Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

24. Übung – Gebrochen lineare Abbildungen

---

1. In welche Figuren gehen folgende Mengen bei der Abbildung $f(z) = (\overline{z})^{-1}$ (Spiegelung am Einheitskreis) über?

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}, \quad r > 0,$

   (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\},$

   (c) **(HA)** $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1\},$

   (d) **(HA)** eine beliebige Gerade durch $z_0 \neq 0$.

2. Man bestimme das Bild

   (a) von $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bei der Abbildung $w = \dfrac{z}{1-z}$,

   (b) **(HA)** der rechten Halbebene bei der Abbildung $w = \dfrac{1-z}{1+z}$,

   (c) des 1. Quadranten bei der Abbildung $w = \dfrac{\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$.

3. Für die Abbildung $w = \dfrac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$ bestimme man das Bild

   (a) der rellen Achse, (b) der imaginären Achse, (c) **(HA)** des Einheitskreises

   und alle Fixpunkte.

4. Bestimmen Sie eine Abbildung $w = az + b$ mit dem Fixpunkt $1 + 2\mathbf{i}$, die den Punkt $\mathbf{i}$ in den Punkt $-\mathbf{i}$ überführt.

5. Man bestimme eine gebrochen lineare Abbildung $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, die die Punkte

   (a) $-1, \mathbf{i}, 1+\mathbf{i}$ in die Punkte $0, 2\mathbf{i}, 1-\mathbf{i}$,

   (b) **(HA)** $-1, P_\infty, \mathbf{i}$ in die Punkte $P_\infty, \mathbf{i}, 1$

   überführt.

Zusatz 1:

(a) Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen (d.h. die gebrochen-linearen Abbildungen $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$) bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe G bilden.

(b) Überprüfen Sie, ob die Möbiustransformationen $f(z)$ aus (a) mit $ad - bc = 1$ eine Untergruppe U von G bilden, die zur (multiplikativen) Gruppe V aller Matrizen A aus $\mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\det A = 1$ homomorph ist!

Zusatz 2: Geben Sie die allgemeine Form einer gebrochen linearen Abbildung an, die den Einheitskreis auf die untere Halbebene abbildet.