Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

9. Übung – Vektoren, analytische Geometrie im $\mathbb{R}^3$

Unter $\vec{x}$ verstehen wir den Ortsvektor von x, $|\vec{x}|$ bezeichnet die Länge des Vektors $\vec{x}$, d.h. $|\vec{x}| = \|x\|$, $(\vec{a}, \vec{b})$ bezeichnet das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = ab$.

1. Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren der Länge 1, die einen Winkel von 30^o einschließen. Man berechne das Skalarprodukt $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$.
2. Existieren Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die gleichzeitig die Eigenschaften $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 4$ und $|\vec{a} \times \vec{b}| = 30$ besitzen?
3. (a) Man bestimme alle Vektoren, die auf $\vec{a}$ mit $a = [\,1 \;\; 1 \;\; 1\,]^T$ senkrecht stehen.
   (b) Man bestimme alle Vektoren, die auf $\vec{a}$ mit $a = [\,1 \;\; 1 \;\; 1\,]^T$ und $\vec{b}$ mit $b = [\,0 \;\; -1 \;\; 1\,]^T$ senkrecht stehen.
4. Gibt es einen Vektor, der mit den Vektoren i, j, k je einen Winkel von 45^o einschließt?
5. Seien g_1, g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$. Diese heißen **windschief**, wenn sie sich weder schneiden noch parallel sind!
   Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass g_1 und g_2 windschief sind! (Verwenden Sie dazu den Begriff des Kreuzproduktes!)
6. Stellen Sie ein Gleichungssystem (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten) auf, welches den Abstand zweier windschiefer Geraden liefert sowie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.
7. Gegeben seien zwei Ebenen E_1 und E_2 : E_1 liegt parallel zur Ebene $x + 2y + 2 = 0$ und enthält den Punkt $P(2, 5, -6)$. E_2 enthält die Punkte $Q(1, 0, 1), R(-1, -2, 1)$ und $S(4, 1, 2)$. Man bestimme
   (a) die Ebenengleichungen von E_1 und E_2,
   (b) die Schnittgerade von E_1 und E_2.
8. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Ebenen
$$E_1 : 2x + y + z - 4 = 0 \;\text{ und }\; E_2 : x + 2y - z + 3 = 0\,.$$
9. Formulieren und beweisen Sie den Satz des Thales!
10. Sei $A = (0, 0), B = (0, 4)$. Was ist der geometrische Ort aller Punkte P, die
    (a) $|AP| + |PB| = 8$, (b) $|AP| + |PB| = 4$, (c) $|AP| + |PB| = 2$.
    erfüllen?
11. Finden Sie die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel mit der Gleichung $x^2 = a^2 + y^2$ und den Winkel zwischen ihren beiden Asymptoten.

Zusatz: Seien F_1 und F_2 die Brennpunkte einer Ellipse E. Zeigen Sie, dass jeder Strahl, der vom Brennpunkt F_1 ausgeht, an der Ellipse so gespiegelt wird, dass er im Brennpunkt F_2 einfällt!

---

9. Hausaufgabe

1. Seien $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}, |\vec{b}| = 4$ und $\vec{a}, \vec{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{3\pi}{4}$ ein. Man berechne das Skalarprodukt $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$.

2. Gegeben seien $a = [3 \quad 0 \quad -1]^T, b = [-3 \quad 0 \quad 1]^T, c = [1 \quad 2 \quad -2]^T, d = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ und $e = [1 \quad 2 \quad 0]^T$. Man berechne $(\vec{a}, \vec{c} \times \vec{d})$ sowie $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{e} \times \vec{d}$.

3. Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden!

4. Welchen Abstand hat der Punkt $P(16, -9, 7)$ von der Ebene durch die Punkte $A(1, 4, 2), B(0, -2, 1)$ und $C(2, 1, -1)$? In welchen Punkten schneidet diese Ebene die Koordinatenachsen?

5. Man bestimme die Gleichungen der Ebenen, die parallel zur Ebene $2x + 2y + z - 8 = 0$ liegen und von ihr den Abstand 4 haben.

6. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide habe die Eckpunkte $A(2, 0, 0), B(0, 3, 0)$ und $C(0, 0, 6)$. Der Punkt $D(2, 3, 8)$ sei die Spitze der Pyramide. Man berechne
   (a) den Inhalt der Grundfläche,
   (b) die Höhe der Pyramide,
   (c) den Fußpunkt des Lotes von D auf die Grundfläche und
   (d) das Volumen der Pyramide.

7. Berechnen Sie den Abstand der Geraden
$$g_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } g_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

8. Bestimmen Sie den Abstand der Geraden
$$g_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 12 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } g_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$
sowie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.