**Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten**

**6. Übung – Grenzwerte, Stetigkeit und Ableitungen von Funktionen, Kurvendiskussion**

---

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenfalls (ohne Benutzung der Regel von l'Hospital):

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, **(HA)** (b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\frac{2}{x+1}+3}{5+\frac{1}{x^2-1}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$, **(HA)** (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x}$, **(HA)** (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$, **(HA)** (h) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x(x+1)}-x)$,

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$, **(HA)** (j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$.

In welchen Fällen liegt bestimmte Divergenz vor?

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte der Gestalt „$1^\infty$“

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x \quad (a\in\mathbb{R})$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$,

**(HA)** (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$, **(HA)** (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x}$,

**(HA)** (e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (a\in\mathbb{R})$, **(HA)** (f) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Bestimmen Sie die linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\to a-0} f(x)\,, \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

für:

(a) $f(x) = \left(\tan\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right)^{\tan 2x}$ $\quad a=\dfrac{\pi}{4}$,

**(HA)** (b) $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{x}$, $\quad a=0$,

(c) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, $\quad a=0\,,\ a=1$,

**(HA)** (d) $f(x) = |x|-x$, $\quad a=0$,

**(HA)** (e) $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$, $\quad a=1\,,\ a=0$.

4. Beweisen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen in $x=a$, jeweils nach der $\varepsilon-\delta$-Definition:

(a) $f:(0,1)\to\mathbb{R}\,,\ f(x)=\sqrt{x}\,, \quad a\in(0,1)\,,$

**(HA)** (b) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}\,,\ f(x)=4x^2\,, \quad a\in[-1,1]\,.$

5. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit in $[-1, 1]$

(a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, **(HA)** (b) $f(x) = \cos x^2 - (\sin x)^3 + \sqrt{|x|}$,

(c) $f(x) = \begin{cases} 2^x & : x \geq 0 \\ \frac{1}{2^x} & : x < 0 \end{cases}$, **(HA)** (d) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$.

6. Untersuchen Sie mit Hilfe der Definition folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit, und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{ax + b}$ $(b \neq 0)$, (b) $f(x) = |x|$, **(HA)** (c) $f(x) = \sin x$.

7. Bilden Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen (an den Stellen, wo die Funktionen differenzierbar sind). Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

**(HA)** a) $y = x^3(x^2 - 1)^2$, **(HA)** b) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$, **(HA)** c) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

**(HA)** d) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, **(HA)** e) $y = 2^{\sin 3x}$, f) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$,

**(HA)** g) $y = \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, **(HA)** h) $y = x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$,

i) $y = a^{(a^x)}$, j) $y = x^x$.

8. Berechnen Sie mit der Regel von l'Hospital

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$, (c) $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x$,

(d) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$, (e) $\lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$.

9. Wie erklärt man folgendes Phänomen: Der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

ist von der Form "$\frac{\infty}{\infty}$" und offenbar gleich 1. Nach der Regel von l'Hospital erhält man als Quotienten der Ableitungen aber $1 + \cos x$, was für $x \to \infty$ keinen Grenzwert besitzt.

10. Welches Rechteck mit den Seiten parallel zu den Achsen der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, das in die Ellipse einbeschrieben ist, besitzt den grössten Flächeninhalt?

11. Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x^2 - 1} & : \ |x| \neq 1 \\ 1 & : \ |x| = 1 \end{cases}$$

(a) Unstetigkeitsstellen, (b) die Nullstellen und die Extrema,

(c) die Asymptoten, (d) die Wendepunkte,

(e) alle Intervalle, wo $f$ konvex bzw. konkav ist.

12. Gelten folgende Beziehungen bei $x \to x_0$:

(a) $\sin x = O(x \cos x)$, $x_0 = 0$ **(HA)** (b) $x = O(e^x)$, $x_0 = \infty$,

**(HA)** (c) $e^x = O(1)$, $x_0 = 0$ **(HA)** (d) $x^5 = o(x^4)$, $x_0 = \infty$,

**(HA)** (e) $e^x = 1 + O(x^2)$, $x_0 = 0$ **(HA)** (f) $x \cos x = x + o(x^2)$, $x_0 = 0$.

13. Gibt es Konstanten $C \in \mathbb{R}$ und positive reelle Zahlen $k$ so, dass für $x \to 0$ gilt:

(a) $\cos x - 1 \sim Cx^k$, **(HA)** (b) $\sin x \sim Cx^k \cos x$,

(c) $\sqrt{1 + x} - 1 \sim Cx^k$, **(HA)** (d) $\sqrt[m]{1 + x} - 1 \sim Cx^k$,

**(HA)** (e) $\tan x - \sin x \sim Cx^k$.

14. Zeigen Sie, dass $\sin x \simeq 2x + x\cos\frac{1}{x}$ für $x \to 0$ gilt!

**Zusatz 1:** Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von folgenden Funktionen $f$:
(a) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x,$ (b) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x.$

**Zusatz 2:** Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = \dfrac{2k+1}{4}\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \\ \dfrac{\cos x}{\cos 2x} & : \quad \text{sonst} \end{cases} \quad ?$$

Ist dies eine gerade Funktion? Ist sie periodisch? Geben Sie Extremwerte und Asymptoten an !

**Zusatz 3:** Beweisen Sie die Ungleichungen

(a) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|,$ (b) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0.$

---

## 6. Hausaufgabe

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 6. Übung!
2. Überprüfen Sie, wenn möglich, mit der Regel von l'Hospital die Resultate aus den Aufgaben 1 (a), (b), (c), (g), (i), 2 (a), (b), (f).
3. Bestimmen Sie, in welchen Intervallen $f(x)$ monoton ist und wo die Extremwerte von $f(x)$ liegen:

   (a) $f(x) = 2x^2 - x^4,$ (b) $f(x) = xe^{-x}.$
4. Die durch eine punktförmige Lichtquelle verursachte Beleuchtungsstärke nimmt mit dem Quadrat des Abstandes zwischen Ausgangs- und Beobachtungspunkt (des Lichtstromes) ab. Wo befindet sich der dunkelste Punkt zwischen zwei 10 m voneinander entfernten punktförmigen Lichtquellen, falls eine viermal so stark wie die andere ist?
5. (a) Bestimmen Sie Maximum und Minimum von $f(x) = 3x - x^3$ für $x \in [-2, 3]$.

   (b) Gilt bei $|x| < 2$ die Ungleichung $|3x - x^3| \leq 2$ ?