, E. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, J. Saak. Parallel Order Reduction via Balanced Truncation for Optimal Cooling of Steel Profiles. February 2005.
- 05-03 C. Pester. CoCoS – Computation of Corner Singularities. April 2005.
- 05-04 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Einige Elemente, Fehlerschätzer und Ergebnisse. April 2005.
- 05-05 P. Benner, J. Saak. Linear-Quadratic Regulator Design for Optimal Cooling of Steel Profiles. April 2005.
- 05-06 A. Meyer. A New Efficient Preconditioner for Crack Growth Problems. April 2005.



- 05-07 A. Meyer, P. Steinhorst. Überlegungen zur Parameterwahl im Bramble-Pasciak-CG für gemischte FEM. April 2005.
- 05-08 T. Eibner, J. M. Melenk. Fast algorithms for setting up the stiffness matrix in hp-FEM: a comparison. June 2005.
- 05-09 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Vergleich der Fehlerindikatoren in Bezug auf die Netzsteuerung Teil I. June 2005.
- 05-10 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Vergleich der Fehlerindikatoren in Bezug auf die Netzsteuerung Teil II. July 2005.
- 05-11 A. Meyer, R. Unger. Subspace-cg-techniques for clinch-problems. September 2005.
- 05-12 P. Ciarlet, Jr, B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, J. Zou. The Fourier Singular Complement Method for the Poisson Problem. Part III: Implementation Issues. October 2005.
- 05-13 T. Eibner, J. M. Melenk. Multilevel preconditioning for the boundary concentrated hp-FEM. December 2005.
- 05-14 M. Jung, A. M. Matsokin, S. V. Nepomnyaschikh, Yu. A. Tkachov. Multilevel preconditioning operators on locally modified grids. December 2005.
- 05-15 S. Barrachina, P. Benner, E. S. Quintana-Ortí. Solving Large-Scale Generalized Algebraic Bernoulli Equations via the Matrix Sign Function. December 2005.
- 05-16 B. Heinrich, B. Jung. Nitsche- and Fourier-finite-element method for the Poisson equation in axisymmetric domains with re-entrant edges. December 2005.
- 05-17 M. Randrianarivony, G. Brunnett.  $C^0$ -paving of closed meshes with quadrilateral patches. December 2005.
- 05-18 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Quadrilateral removal and 2-ear theorems. December 2005.
- 05-19 P. Benner, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí. Solving linear-quadratic optimal control problems on parallel computers. December 2005.
- 06-01 T. Eibner, J. M. Melenk. p-FEM quadrature error analysis on tetrahedra. October 2006.
- 06-02 P. Benner, H. Faßbender. On the solution of the rational matrix equation  $X = Q + LX^{-1}L^T$ . September 2006.
- 06-03 P. Benner, H. Mena, J. Saak. On the Parameter Selection Problem in the Newton-ADI Iteration for Large Scale Riccati Equations. October 2006.
- 06-04 J. M. Badía, P. Benner, R. Mayo, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, A. Remón. Balanced Truncation Model Reduction of Large and Sparse Generalized Linear Systems. November 2006.
- 07-01 U. Baur, P. Benner. Gramian-Based Model Reduction for Data-Sparse Systems. February 2007.
- 07-02 A. Meyer. Grundgleichungen und adaptive Finite-Elemente-Simulation bei „Großen Deformationen“. Februar 2007.

- 07-03 P. Steinhorst. Rotationssymmetrie für piezoelektrische Probleme. Februar 2007.
- 07-04 S. Beuchler, T. Eibner, U. Langer. Primal and Dual Interface Concentrated Iterative Substructuring Methods. April 2007.
- 07-05 T. Hein, M. Meyer. Simultane Identifikation voneinander unabhängiger Materialparameter - numerische Studien. Juni 2007.

The complete list of CSC and SFB393 preprints is available via  
<http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/>



