Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

5. Übung – Zahlenreihen

---

1. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{10}}$ (b) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$ (e) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (h) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(e-(1+\frac{1}{n})^n)$ (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

   (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$ (k) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (l) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}\right)$

2. Geben Sie die Summe $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ folgender Reihen an:

   (a) $a_n = \dfrac{1}{(d+n)(d+n+1)}$ $(-d \notin \mathbb{N})$, (b) **(HA)** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

   (c) **(HA)** $a_n = \dfrac{1}{n!}$, (d) **(HA)** $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, (e) **(HA)** $a_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$.

3. Schreiben Sie die folgenden Reihen in der Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und untersuchen Sie, ob die Reihen konvergieren oder sogar absolut konvergieren:

   (a) **(HA)** $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots,$ (b) **(HA)** $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots,$

   (c) $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots,$ (d) **(HA)** $1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \dots,$

   (e) **(HA)** $1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots,$ (f) **(HA)** $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \pm \dots,$

   (g) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^2} \pm \dots .$

4. Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdot\dots\cdot(x-n)}$$

   konvergent?

5. (a) Verwenden Sie den binomischen Satz um zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{n} \le 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

   (b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist! Folgern Sie daraus, dass für $a > 0$ auch

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

   ist!

(c) Untersuchen Sie die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \sqrt[n]{n}$ auf Monotonie!

(d) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}-1}$?

(e) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \sqrt[n]{n})$?

(f) Konvergiert die Reihe aus (e) absolut?

6. Wir definieren mit Hilfe der harmonischen Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ folgende Reihen:

   (a) **HA:** Wir summieren nur über gerade Zahlen aus $\mathbb{N}$.

   (b) **HA:** Wir summieren nur über durch 10 teilbare natürliche Zahlen.

   (c) Wir summieren nur über natürliche Zahlen n bei denen in der Dezimaldarstellung die Ziffer 9 nicht vorkommt.

   Welche der so definierten Reihen ist konvergent?

7. Untersuchen Sie, ob die Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind:

   (a) $x_n = \frac{1}{n}$, (b) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

8. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n < e^2$ ist.

5. Hausaufgabe

---

1. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6n}\right)^n$, (b) $\left(\sum\limits_{k=1}^{2007} \frac{k!}{5^k}\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

2. Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetzt.

   (a) Wie hoch wird der Turm?

   (b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

   (c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

3. Für $n > 1$ gilt offenbar

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}.$$

   Man leite daraus eine obere und untere Schranke für die folgende Reihe her:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

4. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 5. Übung!