Mathematematik für Physiker und Computational Science Studenten

22. Übung – Elementare Funktionen, Identitätssatz

---

1. Sei $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Man zeige die Gültigkeit folgender Formeln:
   (a) $\mathrm{Re}\,\sin z = \sin x \cosh y$,
   (b) **(HA)** $|\sin z| = \sqrt{(\sinh y)^2 + \sin^2 x}$,
   (c) $\mathrm{Im}\,\sin z = \cos x \cdot \sinh y$,
   (d) **(HA)** $\cos z = \cos x \cosh y - \mathbf{i} \sin x \sinh y$.

2. Auf welchen Teilmengen der komplexen Zahlenebene sind die Funktionen

$$f_1(z) = e^z, \quad f_2(z) = \cos z, \quad \textbf{(HA)} \quad f_3(z) = \sin z$$

reellwertig? Man berechne

$$f_1\left(\frac{\pi}{2}(1 + \mathbf{i})\right), \quad f_2(\pi + \mathbf{i}), \quad \textbf{(HA)} \quad f_3(2\mathbf{i}).$$

3. Man bestimme (für $k \in \mathbb{Z}$ fixiert) das Bild des Gebietes

$$G_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2}(2k - 1) < \mathrm{Re}\, z < \frac{\pi}{2}(2k + 1) \right\}$$

bei der Abbildung $w = f(z) = \sin z$.

Zusatz: Ist $f : G_k \longrightarrow \mathbb{C}$ eineindeutig?

4. Unter einem (natürlichen) Logarithmus einer komplexen Zahl z versteht man eine komplexe Zahl w mit der Eigenschaft $z = e^w$. Man bestimme alle (natürlichen) Logarithmen sowie den Hauptwert des Logarithmus von $z_1 = \mathbf{i}$ und $z_2 = (1 + \mathbf{i})^3$.

5. Man bestimme das Bild D' des Gebietes D bei der Abbildung $f(z)$:
   (a) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$, $f(z) = z^2$.
   (b) $D = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}\, z < 0\}$, $f(z) = e^z$.
   (c) **(HA)** Welches Gebiet D_n wird bei der Abbildung $w = z^n (n \in \mathbb{N})$ auf die „geschlitzte“ Ebene $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ eineindeutig abgebildet?

6. Gibt es eine in einer Umgebung des Nullpunktes analytische Funktion, die in den Punkten $z_n = \frac{1}{n}$ folgende Werte annimmt? (Hinweis: Identitätssatz)
   (a) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \ldots$ (b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ (c) **(HA)** $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$
   (d) **(HA)** $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots$

7. Welche der folgenden Funktionen sind ganze Funktionen?
   (a) $\sin \overline{z}$ (b) **(HA)** $\sin |z|$ (c) $\overline{\sin \overline{z}}$