Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

23. Übung – Integrale, Laurentreihen, Residuen

---

1. Man berechne

   (a) $\int\limits_{\alpha}^{\beta} z\,dz$, (b) $\int\limits_{0}^{2\pi\mathbf{i}} e^z dz$, (c) $\int\limits_{0}^{(1+\mathbf{i})\pi} \cos z\,dz$,

   (d) **(HA)** $\int\limits_K z\overline{z}dz$, wobei K die geradlinige Verbindung von 0 nach $1+\mathbf{i}$ ist.

2. Man berechne unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel das Integral

   $$I_K := \int\limits_K \frac{dz}{1+z^2},$$

   wenn K positiv orientiert und durch folgende Gleichungen gegeben ist:

   (a) $|z-\mathbf{i}|=1$, (b) $|z+\mathbf{i}|=1$, (c) **(HA)** $|z|=2$.

3. Man berechne

   (a) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$, (b) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+\mathbf{i}}$, (c) **(HA)** $\int\limits_{|z+2\mathbf{i}|=3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$,

   (d) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}dz}{z^3(1-z)}$, (e) **(HA)** $\int\limits_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$,

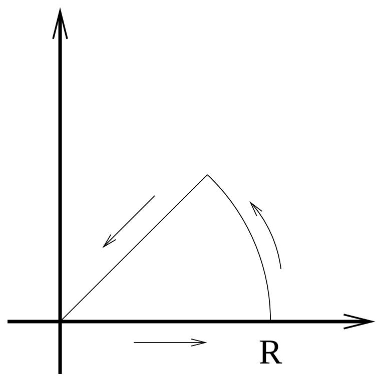
   (f) **(HA)** $\int\limits_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}$ $(n,m\in\mathbb{N}, |a|<r<|b|)$.

   (alle Kreise seien positiv orientiert)

4. Man berechne die Fresnelschen Integrale

   $$\int\limits_0^\infty \cos x^2 dx \quad \text{und} \quad \int\limits_0^\infty \sin x^2 dx$$

   mittels Integration der Funktion $f(z)=e^{\mathbf{i}\,z^2}$ entlang der in der Abbildung angegebenen Kurve und Grenzübergang $R\longrightarrow\infty$.



5. Man beweise folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville: Ist $f(z)$ eine ganze Funktion und existieren Konstanten $c > 0$ und $R > 0$, so dass $|f(z)| \leq c|z|^m \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus U_R(0)$, so ist $f(z)$ ein Polynom, dessen Grad außerdem nicht größer als m ist.

Zusatz: Man zeige, dass der Wertebereich $\{f(z) : z \in \mathbb{C}\}$ einer nicht konstanten, ganzen Funktion $f(z)$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. (Hinweis: Satz von Liouville)

6. Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

   (a) $0 < |z| < 1$, (b) $0 < |z-1| < 1$, (c) $1 < |z| < \infty$.

7. Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

   (a) $1 < |z| < 2$, (b) $2 < |z| < \infty$, (c) $0 < |z-2| < 1$, (d) **(HA)** $0 < |z-1| < 1$.

8. Man entwickle folgende Funktionen an ihren singulären Stellen in eine Laurentreihe. Man gebe das Konvergenzgebiet der Reihen an!

   (a) $f_1(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$, (b) $f_2(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$, (c) **(HA)** $f_3(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$, (d) $f_4(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

9. Man charakterisiere für die Funktionen der Aufgaben 6, **(HA)** 7 und 8 (a), (b), (d), **(HA)** (c) die singulären Stellen (Polstelle, hebbare oder wesentliche Singularität) und ermittle die Residuen an diesen Stellen.

10. Man berechne möglichst effektiv die Residuen von $f(z)$ an den angegebenen Stellen

    (a) $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z-5)^2}$, $z_1 = -3, z_2 = 5$,

    (b) $f(z) = (\sin z - \cos z)^{-1}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$,

    (c) **(HA)** $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 1$,

    (d) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$, $z_0 = 0$,

    (e) $f(z) = \dfrac{1}{1+z-e^z}$, $z_0 = 0$.

    (f) **(HA)** $f(z) = \cot z$, $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = \pi$.

11. Man berechne folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

    (a) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$, (b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathbf{i} \cot z}{z(z-1)} dz$, (c) **(HA)** $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z(1-z)} dz$.

12. Man berechne folgende uneigentlichen (reellen) Integrale:

    (a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$, **(Z)** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$.