Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

21. Übung – Funktionentheorie: Differenzierbarkeit, Potenzreihen

---

1. Man untersuche die Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an Hand der Definition auf Differenzierbarkeit!

   (a) $f(z) = 5\mathbf{i}$ (b)**(HA)** $f(z) = z$ (c) $f(z) = \overline{z}$ (d) $f(z) = 3 \text{ Re } z$

2. Sind folgende Funktionen differenzierbar? Man berechne gegebenenfalls die Ableitung!

   (a) $f(z) = z\overline{z}$ (b) $f(z) = z^2\overline{z}$ (c) **(HA)** $f(z) = \text{Im } z$
   (d) $f(z) = e^x(\cos y + \mathbf{i} \sin y)$ $(z = x + \mathbf{i}y)$ (e) **(HA)** $f(z) = z \text{ Re } z$

3. **(HA)**

   (a) Überprüfen Sie, ob $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$ eine harmonische Funktion ist!
   (b) Bestimmen Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = u + \mathbf{i}v$, $z = x + \mathbf{i}y$, analytisch ist mit $f(0) = 0$.
   (c) Ist v eine harmonische Funktion (Begründung!)?

4. Für welche Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen ganze Funktionen? $(z = x + \mathbf{i}y)$

   (a) $f(z) = x + ay + \mathbf{i}(bx + cy)$
   (b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + \mathbf{i} \sin x(\cosh y + b \sinh y)$

5. Man entwickle folgende Funktionen in $z_o \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe, und gebe das Konvergenzgebiet an:

   (a) $f(z) = e^z, z_o = \pi\mathbf{i}$
   (b) **(HA)** $f(z) = \dfrac{1}{z - \mathbf{i}}, z_o = 0$
   (c) $f(z) = \dfrac{1}{(z - \mathbf{i})^3}, z_o = -\mathbf{i}$
   (d) **(HA)** $f(z) = \dfrac{2z + 1}{(z^2 + 1)(z + 1)^2}, z_o = 0.$ (Hinweis: Partialbruchzerlegung)

6. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen? Man gebe im Falle der Konvergenz die Summe der Reihe an!

   (a) $1 + (2z + 1) + (2z + 1)^2 + \cdots$
   (b) **(HA)** $1 + 2\dfrac{z - 1}{z + 1} + 2\left(\dfrac{z - 1}{z + 1}\right)^2 + \cdots.$

7. Zeigen Sie, dass für die Funktionen

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

   die Darstellungen

$$\sinh z = -\mathbf{i} \sin \mathbf{i}z, \ \text{ bzw. } \textbf{(HA)} \cosh z = \cos \mathbf{i}z$$

   gelten.

8. Die Reihendarstellungen von $e^z, \cos z, \sin z$ sowie das Potenzgesetz $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ werden als bekannt vorausgesetzt.
   Man zeige, dass $e^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i}\sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, und leite die folgenden Formeln her:
   $$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \text{sowie} \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2\,.$$
   Zusatz: Zeigen Sie, dass $f(z) = \sin z$ und $g(z) = \cos z$ nur reelle Nullstellen haben.

9. Sei $f(z) = u(z) + \mathbf{i}v(z) = \rho(z)e^{\mathbf{i}\theta(z)}$ eine holomorphe Funktion im Gebiet G. Man beweise: Wenn eine der Funktionen $u, v, \rho, \theta : G \longrightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$, konstant ist, so ist auch $f : G \to \mathbb{C}$ konstant.

10. **(HA)** Man zeige: Wenn $f(z)$ im Gebiet G holomorph ist und $f'(z) = 0$ in G gilt, so ist $f(z)$ in G konstant.

11. Sei $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$ und $f(z) = u(r, \varphi) + \mathbf{i}v(r, \varphi)$. Man schreibe die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für Polarkoordinaten auf.