

Vektoranalysis

1. Übung – Bereichsintegrale

1. Man bestimme die Integrationsgrenzen von

$$\iint_B f(x, y) d(x, y)$$

bei Zurückführung dieses Integrals auf ein Doppelintegral für

- a) B sei das Dreieck mit den Eckpunkten in $A = (0, 0), B = (1, 1), C = (1, 0)$
 - b) B sei das Dreieck mit den Eckpunkten in $A = (0, 0), B = (2, 0), C = (1, 1)$
 - c) B wird begrenzt durch $x = 0, y = 1, y^2 = x$.
2. Vertausche die Integrationsreihenfolge

a) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$

b) $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx$

c) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr d\varphi$

3. Berechne

a) $\iint_B x d(x, y),$

$B = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \leq -x + 2\}$

b) $\iint_B (x^2 + y) d(x, y),$

B endl. Gebiet, das von den Parabeln $y = x^2$ und $y^2 = x$ begrenzt wird.

c) $\iint_B \left(\frac{x}{y}\right)^2 d(x, y),$

B wird von $y = x, x = 2, xy = 1$ begrenzt

Z) $\iint_B y d(x, y),$

B Gebiet zwischen einem Zykloidenbogen und der x -Achse.

(Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge)

4. a) Das Integral

$$\iint_B \sqrt{1 - x^2 - y^2} d(x, y)$$

mit B der Einheitskreis ist durch Übergang in Polarkoordinaten zu berechnen.

- b) Schreiben Sie das Integral

$$\int_0^2 \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy dx$$

auf Polarkoordinaten um!

b.w.

Zusatz

Berechne das Integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

5. Bestimme mit Hilfe eines Doppelintegrals das Volumen des Körpers, der durch das elliptische Paraboloid $z = 2x^2 + y^2 + 1$, die Ebene $x + y = 1$ und die Koordinatenebenen begrenzt wird.

6. Der Inhalt welches Körpers wird durch das folgende Doppelintegral ausgedrückt

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx \quad ?$$

7. Berechne mit einem Raumintegral das Volumen des Körpers, der durch die Flächen $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$ begrenzt wird.

8. Berechne das Raumintegral $\int \int \int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ für

a) $f(x, y, z) = xyz,$

B wird begrenzt von $z^2 = x^2 + y^2$,
 $x^2 + y^2 + z^2 = 8, x = 0, y = 0$, wobei
 $x, y, z \geq 0$

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$

B wird begrenzt von den Flächen
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},$
 $z = 0$ und $z = c$ mit $c > 0$

9. Berechne das Volumen des Körpers, der von der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ aus dem Zylinder $x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}$ herausgeschnitten wird.

10. Man bestimme die Masse und die Lage des Schwerpunktes der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, wenn die Dichte in den Kugelpunkten dem Abstand dieser Punkte vom Koordinatenursprung umgekehrt proportional ist.

11. Ein Körper habe die Form eines Kegelstumpfes (Radien a, b , Höhe h). Berechne das Trägheitsmoment bzgl. seiner Achse für Dichte $\rho = 1$.

12. Berechne das Trägheitsmoment der in Zylinderkoordinaten gegebenen Lemmiskatenfläche

$$r^2 \leq 2a^2 \cos 2\varphi, \quad z = 0, \quad \frac{-\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

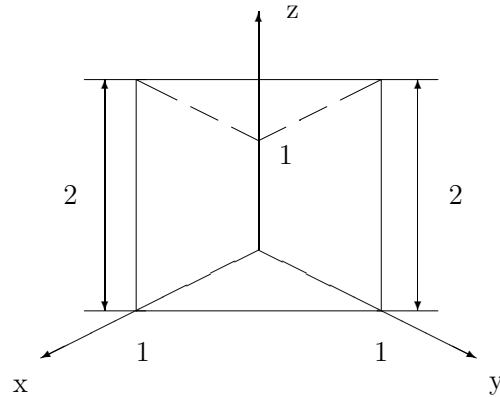
bzgl. der z -Achse für $\rho = 1$.

13. Berechnen Sie das Raumintegral

$$\int \int \int_B f(x, y, z) d(x, y, z), \quad \text{wenn } f(x, y, z) = \frac{1}{(x + y + z + 1)^3}$$

und B der Bereich ist, der von den Ebenen $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ begrenzt wird.

14. Stellen Sie das Raumintegral zur Berechnung des Volumens vom folgenden Prisma auf.



15. Berechne die Masse des Körpers B , wenn die Dichte $\rho(x, y, z) = e^{x^2+y^2}$ und $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$ ist.
16. Berechnen Sie die Ladung eines Ellipsoids, wenn die Ladungsdichte

$$\rho(x, y, z) = 1 - \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

beträgt (a, b, c seien die Halbachsen des Ellipsoids).