Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

7. Übung – Integration

---

1. Man bestimme mit Hilfe geeigneter Substitutionen

$$\text{a)} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx\,, \qquad \text{b)} \int \frac{x dx}{3-2x^2}\,, \qquad \text{c)} \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\ dx\,,$$

$$\textbf{(HA)}\ \text{d)} \int \frac{dx}{x\ \ln x\ \ln(\ln x)}\,, \qquad \textbf{(HA)}\ \text{e)} \int \tan x dx\,, \qquad \textbf{(HA)}\ \text{f)} \int \sin^5 x \cos x dx\,.$$

2. Man bestimme mit Hilfe der Methode der partiellen Integration

$$\text{a)} \int x^2 e^{-2x}\ dx\,, \qquad \text{b)} \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\ dx\,,$$

$$\textbf{(HA)}\ \text{c)} \int \sqrt{x}\ln^2 x\ \ dx\,, \qquad \text{d)} \int \arctan x\ \ dx\,,$$

$$\textbf{(HA)}\ \text{e)} \int x\ln\frac{1+x}{1-x}\ \ dx\,, \qquad \textbf{(HA)}\ \text{f)} \int \cos^2 x\ \ dx\,.$$

3. Man berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\text{a)} \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\ \ dx\,, \qquad \textbf{(HA)}\ \text{b)} \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,,$$

$$\text{c)} \int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}\,, \qquad \text{d)} \int \left(\frac{x}{x^2+3x+2}\right)^2\ dx\,,$$

$$\textbf{(HA)}\ \text{e)} \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}\,, \qquad \textbf{(HA)}\ \text{f)} \int \frac{dx}{x^4+1}\,.$$

4. Man berechne

$$\textbf{(HA)}\ \text{a)} \int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\ \ dx\,, \qquad \text{b)} \int \frac{1}{\sin x}\ \ dx\,,$$

$$\textbf{(HA)}\ \text{c)} \int \frac{1+x}{1-x}\ \ dx\,, \qquad \text{d)} \int \frac{2x+5}{x^2+4x+5}\ \ dx\,,$$

$$\textbf{(HA)}\ \text{e)} \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\ \ dx\,, \qquad \text{f)} \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,.$$

5. Berechnen Sie

$$\textbf{(HA)}\ \text{a)} \int_{-1}^{1} x|x|dx, \quad \text{b)} \int_{2}^{3{,}5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,, \quad \text{c)} \int_{0}^{1} \frac{x dx}{a+bx}\ (a,b\in\mathbb{R}), \quad \textbf{(Z)} \int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

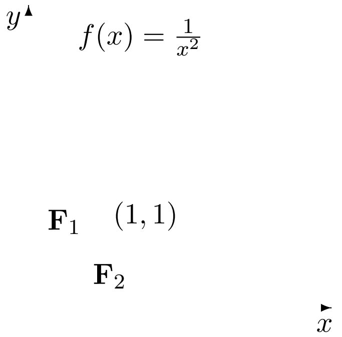
6. Zeigen Sie folgende Abschätzungen

$$\text{a)}\ \frac{1}{2} < \int_{o}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6}, \qquad \textbf{(Z)}\ \frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_{a}^{x} \arctan y\ dy\,.$$

8. Untersuchen Sie, ob die in der Abbildung schraffierten Flächen F_1 und F_2 einen endlichen Flächeninhalt besitzen.



9. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale bzw. zeigen Sie deren Divergenz:

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$, b) v.p. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$,

c) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$, d) $\displaystyle\int_\pi^\infty \sin x dx$,

e) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin x dx$, f) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-kx} dx \ (k > 0)$,

g) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$, h) v.p. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$,

(HA) i) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{ax} \sin bx \, dx \ (a < 0)$, j) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$,

(HA) k) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$, **(HA)** l) $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$,

(HA) m) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$, **(HA)** n) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$.

10. Berechnen Sie mit Hilfe eines Kurvenintegrals den Umfang

(HA) a) des Kreises mit Radius a, $(a > 0)$,

b) der Astroide: $x = a\cos^3 t, y = a \sin^3 t$, $(0 \leq t \leq 2\pi, \ a > 0)$.

11. Berechnen Sie die Länge folgender Kurven

a) $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t} \quad (0 \leq t < \infty)$,

(HA) b) Stück einer Schraubenlinie der Ganghöhe $2\pi h$ $(h > 0)$:
$x = r\cos t, y = r \sin t, z = ht \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$,

(HA) c) Stück der Neilschen Parabel $y = x^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leq x \leq 4)$

12. Ein Malermeister soll einen unendlichen Trichter, der bei Rotation des Graphen der Funktion $z : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $z(y) = \frac{1}{y}$, um die y-Achse entstanden ist, rot einfärben. Er befragt seinen intelligenten Lehrling ob er den Trichter anmalen oder mit Farbe füllen sollte! Dieser löst zwei leichte Aufgaben und trifft dann eine Entscheidung! Welche und warum?

Zusatz 1: Bestimmen Sie alle differenzierbaren, reellwertigen Funktionen $f(x)(x \geq 0)$, welche der folgenden Integralgleichung genügen:

$$\int_0^x tf(t)dt = f(x) - \frac{x^2}{2}$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

Zusatz 2:

Sei $f(x)$ eine positive, stetige Funktion. Man zeige $\varphi(x) := \dfrac{\int_o^x tf(t)dt}{\int_o^x f(t)dt}$ wächst für $x \geq 0$.

---

7. Hausaufgabe

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 7. Übung!
2. Man bestimme mit Hilfe (elementarer) Zurückführung auf Grundintegrale

   a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} \; dx\,,$ b) $\displaystyle\int (1 - \frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}} \; dx\,,$

   c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} \; dx\,,$ d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} \; dx\,,$

   e) $\displaystyle\int \tan^2 x \; dx\,,$ f) $\displaystyle\int \frac{x^n-1}{x-1} \; dx \; (n \in \mathbb{N})\,.$

   Überprüfen Sie die Ergebnisse!
3. Unter welcher Bedingung ist $I(x) = \displaystyle\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ eine rationale Funktion?
4. Berechnen Sie die Fläche, die von den Parabeln $f(x) = 2 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ eingeschlossen wird.
5. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des Rotationskörpers R, der bei Rotation des Graphen der Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\,,\; f(x) = e^x$ und die x-Achse entsteht!