# Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

## 8. Übung – Funktionenreihen

---

1. Bestimmen Sie für die (reellwertige) Funktion $f(x)$ das Taylorpolynom dritten Grades zum Entwicklungspunkt $x_0$, und geben Sie das Restglied nach Lagrange an:

   (a) $f(x) = e^{1-x}$, $x_0 = 0$ (b) $f(x) = e^{1-x}$, $x_0 = 1$
   **(HA)** (c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$ **(HA)** (d) $f(x) = \tan x$, $x_0 = 0$

2. Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierten Grades von $f(x) = e^x \cos x$ mit Hilfe

   **(HA)** (a) der Ableitungen, (b) von Reihenmultiplikation.

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

   **(HA)** (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3(z-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ ,

   (b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}(z+2)^n$ ,

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-1)^n}{n!}$ .

   Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die Reihen?

4. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe nach Potenzen von $z \in \mathbb{C}$ (unter Verwendung bekannter Taylorreihen)

   (a) $f(z) = e^{-z^2}$ , **(HA)** (b) $f(z) = \sinh z$ ,
   (c) $f(z) = a^z$ , (d) $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$ .

   Geben Sie den Konvergenzbereich an !

5. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe zum Entwicklungspunkt $z_0$, und geben Sie den Konvergenzbereich an

   (a) $f(z) = e^z$ $(z_0 = \pi)$ , (b) $f(z) = \frac{1}{z-1}$ $(z_0 = 2)$ ,
   **(HA)** (c) $f(z) = \sin z$ $(z_0 = \pi)$ , **(HA)** (d) $f(z) = z^2 e^{-z} (z_0 = 0)$ .

6. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourierreihe im angegebenen Intervall nach dem Funktionensystem $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ (Diskussion der Sprungstellen, Intervallenden und Skizze).

   (a) $f(x) = \sin ax$ in $(-\pi, \pi)$ $(a = \text{const})$,
   (b) $f(x) = |\cos x|$ in $(-\infty, \infty)$,
   **(HA)** (c) $f(x) = |x|$ in $(-\pi, \pi)$,
   **(HA)** (d) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ in $(-\pi, \pi)$.

7. Zerlegen Sie $f(x) = x^2$ in $(0, \pi)$ in eine Cosinusreihe ! Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Resultate die Summe der Reihen

   $$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} , \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \ !$$

**Zusatz 1:** Sei $f$ in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und $f'$ sei hölderstetig in $x_0$ (mit dem Hölderkoeffizienten $\alpha$), d.h.

$$\exists \varepsilon > 0\,,\ \exists c > 0 : |f'(x) - f'(x_0)| \le c|x - x_0|^\alpha\,,\ x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon_0)\,.$$

Man zeige, dass dann folgendes gilt:

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \le c|x - x_0|^{1+\alpha} \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\,.$$

**Zusatz 2:** Berechnen Sie die Summe folgender Potenzreihen, und geben Sie den Konvergenzbereich an

$$\text{(a)}\quad x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\,, \qquad \text{(b)}\quad \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \cdots\,.$$

---

### 8. Hausaufgabe

1. Welchen Grad muß das Taylorpolynom von $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_o = 0$ mindestens haben, um $f(\frac{\pi}{15}) = \sin 12^o$ mit einem Fehler, der kleiner als $10^{-3}$ ist, zu berechnen ?

2. Beweisen Sie eine Formel für die $n$-te Ableitung der (reellen) Funktion

   $$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \ln(1 + x)\,.$$

   Geben Sie die Taylorreihe dieser Funktion sowie deren Konvergenzgebiet an (Randpunkte diskutieren)!

3. Stellen Sie durch eine unendliche Reihe dar:

   $$\text{(a)}\quad \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)}\quad \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4. Zerlegen Sie $f(x) = \frac{\pi}{4}$ in $(0, \pi)$ in eine Sinusreihe! Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem von 6 (d) der 8. Übung!

5. Gegeben sei eine auf $\mathbb{R}$ stetige $w$-periodische Funktion $f$. Zeigen Sie, dass dann jedes Integral über ein beliebiges Intervall der Länge $w$ den Wert

   $$W := \int_0^w f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{hat.}$$

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $2T$ periodisch ($T \ne \pi$). Wie sieht die zugehörige Fourier-Reihe aus ?

7. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 8. Übung!