Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

2. Übung – Komplexe Zahlen

1. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

   (a) $(2+3\mathbf{i})(3-2\mathbf{i})$, (b) $(1+\mathbf{i})^3$, (c) $(1+2\mathbf{i})^6$, (d) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, (e) $\mathbf{i}^k$ $(k \in \mathbb{Z})$,

   (f) $\dfrac{a+b\mathbf{i}}{a-b\mathbf{i}}$ $(a,b \in \mathbb{R},\ (a,b) \neq (0,0))$, (g) $\dfrac{(1+\mathbf{i})^{10}}{(1-\mathbf{i})^8}$, (h) $(a+b\mathbf{i})^n$ $(a,b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

2. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

   (a) $\frac{1}{2}+\frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$, (b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i}$, (c) $\sin\alpha+\mathbf{i}(1-\cos\alpha)$ $(\alpha \in [-\pi,\pi))$, (d) $1+\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}$.

3. Es sei $z = x+\mathbf{i}y = r(\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi)$ mit $x,y \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [-\pi,\pi)$, $r > 0$ eine beliebige komplexe Zahl. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen:

   (a) $\overline{z}$, (b) $\dfrac{1}{\overline{z}}$, (c) z^2, (d) $\mathbf{i}z$, (e) $z\overline{z}$, (f) $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right|$,

4. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre

   (a) $(1+\mathbf{i})^{10}$, (b) $(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^6$, (c) $(-1+\mathbf{i})^5$, (d) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^3$, (e) **(HA)** $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^9$.

5. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

   (a) $z = \dfrac{1}{\overline{z}}$, (b) $\mathsf{Re}\,(z^2) = 1$, (c) $\mathsf{Re}\,\dfrac{1}{z} = c$, (d) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leq 3$, (e) $2 < |z| < 4$,

   (f) $|z-z_0| = |z-z_1|$, (g) $|z+3|+|z-3| \leq 10$,

   wobei $c \in \mathbb{R}$ und $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ beliebige, aber fest gewählte Zahlen sind.

6. Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^3 = -1$, (b) $z^4+1 = 0$, (c) **(HA)**$z^3+2 = 2\mathbf{i}$, (d) $z^4 = -8+8\sqrt{3}\,\mathbf{i}$,

   (e) $z^2 = -3-4\mathbf{i}$, (f) $z^4-2\mathbf{i}z^2+2\mathbf{i} = 1$, (g) $z^2+4\mathbf{i}z+5 = 0$,

7. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die Beziehung

   $$2(|z|^2+|w|^2) = |z-w|^2+|z+w|^2$$

   gilt.

8. Zerlegen Sie folgende Polynome sowohl in komplexe Linearfaktoren als auch in reelle Linear- und (wenn nötig) quadratische Faktoren:

   (a) $p(z) = z^3+1$, (b) $p(z) = z^4-16$, (c) **(HA)** $p(z) = (z^3-1)(z^3+8)$.

9. Sind Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \log_2 3+\mathbf{i}\log_2 6$ irrational?

10. Berechnen Sie die Summe und das Produkt aller komplexen Lösungen der Gleichung

    $$z^n = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

11. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha,\ n\alpha \notin \left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ die Beziehung

    $$\left(\frac{1+\mathbf{i}\tan\alpha}{1-\mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n = \frac{1+\mathbf{i}\tan(n\alpha)}{1-\mathbf{i}\tan(n\alpha)}$$

    gilt.

12. Es seien $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $p(z_0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $p(\overline{z_0}) = 0$ gilt.

2. Hausaufgabe

---

1. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

   (a) $\dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$, (b) $\dfrac{(1-\mathbf{i})^5-1}{(1+\mathbf{i})^5+1}$.

2. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

   (a) -1, (b) $2-2\mathbf{i}$, (c) $(1+\mathbf{i})^3$, (d) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, (e) $\dfrac{2\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$,

   (f) $\dfrac{(1+\mathbf{i}\sqrt{3})^5}{(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^3}$, (g) $\dfrac{\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi}{\cos\varphi-\mathbf{i}\sin\varphi}$ $(\varphi\in\mathbb{R})$.

   Berechnen Sie die vierten Potenzen dieser Zahlen sowohl unter Verwendung der binomischen Formel und als auch unter Verwendung der Formel von Moivre.

3. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexer Zahlen z mit der Eigenschaft

   (a) $z=\overline{z}$, (b) $z=\mathbf{i}\overline{z}$, (c) $\mathrm{Im}(z^2)=1$,

   (d) $0\le \mathrm{Im}z\le 2\pi$ und $|\mathrm{Re}z|<1$, (e) $|z|<1+\mathrm{Re}z$.

4. Sei $z=\dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$. Für welche natürlichen Zahlen n ist z^n reell?

5. Man bestimme alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^5=1$, (b) $z^3-\mathbf{i}=0$, (c) $z^6=64$, (d) $\overline{z}^3=-8$,

   (e) $\mathbf{i}z^2-2z-\mathbf{i}+1=0$, (f) $(z-3\mathbf{i})^6+64=0$, (g) $\overline{z}=z^3$, (h) $z^2+4\mathbf{i}z=5$.

6. Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

   $$z=\sqrt{3}+\frac{1+2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\mathbf{i}$$

   irrationale Zahlen sind.

7. Drücken Sie $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$ $(n\in\mathbb{N},\varphi\in\mathbb{R})$ mittels Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus.

8. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 2. Übung.