Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

4. Übung – Konvergenz von Zahlenfolgen

---

1. Geben Sie a und $N(\varepsilon)$ an, so dass $\forall \varepsilon > 0$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$:
   (a) $x_n = \frac{n}{n^3+n^2+1}$, (b) **(HA)** $x_n = \frac{\sin^3 n + \cos^2 n}{\sqrt{n}}$, (c) **(HA)** $x_n = \frac{n-1}{n^2-1} - 1$.

2. Bestimmen Sie die Grenzwerte von
   (a) $x_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}$, (b) **(HA)** $x_n = n^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)$,
   (c) $x_n = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i n^i}{\sum\limits_{i=0}^{j} b_i n^i}$ $(k, j \in \mathbb{N})$, (d) **(HA)** $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$,
   (e) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, (f) **(HA)** $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$,
   (g) $x_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$, (h) **(HA)** $x_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$,
   (i) $x_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$, (j) **(HA)** $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ $(a, b > 0)$,
   (k) $x_n = \frac{n^3 + (-1)^n n^2}{2n^3+1}$, (l) **(HA)** $x_n = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}$,
   (Z) $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) \quad n \geq 2, \quad x_0 = 2,\ x_1 = 1.$

3. Es sei (x_n) eine Nullfolge und (c_n) eine beschränkte Zahlenfolge.
   Dann gilt $\tilde{x}_n := c_n x_n \to 0$ für $n \to \infty$.

4. Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a unterliegt die sogenannte Kochsche Schneeflocke der folgenden Bildungsvorschrift. Die Berandung T_n nach dem n-ten Entwicklungsschritt entsteht aus T_{n-1} indem auf dem mittleren Drittel einer jeden geradlinigen Berandungsstrecke von T_{n-1} ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

   Man berechne den Umfang U_n und Flächeninhalt F_n der Figur T_n sowie $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$. (Hinweis: Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge a beträgt $F_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.)

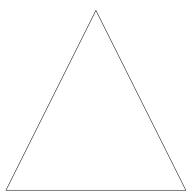

Abbildung 1: Schneeflocke T_0.

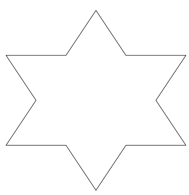

Abbildung 2: Schneeflocke T_1.

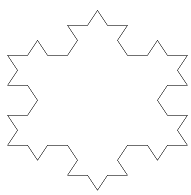

Abbildung 3: Schneeflocke T_2.

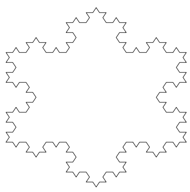

Abbildung 4: Schneeflocke T_3.

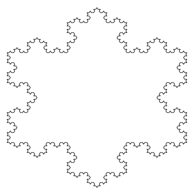

Abbildung 5: Schneeflocke T_4.

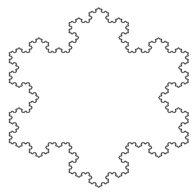

Abbildung 6: Schneeflocke T_5.

5. Ermitteln Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen

   (a) $x_n = \frac{c^n}{n!} \quad (c > 0)$, **(Z)** $x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}_{n\,Wurzeln} \quad (c > 0)$,

   (b) $x_{n+1} = x_n(2 - x_n) \quad (0 < x_0 < 1)$.

   (c) **(HA)** Lösen Sie (b) für x_0 beliebig graphisch mit Hilfe des Computers!

Zusatz 1: Seien $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und $e := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Beweisen Sie:

(a) $e - s_n < \frac{1}{n!n}$. (b) Die Zahl e ist irrational.

Zusatz 2: Sie sollen mit Hilfe eines Computers den Wert $\sqrt{x}$ $(x > 0)$ berechnen. Ein Mathematiker behauptet, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$ mit $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$, $a_1 > 0$, $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist diese Behauptung richtig? (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass (a_n) konvergiert!)

4. Hausaufgabe

---

1. Ermitteln Sie die Grenzwerte und diskutieren Sie die unterschiedlichen Annäherungen nachstehender Folgen an diese (Skizze!):

   (a) $x_n = \frac{1}{n}$, (b) $x_n = -\frac{1}{n}$, (c) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, (d) $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$,

   (e) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

2. Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Man gebe Beispiele mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ an, für die obige Aussage falsch ist, insbesondere soll gelten:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = c$ $(c \in \mathbb{R})$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.

3. Geben Sie eine „ε-Definition“ dafür an, dass eine Folge (x_n) **nicht** gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

4. Es seien $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \frac{7a_n+2}{6a_n+3}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $a_n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist, d.h. $a_n - a_{n+1} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie, dass (a_n) eine konvergente Folge ist! Bestimmen Sie den Grenzwert.

5. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC habe die Katheten a und b und die Hypotenuse c. Von C wird das Lot auf die Hypotenuse gefällt. Vom Fußpunkt des Lotes wird das Lot auf die Kathete b, von dessen Fußpunkt das Lot auf c, dann wieder auf b usw. gefällt. Das Verfahren denke man sich unbegrenzt fortgesetzt. Zeigen Sie, dass die Summe der Längen $h_i \, (i = 1, 2, \dots)$ aller Lote gleich $\frac{ab}{c-b}$ ist. (Hinweis: Drücken Sie h_i mit Hilfe eines der Winkel im Dreieck aus!)

6. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 4. Übung!