**Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten**

**20. Übung – Metrische Räume, normierte Räume, lineare Operatoren**

---

1. Sind folgende Ausdrücke $d(x,y)$ Metriken in $X$ ($x, y \in X$)?

   **(HA)** (a) $X = \mathbb{R},\ d(x,y) = \sin^2(x-y)$, (b) $X = \mathbb{N},\ d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{x \cdot y}$.

   **Zusatz:** $X = S$ mit $S$ Menge aller Zahlenfolgen,

   $$x = (x_i)_1^\infty, y = (y_i)_1^\infty, d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}\,.$$

2. Unter der *Ableitung* $A'$ einer Menge $A$ eines metrischen Raumes $X$ versteht man die Menge aller Häufungspunkte von $A$, unter der *Abschließung* $\overline{A}$ von $A$ versteht man die Menge $\overline{A} = A \cup A'$.
   Sei $\mathbb{R}$ ausgerüstet mit der Metrik $d(x,y) = |x-y|$.
   Finden Sie die Ableitung $A'$ und die Abschließung $\overline{A}$ folgender Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$, und untersuchen Sie, ob $A$ oder $\overline{A}$ offene bzw. abgeschlossene Mengen sind:

   (a) $A = \mathbb{N}$, (b) $A = (0,1) \cup (1,2)$, (c) $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, **(HA)** (d) $A = \{0\} \cup (1,2)$,

   **(HA)** (e) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{2n}{n+1}\right\}$, **(HA)** (f) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{2n-3}{3n+2}\right\}$ .

Im folgenden seien $U, V$ normierte lineare Räume über dem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

3. Zeigen Sie: Die Norm ist eine stetige Abbildung von $(U, \|\cdot\|)$ in $\mathbb{R}$, d.h. aus $x_n \longrightarrow x$ in $U$ folgt $\| x_n \| \longrightarrow \| x \|$.

4. Man zeige: Die algebraischen Operationen in $U$ sind stetig bezüglich der Norm, d.h. aus $x_n \longrightarrow x, y_n \longrightarrow y$ in $(U, \|\cdot\|)$ und $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ in $\mathbb{K}$ folgt

   $x_n + y_n \longrightarrow x + y$ und **(HA)** $\lambda_n x_n \longrightarrow \lambda x$ in $U$.

5. Zeigen Sie, dass $l^\infty$, der Raum aller beschränkten Zahlenfolgen aus $\mathbb{C}$, ein Banachraum ist.

6. Man zeige: Der Raum der Nullfolgen $c_0$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $l^\infty$.
   **Zusatz:** Der Raum $c$ aller konvergenten Zahlenfolgen ist ein abgeschlossener Teilraum von $l^\infty$.

7. $(U, \|\cdot\|_a)$ sei ein Banach-Raum, und $\|\cdot\|_b$ sei zu $\|\cdot\|_a$ äquivalent, d.h. es existieren positive Konstanten $C_1, C_2$ so, dass $C_1||x||_b \le ||x||_a \le C_2||x||_b$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass dann auch $(U, \|\cdot\|_b)$ Banach-Raum ist!

8. **(HA)** Im Koordinatenraum $\mathbb{K}^n$ ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) seien folgende Normen definiert:

   $$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \ge 1)\,, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|\,.$$

   Zeigen Sie, dass alle diese Normen zueinander äquivalent sind. (Hinweis: Zeigen Sie alle $p$-Normen sind zur $\infty$-Norm äquivalent.)

9. Zeigen Sie, dass folgende Operatoren linear und beschränkt sind, und berechnen Sie die Normen:

   (a) $A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1], \quad (Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds\,,$

   (b) $A : C[-1,1] \longrightarrow C[0,1], \quad (Ax)(t) = x(t)\,,$

   (c) **(HA)** $A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1], \quad (Ax)(t) = t^2 x(0).$

10. Auf $[-1,1]$ definieren wir die Funktionen $U_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, die Tschebyschoff-Polynome 2. Art genannt werden:

$$U_n(\cos s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(n+1)s}{\sin s}\,.$$

Man zeige: $U_n$ ist ein Polynom in $x = \cos s$ vom Grad $n$ und das System $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist ein Orthonormalsystem bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)dx \qquad \text{wobei} \qquad w(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

11. **(HA)** $l^1$ sei der Raum aller Zahlenfolgen $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit Elementen aus $\mathbb{K}$, die die Beziehung $\| a \|_1 := \sum\limits_{n=1}^{\infty} | a_n | < \infty$ erfüllen. Beweisen Sie, dass $(l^1, \| \cdot \|_1)$ ein Banach-Raum ist!