Mathematematik für Physiker und Computational Science Studenten

Zusatzübung – vollständige Induktion, binomischer Satz

---

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion

   (a) $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N},$

   (b) **(HA)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N},$

   (c) $2^n > n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 5$,

   (d) $(1+x)^n > 1+nx\ \forall x \in (-1,0) \vee (0,\infty),\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (Bernoulli Ungleichung).

2. (a) Beweisen Sie die binomische Formel (binomischer Satz)

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \ \ a, b \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{N}\,.$$

   (b) **(HA)** Stellen Sie eine Formel für die n-te Ableitung (nach x) des Produktes zweier n-mal differenzierbaren Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ auf, und beweisen Sie diese!