Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

3. Übung – Mengen, Funktionen, Relationen

---

1. Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$\begin{array}{ll} M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}, & M_2 = \{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}, \\ M_3 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\}, & M_4 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \cdots\}. \end{array}$$

2. Geben Sie alle Teilmengen der Menge $M = \{1, 2, 3\}$ an !

3. Wieviel verschiedene Teilmengen hat eine endliche Menge M?

4. Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie:

   (a) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$,

   (b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

   (c) **(HA)** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,

   (d) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, wobei $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

5. Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x \leq t\}$. Bestimmen Sie

   (a) $\bigcup\limits_{0<t\leq 1} M_t$, (b) $\bigcap\limits_{0<t\leq 1} M_t$, (c) $\bigcup\limits_{0<t<1} M_t$, (d) **(HA)** $\bigcap\limits_{1\leq t<2} M_t$,

   (e) **(HA)** $\bigcap\limits_{0<t<1} M_t$.

6. Geben Sie alle Funktionen $f : I \to M$ an:

   (a) $I = \{a_1, a_2\}$, $M = \{1, 2\}$, (b) $I = \{a\}$, $M = \{l, m, n\}$,

   (c) $I = \{a, b\}$, $M = \{3\}$

   und entscheiden Sie, ob diese injektiv, surjektiv, bijektiv sind!

7. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \to B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

	(a)	$A = B = \mathbb{R}$,	$f(x) = e^x$
(HA)	(b)	$A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$,	$f(x) = e^x$
	(c)	$A = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \sqrt{x}$
	(d)	$A = B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \sin x$
(HA)	(e)	$A = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\},\ B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \tan x$
	(f)	$A = B = \mathbb{N}$,	$f(n) = n^2$
(HA)	(g)	$A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{Q}$,	$f(n) = \frac{1}{n}$
	(h)	$A = B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \lvert 2x - 4 \rvert$

   Geben Sie gegebenenfalls Einschränkungen A', B' von A, B an so, dass $f : A' \to B'$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B' \to A'$.

8. Seien $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ zwei Funktionen und $h = g \circ f : X \to Z,\ h(x) := g(f(x))$, ihre Komposition. Zeigen Sie: Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch h bijektiv. (Gilt h bijektiv auch unter schwächeren Voraussetzungen an f und g?)

9. Geben Sie eine Relation auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ an, die nicht reflexiv, aber symmetrisch und transitiv ist.

10. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch?

   (a) $X = \mathbb{N}$, $mR_a n$, wenn $m + n$ gerade

   (HA) (b) $X = \mathbb{N}$, $mR_b n$, wenn $m + n$ ungerade

   (c) $X = \mathbb{N}$, $mR_c n$, wenn $|m - n| \leq 2$

   (d) $X = \mathbb{N}$, $mR_d n$, wenn $\frac{m}{n}$ ganzzahlige Potenz von 2

   (e) $X = \mathbb{N}$, $mR_e n$, wenn $m|n$

   (f) $X = \mathbb{R}$, $xR_f y$, wenn $e^x = e^y$

   (g) $X = \mathbb{R}$, $xR_g y$, wenn $x^2 = y^2$

   (h) $X = \mathbb{Z}$, $aR_h b$, wenn $4|(a - b)$

   (HA) (i) $X = \mathbb{N}$, $mR_i n$, wenn mn ungerade

   (j) $X = \mathbb{R}$, $xR_j y$, wenn $x \leq y$

   (k) $X =$ Menge der Menschen, $\overset{\frown}{\bigcirc}\ R_k\ \overset{\smile}{\bigcirc}$, wenn $\overset{\frown}{\bigcirc}$ liebt $\overset{\smile}{\bigcirc}$

11. Welche der Relationen aus Aufgabe 10 sind Ordnungsrelationen und welche Äquivalenzrelationen? (Geben Sie die entsprechende Klasseneinteilung an!).

12. Zeigen Sie, daß folgende Relation auf $\mathbb{N}^2$ eine Äquivalenzrelation ist:

$$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2 \,.$$

   Jede Äquivalenzklasse kann dabei mit einer positiven rationalen Zahl identifiziert werden.

13. Geben Sie eine Bijektion zwischen folgenden Mengen an:

   (a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, (b) **(HA)** $[a, b], [c, d]$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, (c) **(HA)** $(-\infty, \infty), (0, 1)$,
   (d) $[0, 1), (0, 1]$.

Zusatz: Gibt es eine Bijektion zwischen folgenden Mengen:

(a) $(0, 1), (0, 1]$, (b) $(0, 1) \times (0, 1), (0, 1)$,

(c) M beliebige Menge, $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge.

Wenn ja, geben Sie eine Bijektion an!

3. Hausaufgabe

---

1. Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{-1, 1\}, \qquad M_2 = [-1, 1],$$
$$M_3 = (a, b), \qquad M_4 = (c, d],$$
$$M_5 = \{2, 4, 8, 16, 32, \cdots\}, \qquad M_6 = \{-4, -2, +2, 4\}\,.$$

2. Geben Sie folgende Mengen durch Angabe ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \quad \text{und} \quad x = 3g_2; g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\},$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \quad \text{oder} \quad x = 3g_2; g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\},$$
$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^3 = x^3 + 1\},$$
$$M_4 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\}, \qquad M_5 = \{x \in \mathbb{R} : e^x = 0\},$$
$$M_6 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -\cos x\}, \qquad M_7 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\},$$
$$M_8 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = x - 1\}, \qquad M_9 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\}.$$

3. Welche Beziehungen (Inklusionen) bestehen zwischen

   (a) der Lösungsmenge A der Gleichung $\sin\frac{x}{3} \cdot \sin\frac{x}{5} = 0$,
   der Lösungsmenge B der Gleichung $\sin\frac{x}{3} = 0$ und
   der Lösungsmenge C der Gleichung $\sin\frac{x}{5} = 0$

   (b) der Lösungsmenge L_1 der Gleichung $2\sin^2 x = 1$ und
   der Lösungsmenge L_2 der Gleichung $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$?

4. Bilden Sie für die Mengen $M = \{a, b\}, I = \{1, 2, 3\}$ die Mengen $I \times M, M \times I, M^2$!

5. Untersuchen Sie, ob folgende Relationen auf X Äquivalenzrelationen sind:

   (a) $X = \mathbb{R}$, $\quad xRy :\Leftrightarrow |\cos x| = |\cos y|$
   (b) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\quad (a, b)R(c, d) :\Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$
   (c) $X = \mathbb{R}^n$, $\quad (x_j)_{j=1}^n R (y_j)_{j=1}^n :\Leftrightarrow x_j \le y_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$
   (d) $X =$ Potenzmenge von Menge M, $\quad xRy :\Leftrightarrow x \subset y$,
   (e) $X = \mathbb{R}$ $\quad xRy :\Leftrightarrow 5|(x - y)$.

6. Die Menge der Dreiecke wurde in

   (a) rechtwinklige, spitzwinklige, stumpfwinklige,
   (b) gleichseitige, gleichschenklige, ungleichseitige

   eingeteilt. Ist dadurch eine Klasseneinteilung einer Äquivalenzrelation gegeben? (Begründung!)

7. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 3. Übung!