Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

Zusatzübung (Weihnachtspause) – Exakte Differentialgleichungen, integrierende Faktoren

---

1. Prüfe, ob folgende Differentialgleichungen exakt sind, und bestimme gegebenenfalls die Lösung mit Hilfe eines integrierenden Faktors

   (a) $x^3 dx + y^3 dy = 0$,

   (b) $x^2 - y^2 - 2xyy' = 0$,

   (c) $\dfrac{2x}{y^3}\, dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\, dy = 0$,

   (d) $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})\, dx + (x^2 + y^2)\, dy = 0$,

   (e) $(3x^2y + 4y^2)\, dx + (4xy - y^3)\, dy = 0$,

   (f) $(y + xy^2)\, dx + (x - x^2y)\, dy = 0$.

2. Bestimme die Form des integrierenden Faktors für die Differentialgleichung

   $$M dx + N dy = 0$$

   (in Abhängigkeit von M, N und evtl. z), wenn er vom folgenden Typ sein soll:

   (a) $\mu = \mu(x)$,

   (b) $\mu = \mu(z), \quad z = x + y$,

   (c) $\mu = \mu(z), \quad z = x \cdot y$.

3. Für welche λ wird die Differentialgleichung

   $$\lambda y(2 - x)y' = 3x^2 + y^2$$

   exakt? Bestimme für dieses λ eine Integralkurve durch den Punkt (1,1)!

4. Man beweise:

   Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ besitzt genau dann einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x)$, wenn sie linear ist.

5. Lösen Sie folgende Differentialgleichung

   $$\left(\frac{1}{xy} + 2x\right)\frac{dx}{dy} + y^2 - \frac{\ln x}{y^2} = 0\,.$$